莆田市2026届高中毕业班第二次质量调研测试试卷

数　学

本试卷共4页，19小题，满分150分．考试时间120分钟．

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x\mid 3^x>1\}$，$B=\{-1,0,1\}$，则 $A\cap B=$

A．$\varnothing$　　B．$\{1\}$　　C．$\{0,1\}$　　D．$\{-1,0,1\}$

2. 已知复数 $z=\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})$，则 $|z|=$

A．$\sqrt{5}$　　B．3　　C．$2\sqrt{5}$　　D．5

3. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，上顶点为 P，则 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为

A．5　　B．6　　C．8　　D．10

4. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，若 $a=5$，$b=7$，$c=8$，则 $B=$

A．$\dfrac{\pi}{12}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{\pi}{2}$　　D．$\dfrac{2\pi}{3}$

5. 已知 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $0<|a|<b<1$，则

A．$a^2>b^2$　　B．$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　C．$\dfrac{a}{a+1}<\dfrac{b}{b+1}$　　D．$\cos a<\cos b$

6. 为了探究六年级学生每日自主阅读时间与语文成绩的关系，某研究小组随机调查了50名学生，得到成对样本数据 (x_i,y_i)（$i=1,2,\cdots,50$），其中 x_i 表示每日自主阅读时间（单位：小时），y_i 表示语文成绩（单位：分）．经计算得回归直线方程为 $\hat{y}=5.2x+72.4$．下列说法正确的是

A．该样本数据的相关系数为5.2

B．当阅读时间每增加1小时，语文成绩平均增加5.2分

C．该样本数据中，至少有一个点 (x_i,y_i) 在回归直线上

D．若某学生每日阅读时间为2小时，则他的语文成绩一定为82.8分

7．已知数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，m，n，s，$t\in\mathbf{N}^*$，则下列命题正确的是

A．若$a_1a_3=4$，则a_2　　　B．若$a_1<a_2$，则$q>1$

C．若$|q|\neq 1$，则$(a_1+a_3)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_3}\right)>4$　　　D．若$a_ma_n=a_sa_t$，则$m+n=s+t$

8．已知函数$f(x)$的定义域为D，任意给定$n\in\mathbf{N}^*$，都存在$x_0\in D$，使得$f(nx_0)=nf(x_0)$，则$f(x)$不可能为

A．$f(x)=x$　　　B．$f(x)=\sqrt{x}$　　　C．$f(x)=\ln x$　　　D．$f(x)=\mathrm{e}^{x}$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9．记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_n=n^2-4n$，则下列说法正确的是

A．$\{a_n\}$为等差数列　　　B．$\{a_n\}$为单调递增数列

C．$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|+|a_6|=12$　　　D．$\dfrac{S_n}{a_n}$的最小值为-3

10．已知函数$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(2x+1)}{x}$，则

A．$f(x)$有且只有一个零点

B．点$(0,2)$为曲线$y=f(x)$的对称中心

C．曲线$y=f(x)$在点$(1,3\mathrm{e})$处的切线方程为$y=2\mathrm{e}x+\mathrm{e}$

D．$\exists x_1<0<x_2$，$f(x_1)>f(x_2)$

11．已知正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的所有顶点都在球O的球面上，且$AB=3A_1B_1=3$，点P满足$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AA_1}$，则

A．当P为棱B_1C_1的中点时，$x+y+z=\dfrac{4}{3}$　　　B．$\overrightarrow{A_1C_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=1$

C．若直线BP∥平面ACC_1A_1，则$x=1$　　　D．若$AA_1=\sqrt{2}$，则球O的表面积为18π

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．

12．已知向量$\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(1,k)$，若$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则$k=$________．

13．有4个相同的球，分别标有数字1，2，3，4，从中随机取球一次（至少取一个），则取出的球的标号之和不超过5的概率为________．

14．已知双曲线$C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$的左顶点为A，右焦点为F．过F的直线l交C于M，N两点．若$|MN|=18$，则$\triangle AMN$的外接圆的半径为________．

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（13分）

已知函数 $f(x)=2\sin(x+\varphi)$（$|\varphi|<\pi$）的图象过点 $P\left(\frac{\pi}{4},2\right)$．

（1）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）当 $f\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)f\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)=3$，且 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{15}{16}$ 时，证明：$\tan\alpha=4\tan\beta$．

16．（15分）

已知函数 $f(x)=ax^2-\ln x$．

（1）当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

（2）若 $f(x)\geqslant(2-a)x$，求实数 a 的取值范围．

17．（15分）

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，直线 $y=2\sqrt{3}$ 与 l，C 的交点分别为 P，Q，且 $|FP|=|FQ|$．

（1）求 p；

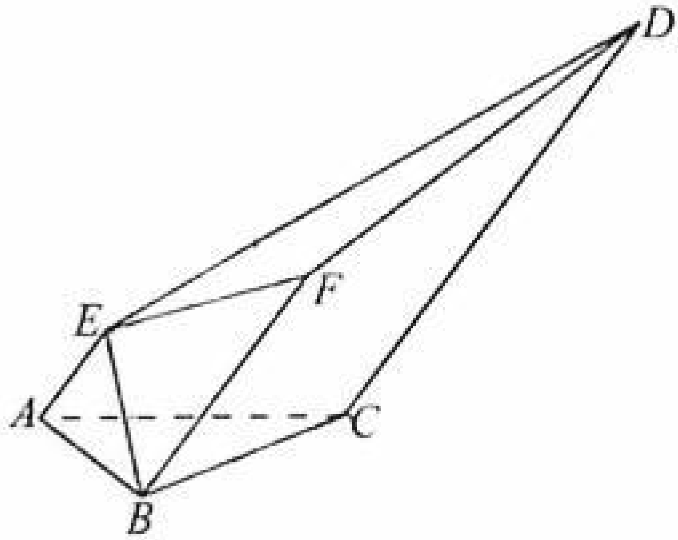
（2）若过点 $D(4,0)$ 的直线 m 交 C 于 A，B 两点，且 $|AD|\cdot|BD|=24$，求 $\frac{|AD|}{|BD|}$ 的值．

如图，五面体 $ABCDEF$ 中，$AE // BF // CD$，$AE=1$，$BF=3$，$CD=5$，$AB=AC=2$，$\angle EAB=\angle EAC=\alpha$，$\angle BAC=\beta$.

（1）证明：$AE\perp BC$；

（2）当 $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 时，求直线 BE 与平面 $BCDF$ 所成角的正弦值；

（3）若 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，当该五面体的体积取到最大值时，求 $\cos\beta$ 的值.



19.（17分）

某分布式存储系统中，数据块容量上限为 N（$N\in\mathbf{N}^*$，$N\geqslant 2$），数据块的初始数量为 M（$M\in\mathbf{N}$，$M\leqslant N$）. 系统运行遵循以下规则：

① 在每一时间步，系统以概率 p（$0<p<1$）执行清理操作（数据块的数量减1），以概率 $1-p$ 执行写入操作（数据块的数量加1）；

② 当数据块的数量为0（成功复位）或为 N（内存溢出）时，系统运行立即终止.

记当数据块的数量为 k（$0\leqslant k\leqslant N$，$k\in\mathbf{N}$）时，系统最终以“成功复位”状态终止的概率为 a_k.

（1）直接写出 a_0，a_N 的数值，并写出 a_{k-1}，a_k，a_{k+1}（$1\leqslant k\leqslant N-1$）的关系式；

（2）当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时，比较系统最终以“成功复位”与“内存溢出”状态终止的概率大小关系；

（3）已知：若随机变量 X 的取值不会影响随机变量 Y 的概率分布列，则称 X 与 Y 相互独立，且满足 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$. 记 X_n 为系统运行 n 步后的数据块的数量（假设系统在此期间未终止）. 当 $p\neq\dfrac{1}{2}$ 时，若 $E\left(\lambda^{X_n}\right)$ 与 n 无关，求正实数 λ（$\lambda\neq 1$）的值.

莆田市 2026 届高中毕业班第二次质量调研测试试卷
数学试题参考解答及评分标准

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则．
2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．
3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．
4．只给整数分数．单项选择题和单空填空题不给中间分．

一、选择题：每小题 5 分，满分 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	B	C	B	C	D

1.【答案】B

解析： $A=\{x|3^x>1\}=\{x|x>0\}$， $A\cap B=\{1\}$，故选 B.

2.【答案】A

解法一： $z=\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})=2+\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{5}$，故选 A.

解法二： $|z|=|\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})|=|1-2\mathrm{i}|=\sqrt{5}$，故选 A.

3.【答案】D

解析：依题意可得 $F_1(-2,0),F_2(2,0)$，因为 $|PF_1|+|PF_2|=2a=6$，$|F_1F_2|=2c=4$，所以 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $6+4=10$，故选 D.

4.【答案】B

解析：由 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，且 $B\in(0,\pi)$，解得 $B=\dfrac{\pi}{3}$，故选 B.

5.【答案】C

解法一：（特殊值检验法）取 $a=-\dfrac{1}{3}$， $b=\dfrac{1}{2}$，则 $a^2<b^2$， $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$， $\cos a>\cos b$，故选项 A，B，D 均错误；

由于 $-1<-b<a<b<1$， $a+1>0$， $b+1>0$，

从而 $\frac{a}{a+1}-\frac{b}{b+1}=\frac{a(b+1)-a(b+1)}{(a+1)(b+1)}=\frac{a-b}{(a+1)(b+1)}<0$，故选项 C 正确，故选 C.

解法二：由已知得 $-b<a<b$，则 $a+b>0$，$a-b<0$，从而 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)<0$，故选项 A 错误.

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$，因为 $b-a>0$，$b>0$，故当 $a<0$ 时，上式 <0，从而 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故选项 B 错误.

考察函数 $f(x)=\frac{x}{x+1}$，易知 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递增，又 $-1<-b<a<b<1$，所以 $f(a)<f(b)$，故选项 C 正确.

考察函数 $g(x)=\cos x$，可知 $g(x)$ 为偶函数且在区间 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $g(a)=g(|a|)>g(b)$，故选项 D 错误.

故选 C.

6.【答案】B

解析：由于相关系数 $r\in[-1,1]$，故选项 A 错误；

当 $\Delta x=1$ 时，语文成绩的增量 $\Delta y=5.2(x+1)+72.4-5.2x-72.4=5.2$，故选项 B 正确；

回归直线方程可以不经过成对数据中的任意一对，故选项 C 错误；

回归直线方程得到的值是预测值，不一定是真实值，故选项 D 错误.

故选 B.

7.【答案】C

解析：由于 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $a_1a_3=a_2^2$，解得 $a_2=\pm 2$，故选项 A 错误；

当 $a_1<0$，$a_2>0$ 时，有 $a_1<a_2$，但 $q<0$，故选项 B 错误；

由于 $\{a_n\}$ 是等比数列，从而 $\frac{a_3}{a_1}=q^2>0$，$(a_1+a_3)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}\right)=1+\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_1}{a_3}+1\geqslant 4$，当且仅当 $\frac{a_3}{a_1}=1$ 时取等号，又 $|q|\neq 1$，故选项 C 正确；

当 $q=1$ 时，有 $a_1a_2=a_3a_4=a_1^2$，但 $1+2\neq 3+4$，故选项 D 错误.

故选 C.

8.【答案】D

解析：对给定 $n\geqslant 2$，且 $n\in\mathbf{N}^*$，取 $x=0$，有 $f(n\times 0)=0$，$nf(0)=0$，所以 $f(n\times 0)=nf(0)$，所以选项 A 符合题设；

对给定 $n\geqslant 2$，且 $n\in\mathbf{N}^*$，取 $x=0$，有 $f(n\times 0)=0$，$nf(0)=0$，所以 $f(n\times 0)=nf(0)$，所以

选项 B 符合题设；

对给定 $n\geqslant 2$，且 $n\in \mathbf{N}^*$，由 $f(nx)=nf(x)$，得 $\ln(nx)=n\ln x$，即 $\ln n+\ln x=n\ln x$，整理得 $\ln x=\dfrac{\ln n}{n-1}$，从而 $\ln x=\ln n^{\frac{1}{n-1}}$，得 $x_0=n^{\frac{1}{n-1}}$，所以选项 C 符合题设；

对于选项 D，对给定 $n\geqslant 2$，且 $n\in \mathbf{N}^*$，由 $f(nx)=nf(x)$，得 $\mathrm{e}^{-(nx)^2}=n\mathrm{e}^{-x^2}$，即 $\mathrm{e}^{(1-n^2)x^2}=n$，因为 $n\geqslant 2$，所以 $(1-n^2)x^2<0$，所以 $0<\mathrm{e}^{(1-n^2)x^2}<1$，又由于 $n\geqslant 2$，所以对任意 $x\in \mathbf{R}$，都有 $\mathrm{e}^{-(nx)^2}\neq n\mathrm{e}^{-x^2}$，所以选项 D 不符合题设.

故选 D.

二、选择题：每小题 6 分，满分 18 分.（本题为多项选择题，每小题中，全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，有选错得 0 分）

题号	9	10	11
答案	ABD	AC	ACD

9.【答案】ABD

解析：由 $S_n=n^2-4n$，得 $a_n=2n-5$，从而 $\{a_n\}$ 是等差数列，故 A 正确；

由 $d=2>0$，知 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，故 B 正确；

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|+|a_6|=3+1+1+3+5+7=20\neq 12$，故 C 错误；

由 $S_n=n^2-4n=n(n-4)$ 得，当 $n\leqslant 3$ 时，$S_n<0$；当 $n\geqslant 4$ 时，$S_n\geqslant 0$；由 $a_n=2n-5$ 知，当 $n\leqslant 2$ 时，$a_n<0$；当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n>0$；所以当 $n\leqslant 2$ 或 $n\geqslant 4$ 时，$\dfrac{S_n}{a_n}\geqslant 0$；当 $n=3$ 时，$\dfrac{S_n}{a_n}=-3<0$，所以 $\dfrac{S_n}{a_n}$ 的最小值为 -3，故 D 正确.

故选 ABD.

10.【答案】AC

解析：令 $f(x)=0$，解得 $x=-\dfrac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 有且只有一个零点 $-\dfrac{1}{2}$，故 A 正确；

法一：（特值检验排除法）因为 $f(1)+f(-1)=3\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\neq 4$，故 B 错误；

法二：（代数判定）只需判定 $f(x)+f(-x)=4$ 是否恒成立，因为

$f(x)+f(-x)=\dfrac{e^{x}(2x+1)}{x}+\dfrac{e^{-x}(-2x+1)}{-x}=\dfrac{2x(e^{x}+e^{-x})+e^{x}-e^{-x}}{x}\neq 4$，故 B 错误；

$f'(x)=\dfrac{(x+1)(2x-1)e^{x}}{x^{2}}$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,3e)$ 处的切线斜率为 $k=f'(1)=2e$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,3e)$ 处的切线方程为 $y=2ex+e$，故 C 正确；

令 $f'(x)=\dfrac{(x+1)(2x-1)e^{x}}{x^{2}}=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$，从而当 $x<-1$ 或 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$；当 $-1<x<0$ 或 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1),\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $(-1,0),\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f(-1)=\dfrac{1}{e}$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4\sqrt{e}$.因为 $x_1<0<x_2$，$f(x_1)\leqslant\dfrac{1}{e},f(x_2)\geqslant 4\sqrt{e}$，所以 $f(x_2)>f(x_1)$，故 D 错误.

故选 AC.

11.【答案】ACD

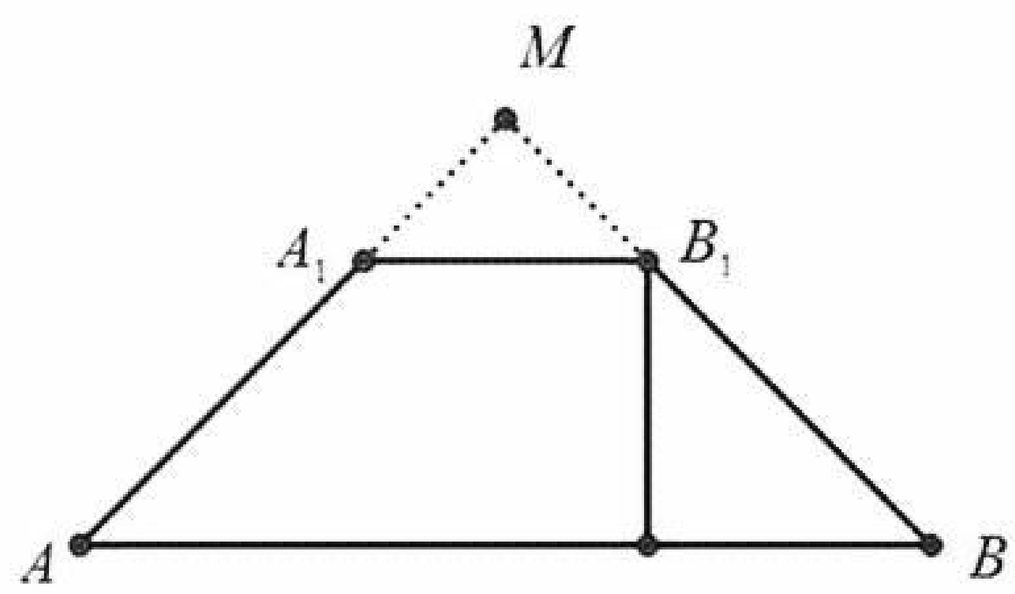
解法一：（空间向量非正交基底法）

当 P 为棱 B_1C_1 的中点时，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC_1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$,从而 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}$，所以 $x+y+z=\dfrac{4}{3}$，故 A 正确；

$\overrightarrow{A_1C_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}\right)=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AA_1}$ 又 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=3\times3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量长度为 1，从而 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AA_1}=3$，所以 $\overrightarrow{A_1C_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=\dfrac{1}{2}$，故 B 错误；

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=(x-1)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AA_1}$，平面 ACC_1A_1 的一组基底为 $\left\{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}\right\}$，因为直线 $BP//$ 平面 ACC_1A_1，所以 $x=1$，故 C 正确；

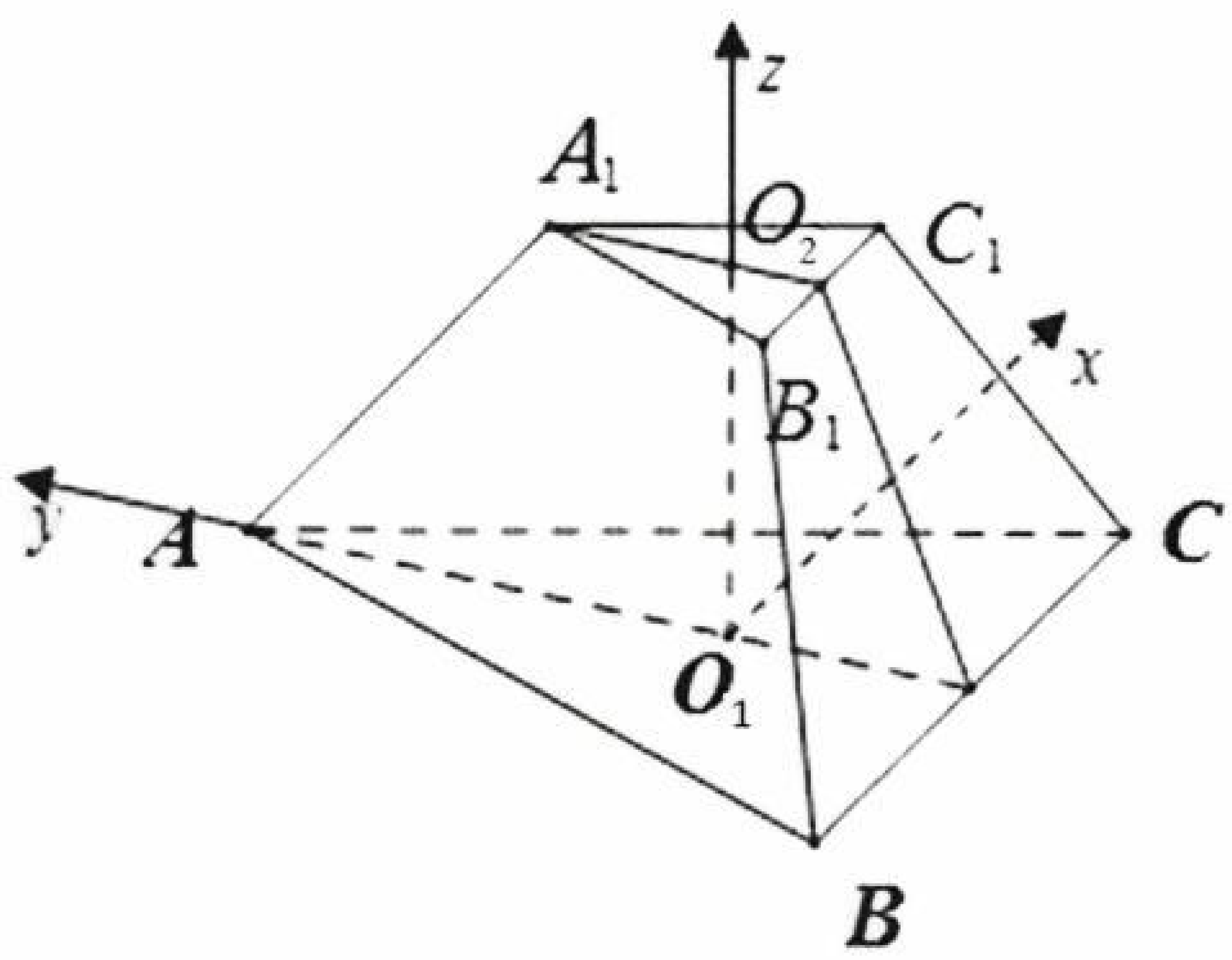
如图所示，若 $AA_1=\sqrt{2}$，则 $\triangle MAB$ 为等腰直角三角形，由对称性可知球心 O 在上下底面中心 O_1O_2 的连线上，在直角梯形 $AO_1O_2A_1$ 中，经计算可得 $AO_1=\sqrt{3}$，$A_1O_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$AA_1=\sqrt{2}$，$O_1O_2=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$MO_2=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，$OO_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，所以外接球半径 $R=OA=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$,从而球的表面积为 18π，故 D 正确.



故选 ACD.

解法二：坐标法

如图，以底面中心为O_1为原点，分别以$\overrightarrow{O_1A}$，$\overrightarrow{O_1O_2}$的方向为y轴、z轴的正方向，建立空间直角坐标系O_1-xyz，设三棱台的高为h，则$A\left(0,\sqrt{3},0\right)$，



$B\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$C\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$O_2\left(0,0,h\right)$，

$A_1\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3},h\right)$，$B_1\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{6},h\right)$，$C_1\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{6},h\right)$.

$\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AA_1}=\left(0,-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},h\right)$，

对于选项 A，当P为棱B_1C_1的中点时，则$P\left(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{6},h\right)$，$\overrightarrow{AP}=\left(0,-\dfrac{7\sqrt{3}}{6},h\right)$，

由$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AA_1}$得$\overrightarrow{AP}=\left(-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}y,-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}y-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}z,zh\right)$，

从而有$-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}y=0$，$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}y-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}z=-\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$，$zh=h$，解得$x=y=\dfrac{1}{6},z=1$，所以$x+y+z=\dfrac{4}{3}$，故 A 正确；

对于选项 B，$\overrightarrow{A_1C_1}=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{A_1B}=\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{5\sqrt{3}}{6},-h\right)$，$\overrightarrow{A_1C_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=\dfrac{1}{2}$，故 B 错误；

对于选项 C，设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面ACC_1A_1的法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}y+hz=0.\end{cases}$

取$y=\sqrt{3}$，则$x=3$，$z=\dfrac{2}{h}$，所以$\boldsymbol{n}=(3,\sqrt{3},\dfrac{2}{h})$是平面$BCDF$的一个法向量.

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}=\left(-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}y-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}y-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}z-\dfrac{3}{2}\sqrt{3},zh\right)$，由直线$BP\parallel$平面$ACC_1A_1$可知$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，解得$x=-1$，故 C 正确；

对于选项D，因为$AA_1=\sqrt{2}$，所以$\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+h^2=2$，解得$h=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

由对称性可知球心O在O_1O_2上，可设$O(0,0,a)$，又$A\left(0,\sqrt{3},0\right)$ $A_1\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，由

$|OA|=|OA_1|=r$可得$3+a^2=r^2$，$\frac{1}{3}+(a-\frac{\sqrt{6}}{3})^2=r^2$，

解得$a=-\frac{\sqrt{6}}{2}$，$r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，从而球的表面积为18π，故D正确.

故选ACD.

三、填空题：每小题5分，满分15分.

12. 【答案】-5

解析：依题意得$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(3,3+k\right)$，因为$\boldsymbol{a}\perp\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)=0$，即$2\times3+3\left(3+k\right)=0$，

解得$k=-5$，故填-5.

13.【答案】$\frac{8}{15}$

解法一：记事件$A=$“取出的球的标号之和不超过5”

样本空间Ω的所有样本点为：$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\}$，

$\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}$，故$n\left(\Omega\right)=15$，$n\left(A\right)=8$，所以$P\left(A\right)=\frac{8}{15}$，故填$\frac{8}{15}$.

解法二：样本空间Ω的所有样本点共有$C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=15$个，因为所有标号之和为$10$，故每一种标号之和小于5的情况都对应一种标号之和大于5的情况，反之只有标号之和为10的情况对应的是标号之和为0的情况，当标号之和为5时，只有$\{1,4\}$，$\{2,3\}$两种情况，所以符合条件的情况有8种，所以概率$P\left(A\right)=\frac{8}{15}$，故填$\frac{8}{15}$.

14. 【答案】9

解法一：依题意可得$A(-1,0),F\left(2,0\right)$.因为$l$的斜率不为零，故可设$l:x=ty+2$，代入$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，消去$x$，整理得$\left(3t^2-1\right)y^2+12ty+9=0$. 设$M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，则$y_1+y_2=\frac{-12t}{3t^2-1}$，$y_1y_2=\frac{9}{3t^2-1}$，因为$\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)=\left(ty_1+3\right)\left(ty_2+3\right)=t^2y_1y_2+3t\left(y_1+y_2\right)+9=\frac{9t^2}{3t^2-1}-\frac{36t^2}{3t^2-1}+9=\frac{-9}{3t^2-1}$，所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)+y_1y_2=0$，所以$AM\perp AN$，即

$\triangle AMN$ 为直角三角形，所以 $\triangle AMN$ 的外接圆的半径为 $\frac{1}{2}|MN|=9$，故填 9.

解法二：先证明一个关于双曲线 C：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的结论：

设点 P 为双曲线右支上一点，右焦点 F，左顶点 A，则必有 $\angle PFA=2\angle PAF$.

证明如下：

要证明 $\angle PFA=2\angle PAF$，只需证明 $\tan\angle PFA=-\tan(2\angle PAF)$，即证 $-k_{PF}=\frac{2k_{PA}}{1-(k_{PA})^2}$ （*）.

设 $P(x_0,y_0)$，则 $k_{PF}=\frac{y_0}{x_0-2}$，$k_{PA}=\frac{y_0}{x_0+1}$，

从而（*）式右边为 $\frac{2\frac{y_0}{x_0+1}}{1-(\frac{y_0}{x_0+1})^2}=\frac{2(x_0+1)y_0}{(x_0+1)^2-y_0^2}$，左边为 $-\frac{y_0}{x_0-2}$，

故（*）式等价于 $-\frac{y_0}{x_0-2}=\frac{2(x_0+1)y_0}{(x_0+1)^2-y_0^2}$，即为 $y_0^2-(x_0+1)^2=2(x_0+1)(x_0-2)$，

代入 $y_0^2=3x_0^2-3$，则只需 $2x_0^2-2x_0-4=2(x_0+1)(x_0-2)$，

因为上式成立，所以原命题成立.

利用上述结论，

（1）当 P，Q 都在右支时，则 $\angle PFA=2\angle PAF$，$\angle QFA=2\angle QAF$，又 $\angle PFA+\angle QFA=180°$，所以 $\angle PAF+\angle QAF=90°$，从而以 PQ 为直径的圆过 A，故所求圆的半径为 9.

（2）当点 P 在左支，点 Q 在右支时，只需证明 $\angle PFA=2(\angle PAF-90°)$，

即证 $\tan\angle PFA=\tan 2(\angle PAF-90°)$，只需证 $-k_{PF}=\frac{2k_{PA}}{1-(k_{PA})^2}$，下同（*）式的证明.

从而以 PQ 为直径的圆过 A，故所求圆的半径为 9.

综上，从而以 PQ 为直径的圆过 A，故所求圆的半径为 9.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．本小题主要考查三角函数的图象及性质，三角函数恒等变换等基础知识；考查运算求解能力，逻辑推理能力等；考查数形结合思想，函数与方程思想等；考查逻辑推理，数学运算，直观想象等核心素养；体现基础性和综合性．满分 13 分．

解：（1）因为 $f(x)$ 的图象过点 $P\left(\frac{\pi}{4},2\right)$，所以 $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=2$，…………………… 1 分

所以 $\frac{\pi}{4}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，…………………………………………………………… 2 分

又因为$|\varphi|<\pi$，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，…………………………………………………………3 分

故$f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$．…………………………………………………………………4 分

令$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得$2k\pi-\dfrac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，…………5 分

所以$f(x)$的单调递增区间是$\left[2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$．………………………6 分

（2）证明：因为$f\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)f\left(\beta+\dfrac{\pi}{4}\right)=4\sin\alpha\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)$，………………………7 分

所以$4\sin\alpha\cos\beta=3$，即$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{3}{4}$，…………………………………………8 分

因为$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{15}{16}$，…………………………………9 分

所以$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{16}$，………………………………………………………………10 分

从而$\sin\alpha\cos\beta=4\cos\alpha\sin\beta$，…………………………………………………11 分

又$\cos\alpha\neq 0$，$\cos\beta\neq 0$，所以$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{4\sin\beta}{\cos\beta}$，……………………………………12 分

所以$\tan\alpha=4\tan\beta$，证毕．………………………………………………………………13 分

16．本小题主要考查导数及其应用等基础知识；考查逻辑推理能力，运算求解能力，创新意识等；考查函数与方程思想，转化与化归思想，分类与整合思想，数形结合思想等；考查逻辑推理，数学运算，直观想象等核心素养；体现基础性和综合性．满分 15 分．

解：（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$．…………………………………………………………1 分

当$a=2$时，$f(x)=2x^2-\ln x$，$f'(x)=4x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{4x^2-1}{x}$．……………………………2 分

令$f'(x)=0$，解得$x=-\dfrac{1}{2}$（舍去），或$x=\dfrac{1}{2}$，………………………………………………3 分

当$x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上单调递减；……………………………4 分

当$x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增．…………………………5 分

因此$f(x)$的极小值为$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\ln 2$，无极大值．………………………………………6 分

（2）解法一：由$f(x)\geqslant(2-a)x$，得$ax^2-\ln x+(a-2)x\geqslant 0$，

令$g(x)=ax^2-\ln x+(a-2)x$，$x>0$，…………………………………………………………7 分

则 $g'(x)=2ax-\frac{1}{x}+a-2=\frac{2ax^2+(a-2)x-1}{x}=\frac{(2x+1)(ax-1)}{x}$，…………………………8 分

① 当 $a\leqslant 0$ 时，$g(1)=2a-2<0$，不合题意，舍去；…………………………………………9 分

② 当 $a>0$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $x=-\frac{1}{2}$（舍去），或 $x=\frac{1}{a}$，…………………………10 分

当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减；

当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增. …………………………11 分

因此 $g(x)$ 的最小值为 $g\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}+\ln a+1-\frac{2}{a}=\ln a+1-\frac{1}{a}$，…………………………12 分

令 $m(a)=\ln a+1-\frac{1}{a}$，依题意得 $m(a)\geqslant 0$.

由 $y=\ln x$ 及 $y=-\frac{1}{x}$ 的单调性可知 $m(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，…………………………13 分

又因为 $m(1)=0$，所以 $a\geqslant 1$，……………………………………………………………………14 分

所以 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$. ……………………………………………………………………15 分

解法二：由 $f(x)\geqslant(2-a)x$，得 $(x^2+x)a\geqslant 2x+\ln x$，

因为 $x^2+x>0$，所以 $a\geqslant\frac{2x+\ln x}{x^2+x}$. ……………………………………………………7 分

设 $g(x)=\frac{2x+\ln x}{x^2+x}$，$x>0$，……………………………………………………………………8 分

则 $g'(x)=\frac{(2+\frac{1}{x})\left(x^2+x\right)-(2x+\ln x)(2x+1)}{\left(x^2+x\right)^2}$ ……………………………………9 分

$=-\frac{(2x+1)(x+\ln x-1)}{\left(x^2+x\right)^2}$，………………………………………………………10 分

设 $h(x)=x+\ln x-1$，则 $h'(x)=1+\frac{1}{x}>0$，

故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，…………………………………………………………………11 分

又因为 $h(1)=0$，所以 $g'(x)=0$ 有唯一零点 1. ………………………………………………12 分

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. …………………………………13 分

从而 $g(x)$ 的最大值为 $g(1)=1$，所以 $a\geqslant 1$， ……………………………………………………14 分

所以 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$． ……………………………………………………………………15 分

解法三：由 $f\left(x\right)\geqslant\left(2-a\right)x$，得 $ax^2-\ln x+\left(a-2\right)x\geqslant 0$，

令 $g\left(x\right)=ax^2-\ln x+\left(a-2\right)x$，$x>0$， ……………………………………………………7 分

取 $x=1$，则 $g\left(1\right)=2a-2\geqslant 0$， ……………………………………………………………………8 分

解得 $a\geqslant 1$． ……………………………………………………………………………………………9 分

因为 $g\left(x\right)=ax^2-\ln x+\left(a-2\right)x=a(x^2+x)-\ln x-2x$，且 $x^2+x>0$，

所以当 $a\geqslant 1$ 时，$g\left(x\right)\geqslant x^2-\ln x-x$， ……………………………………………………10 分

令 $F\left(x\right)=x^2-\ln x-x$，则只需证 $F\left(x\right)\geqslant 0$． ………………………………………………11 分

下面证明 $F\left(x\right)\geqslant 0$．

$F'\left(x\right)=2x-\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{\left(2x+1\right)\left(x-1\right)}{x}$， ………………………………………………………12 分

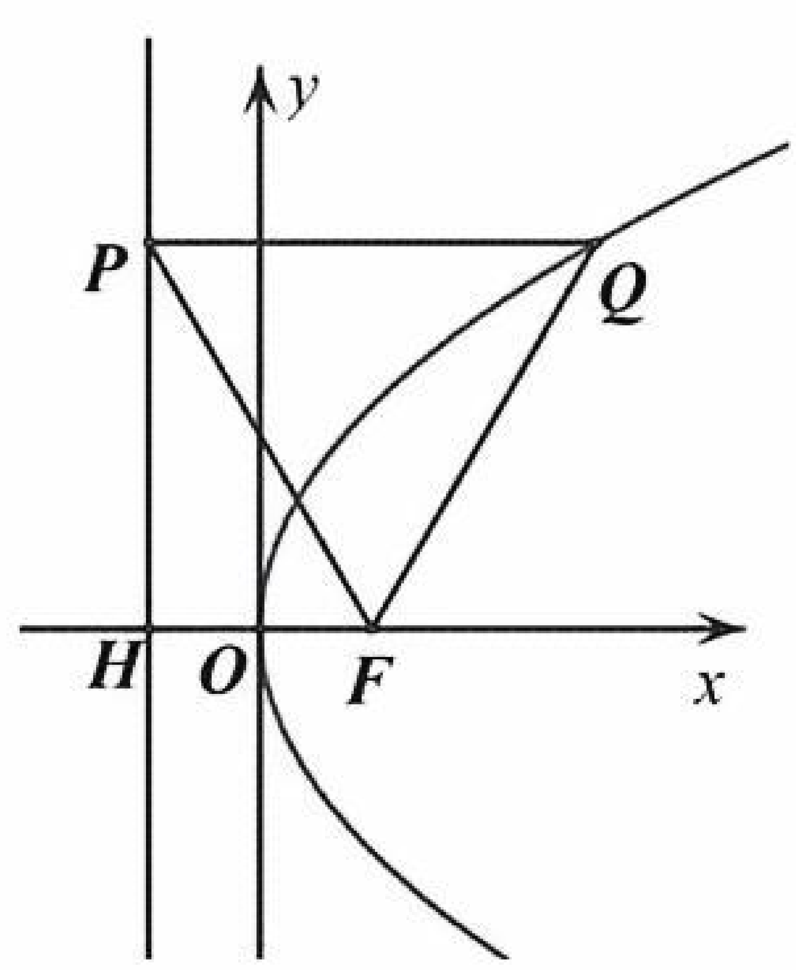
当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$F'\left(x\right)<0$，$F\left(x\right)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时，$F'\left(x\right)>0$，$F\left(x\right)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增． ……………………………13 分

因此 $F\left(x\right)\geqslant F\left(1\right)=0$，证毕． ……………………………………………………………………14 分

综上所述，a 的取值范围为 $[1,+\infty)$． ……………………………………………………………15 分

17．本小题主要考查抛物线的标准方程及简单几何性质，直线与抛物线的位置关系等基础知识；考查逻辑推理能力，运算求解能力等；考查转化与化归思想，数形结合思想，函数与方程思想等；考查逻辑推理，数学运算，直观想象等核心素养；体现基础性和综合性．满分15 分．



解法一：（1）依题意可知 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，$l:x=-\dfrac{p}{2}$． ……………1 分

设直线 l 与 x 轴交于点 H，则 $|PH|=2\sqrt{3}$， ……………2 分

由抛物线的定义可知 $|PQ|=|QF|$， ……………3 分

又因为$|FP|=|FQ|$，所以$\triangle PFQ$为等边三角形，…………………………………………………………4 分

又因为$PQ /\!/ HF$，

所以$\angle PFH=\angle FPQ=60^\circ$，…………………………………………………………………………………5 分

在$\mathbf{Rt}\triangle PHF$中，由$\tan\angle PFH=\dfrac{|PH|}{|HF|}$，得$|HF|=2$，

所以$p=2$．……6 分

（2）由（1）得抛物线方程为$y^2=4x$．

依题意知直线m的斜率不为0，可设$m:x=ty+4$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，………7 分

由方程组$\begin{cases}x=ty+4,\\ y^2=4x\end{cases}$消去$x$，得$y^2-4ty-16=0$，……………………………………8 分

则$\Delta=16t^2+64>0$，$y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-16$，………………………………………………9 分

所以$|AD|\cdot|BD|=\sqrt{1+t^2}\,|y_1|\cdot\sqrt{1+t^2}\,|y_2|=(1+t^2)|\,y_1y_2|=16(1+t^2)$，……………………10 分

故$16(1+t^2)=24$，得$t^2=\dfrac{1}{2}$，………………………………………………………………………11 分

又因为$\dfrac{(y_1+y_2)^2}{y_1y_2}=-t^2$，所以$\dfrac{{y_1}^2+2y_1y_2+{y_2}^2}{y_1y_2}=\dfrac{y_1}{y_2}+2+\dfrac{y_2}{y_1}=-\dfrac{1}{2}$，……………………12 分

从而$\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)^2+\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)+1=0$，………………………………………………………………13 分

解得$\dfrac{y_1}{y_2}=-2$，或$\dfrac{y_1}{y_2}=-\dfrac{1}{2}$，………………………………………………………………14 分

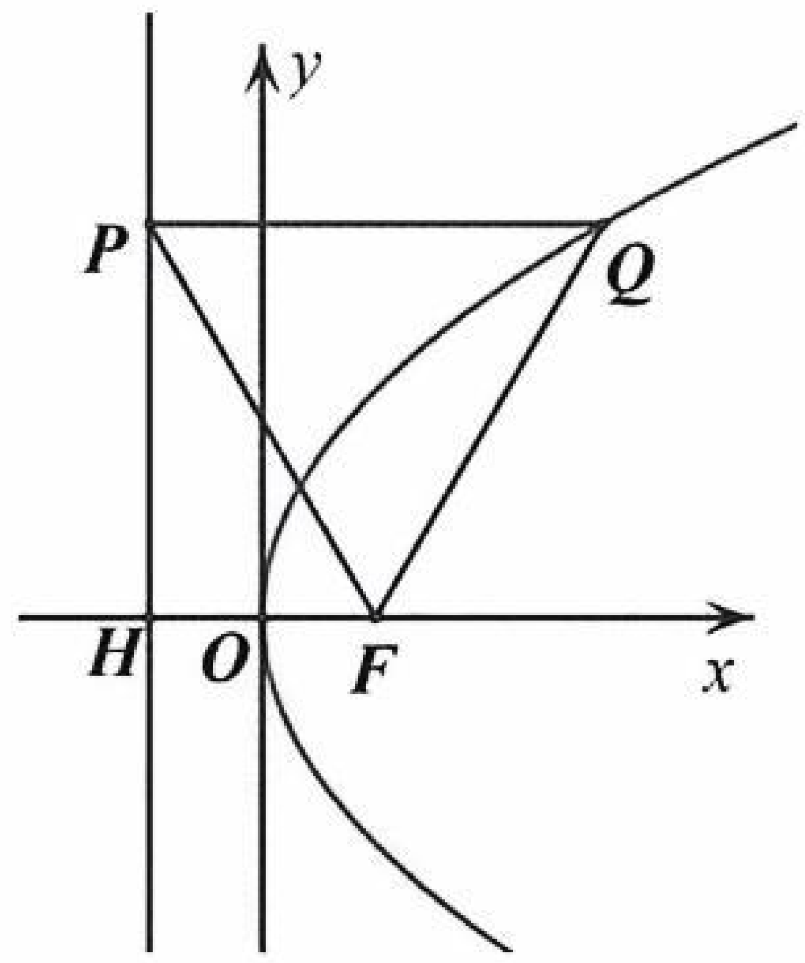
因为$\dfrac{|AD|}{|BD|}=\dfrac{|y_1|}{|y_2|}$，

所以$\dfrac{|AD|}{|BD|}$的值为2或$\dfrac{1}{2}$．……………………………………………………………………15 分

解法二：（1）依题意可知$F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，$l:x=-\dfrac{p}{2}$．………………………………………………1 分

设直线l与x轴交于点H，则$|PH|=2\sqrt{3}$，……………………………………………………2 分

因为$|FP|=|FQ|$，$PQ// HF$，



所以$x_P+x_Q=2x_F$，…………………… 3 分

所以$x_Q=\frac{3p}{2}$，从而$Q\left(\frac{3}{2}p,2\sqrt{3}\right)$，…………………… 4 分

代入$y^2=2px$，得$12=3p^2$，…………………… 5 分

又$p>0$，得$p=2$．…………………… 6 分

（2）由（1）得抛物线方程为$y^2=4x$．

依题意知直线m的斜率不为0，可设$m:x=ty+4$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，………7 分

由方程组$\begin{cases}x=ty+4,\\ y^2=4x\end{cases}$消去$x$，得$y^2-4ty-16=0$，…………………… 8 分

则$\Delta=16t^2+64>0$，$y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-16$，…………………… 9 分

所以$|AD|\cdot|BD|=\sqrt{1+t^2}\,|y_1|\cdot\sqrt{1+t^2}\,|y_2|=(1+t^2)|y_1y_2|=16(1+t^2)$，…………………… 10 分

故$16(1+t^2)=24$，得$t^2=\frac{1}{2}$，…………………… 11 分

根据对称性，不妨取$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$y^2-2\sqrt{2}y-16=0$，…………………… 12 分

解得$y=4\sqrt{2}$，或$y=-2\sqrt{2}$，…………………… 13 分

从而$\frac{y_1}{y_2}=-2$，或$\frac{y_1}{y_2}=-\frac{1}{2}$，…………………… 14 分

因为$\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|y_1|}{|y_2|}$，

所以$\frac{|AD|}{|BD|}$的值为2或$\frac{1}{2}$．…………………… 15 分

18．本小题主要考查简单几何体的体积，直线与直线，直线与平面，空间角等基础知识；考查空间想象能力，逻辑推理能力，运算求解能力，创新意识等；考查转化与化归思想，数形结合思想，函数与方程思想等；考查逻辑推理，数学运算，直观想象，数学抽象等核心素养；体现基础性、综合性和创新性．满分 17 分．

解法一：（1）$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AE}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}$， ……………………………… 1 分

又 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times2\times\cos\alpha=2\cos\alpha$， ……………………………………………… 2 分

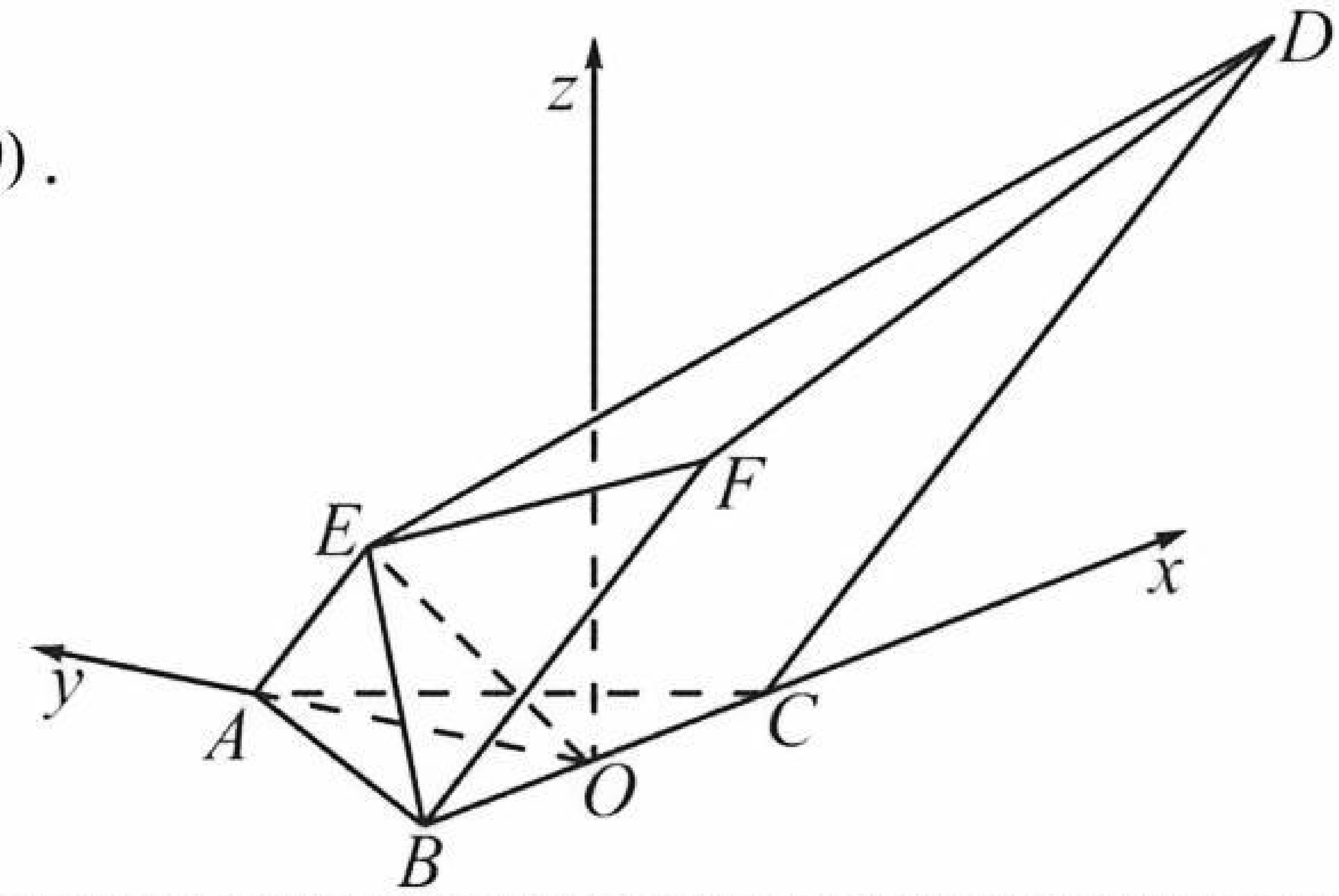
同理 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=2\cos\alpha$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}=0$， ……………………………………… 3 分

故 $AE\perp BC$． ……………………………………………………………………………… 4 分

（2）取 BC 中点 O，由 $AB=AC$，可知 $AO\perp BC$，

由（1）知 $AE\perp BC$，又 $AE\cap AO=A$，所以 $BC\perp$ 平面 AOE．

如图所示，以 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OA}$ 的方向为 x 轴、y 轴的正方向，并均以 1 为单位长度，建立空间直角坐标系， ………………………………………………………………… 5 分



则 $A(0,\sqrt{3},0)$，$B(-1,0,0)$，$C(1,0,0)$．

设 $\angle OAE=\theta$，

则 $E(0,\sqrt{3}-\cos\theta,\sin\theta)$，

从而 $\overrightarrow{AE}=(0,-\cos\theta,\sin\theta)$，

$\overrightarrow{AB}=(-1,-\sqrt{3},0)$， ……………………………………………………………………… 6 分

又 $\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\rangle=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|}=\dfrac{1}{2}$，

解得 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，从而 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$， ……………………………………………… 7 分

所以 $E(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3})$，$\overrightarrow{BE}=(1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3})$．

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 $BCDF$ 的法向量，

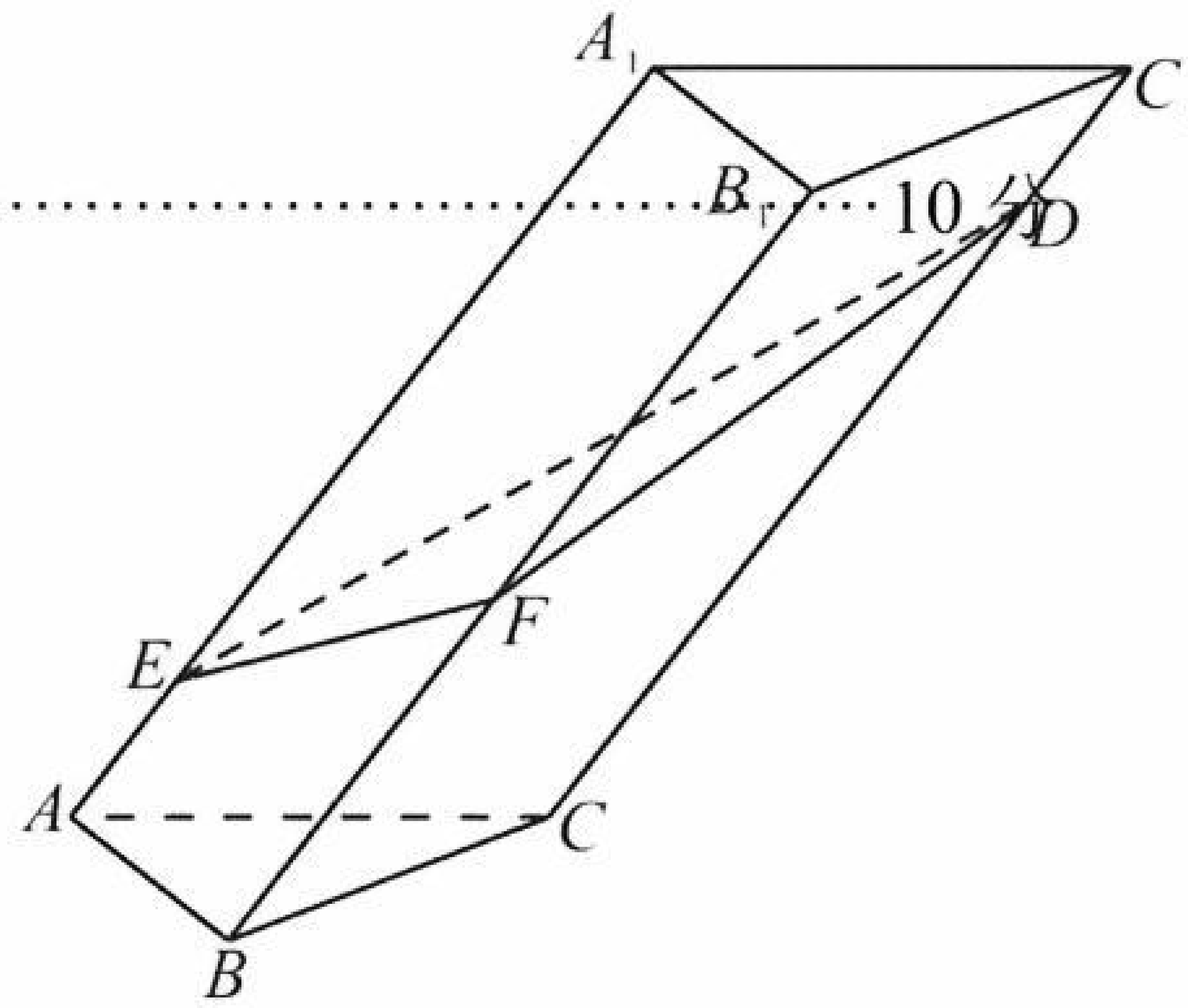
$\overrightarrow{AE}=(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3})$，$\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$， ……………………………………………… 8 分

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+\dfrac{\sqrt{6}}{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=2x=0.\end{cases}$

取 $y=\sqrt{2}$，则 $x=0$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{2},1)$ 是平面 $BCDF$ 的一个法向量． ……… 9 分

设直线 BE 与平面 $BCDF$ 所成角为 φ，

则 $\sin\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{BE}\bullet \boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BE}\right|\left|\boldsymbol{n}\right|}=\dfrac{\left|0+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right|}{\sqrt{1+\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}}\times\sqrt{2+1}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，



所以直线 BE 与平面 $BCDF$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………10 分

（3）同（2）中的建系方法，可得 $A(0,2\cos\dfrac{\beta}{2},0)$，

$B(-2\sin\dfrac{\beta}{2},0,0)$， $E(0,2\cos\dfrac{\beta}{2}-\cos\theta,\sin\theta)$，

$\overrightarrow{AB}=(-2\sin\dfrac{\beta}{2},-2\cos\dfrac{\beta}{2},0)$， $\overrightarrow{AE}=(0,-\cos\theta,\sin\theta)$，

从而 $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AE}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AE}\right|}=\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\theta$，即 $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\dfrac{\beta}{2}}$. ……………………………………11 分

如图所示，将该多面体补成侧棱长为6的三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$， ……………………12 分

设该多面体的高为 h，则 $h=6\sin\theta$，

所以该多面体的体积 $V=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}\cdot h=6\sin\beta\sin\theta=6\sin\beta\sqrt{1-\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\dfrac{\beta}{2}}}$， ……………13 分

又因为 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $V=6\sin\beta\sqrt{1-4\sin^2\dfrac{\beta}{2}}=6\sin\beta\sqrt{2\cos\beta-1}=6\sqrt{(2\cos\beta-1)(1-\cos^2\beta)}$. ………14 分

令 $t=\cos\beta$，则 $t\in(\dfrac{1}{2},1)$，记 $f(t)=(2t-1)(1-t^2)$，

所以 $f'(t)=-6t^2+2t+2$， ……………………………………………………………15 分

令 $f'(t)=0$，解得 $t_1=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$， $t_2=\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$（舍去），

当 $t\in(\dfrac{1}{2},t_1)$ 时， $f'(t)>0$， $f(t)$ 在 $(\dfrac{1}{2},t_1)$ 上单调递增；

当 $t\in(t_1,1)$ 时， $f'(t)<0$， $f(t)$ 在 $(t_1,1)$ 上单调递减.

所以当 $t=t_1$ 时， $f(t)$ 有最大值，此时 V 也有最大值， ……………………………16 分

所以当该五面体的体积取到最大值时， $\cos\beta=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$. ………………………17 分

解法二：（1）取 BC 中点 O，连接 EO， AO， EB， EC.

由 $AE=AE$， $AB=AC$， $\angle EAB=\angle EAC$，得 $\triangle EAB\cong\triangle EAC$，

所以 $EB=EC$， …………1分

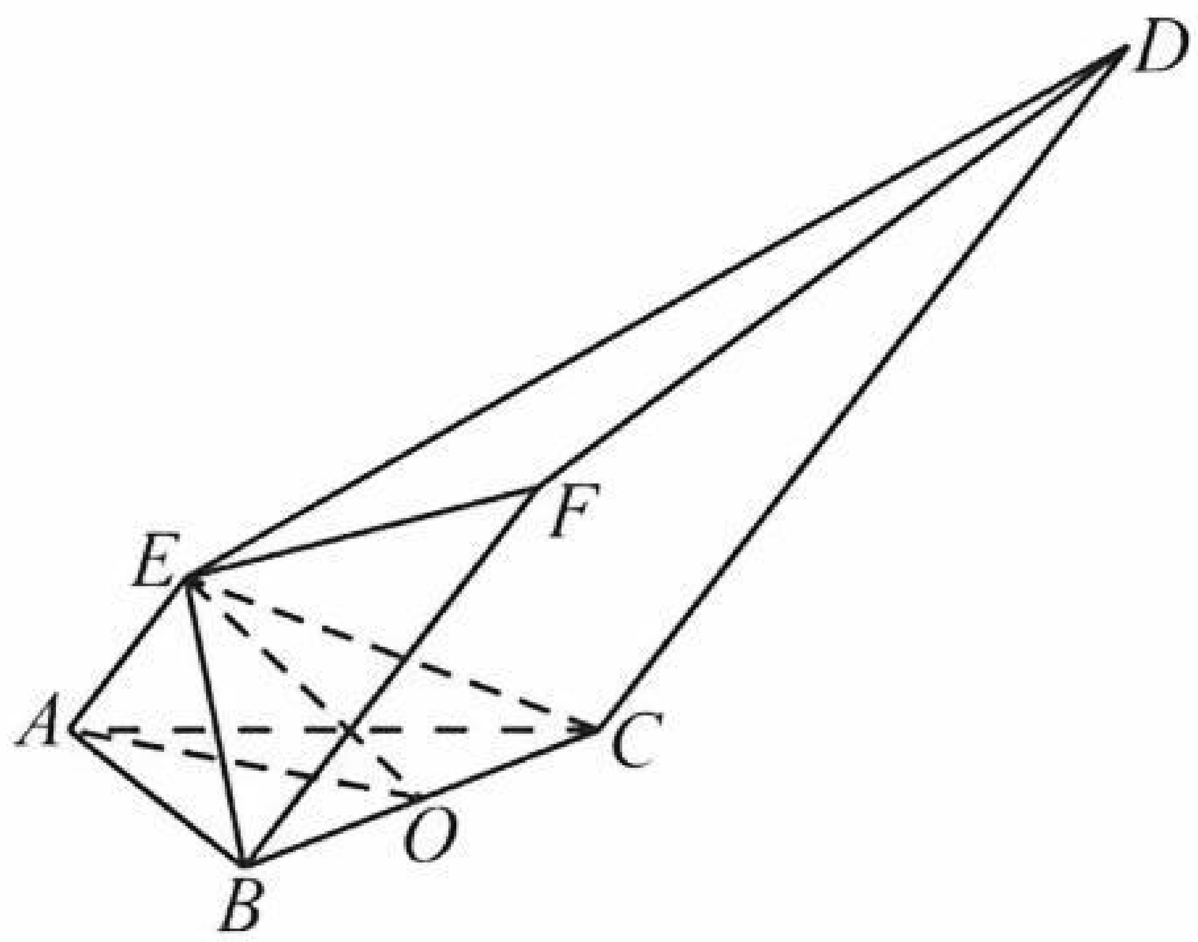
故 $EO\perp BC$． …………2分

在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$，

得 $AO\perp BC$，又 $AO\cap EO=O$，

所以 $BC\perp$ 平面 AOE， …………3分

又 $AE\subset$ 平面 AOE，所以 $AE\perp BC$． …………4分



（2）当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，在 $\triangle ABE$ 中，由余弦定理得

$BE^2=AB^2+AE^2-2AB\cdot AE\cos\angle EAB=4+1-2\times2\times1\times\frac{1}{2}=3$， …………………………5分

所以 $BE=\sqrt{3}$， $AB^2=AE^2+BE^2$，从而 $AE\perp BE$． ……………………………………6分

又由（1）知 $AE\perp BC$， $BE\cap BC=B$，所以 $AE\perp$ 平面 BCE，

所以 $AE\perp EO$，又由 $AE/\!/BF$，所以 $BF\perp EO$，

又 $BC\perp EO$， $BC\cap BF=B$，所以 $EO\perp$ 平面 $BCDF$， ……………………………………7分

所以 $\angle EBO$ 为直线 BE 与平面 $BCDF$ 所成的角． ……………………………………8分

当 $\beta=\frac{\pi}{3}$ 时， $\triangle ABC$ 为等边三角形，故 $BO=\frac{1}{2}BC=1$，

所以 $\cos\angle EBO=\frac{BO}{BE}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，从而 $\sin\angle EBO=\frac{\sqrt{6}}{3}$， ……………………………………9分

所以直线 BE 与平面 $BCDF$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$． ……………………………………10分

（3）过 E 作 $EH\perp AO$ 于点 H，

由（1）可知 $BC\perp$ 平面 AOE，从而 $BC\perp EH$，

又 $AO\cap BC=O$，所以 $EH\perp$ 平面 ABC． ……………………………………11分

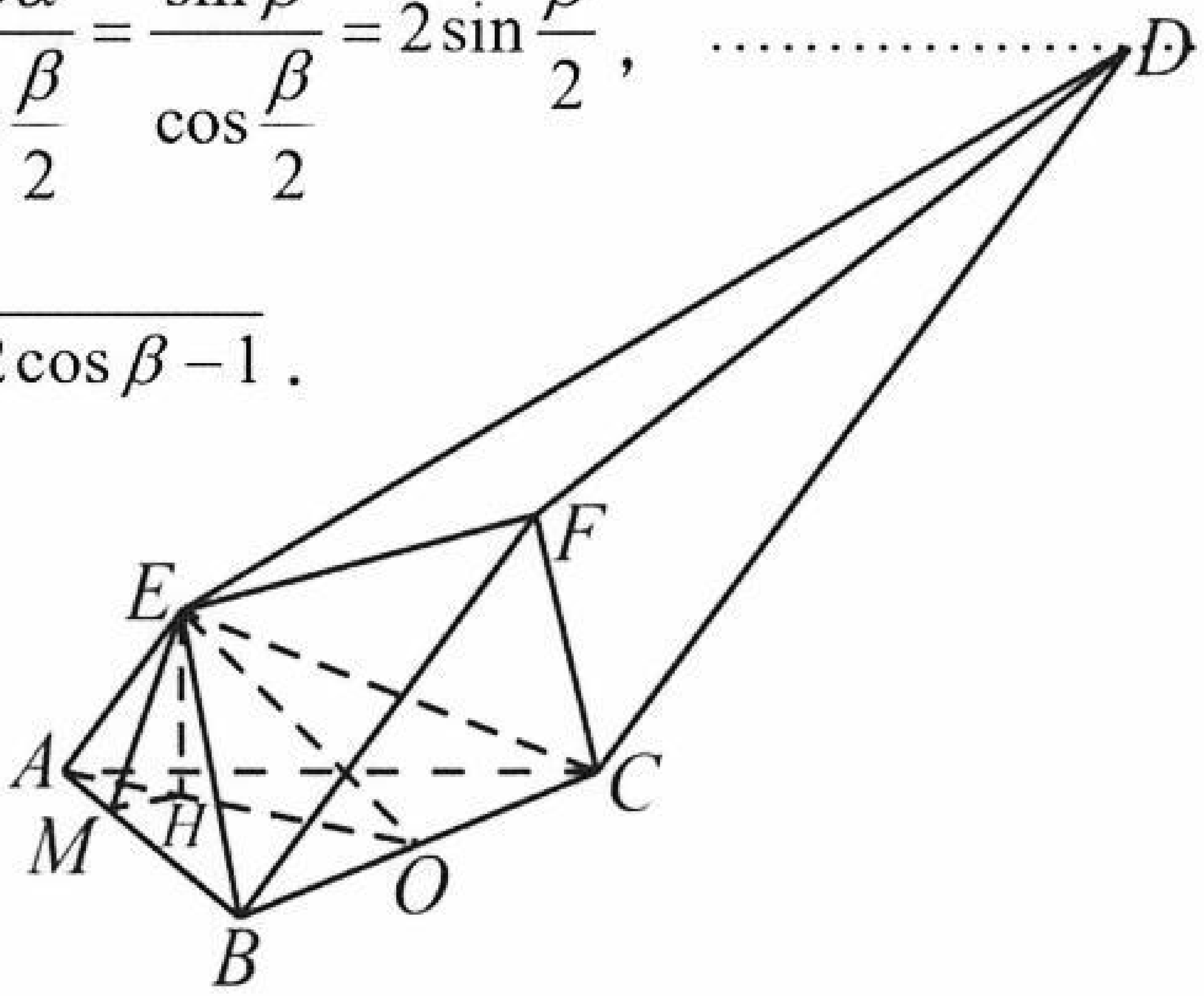
过 H 作 $HM\perp AB$ 于 M，连接 EH，可知 $EM\perp AB$，

$\cos\angle EAH=\frac{AH}{AE}=\frac{\frac{AM}{AE}}{\frac{AM}{AH}}=\frac{\cos\angle BAE}{\cos\angle BAO}=\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\beta}{\cos\frac{\beta}{2}}=2\sin\frac{\beta}{2}$， …………12分

故 $EH=EA\cdot\sin\angle EAH=\sqrt{1-4\sin^2\frac{\beta}{2}}=\sqrt{2\cos\beta-1}$．

连接 CF，因为 $AE/\!/BF$，

所以 $\frac{V_{A-BCE}}{V_{F-BCE}}=\frac{AE}{BF}=\frac{1}{3}$，



又因为$BF // CD$，所以$\dfrac{V_{B-FCE}}{V_{D-FCE}}=\dfrac{BF}{CD}=\dfrac{3}{5}$，

从而$V_{D-FCE}=\dfrac{5}{3}V_{B-FCE}=5V_{A-BCE}=5V_{E-ABC}$，

故该五面体的体积$V=9V_{E-ABC}$， ………………………………………………………… 13分

又$V_{E-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot EH=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sin\beta\sqrt{2\cos\beta-1}=\dfrac{2}{3}\sin\beta\sqrt{2\cos\beta-1}$

$=\dfrac{2}{3}\sqrt{\sin^2\beta\left(2\cos\beta-1\right)}=\dfrac{2}{3}\sqrt{\left(1-\cos^2\beta\right)\left(2\cos\beta-1\right)}$，

因此该多面体的体积$V=6\sqrt{\left(1-\cos^2\beta\right)\left(2\cos\beta-1\right)}$. ……………………………… 14分

下同解法一. ………………………………………………………………………………………… 17分

19．本小题主要考查条件概率与全概率公式，分布列与数学期望，等差数列等基础知识；考查逻辑推理能力，运算求解能力，应用意识，创新意识等；考查统计与概率思想，转化与化归思想等；考查逻辑推理，数学运算，数学抽象，数学建模等核心素养；体现基础性、综合性和创新性．满分17分．

解：（1）由题意可知$a_0=1$，$a_N=0$． ………………………………………………………… 2分

由全概率公式，得$a_k=pa_{k-1}+\left(1-p\right)a_{k+1}$，$1\leqslant k\leqslant N-1$．……………………………… 4分

（2）当$p=\dfrac{1}{2}$时，$a_k=\dfrac{1}{2}a_{k-1}+\dfrac{1}{2}a_{k+1}$，$1\leqslant k\leqslant N-1$，

即$a_{k+1}-a_k=a_k-a_{k-1}$，故$\{a_k\}$为等差数列. ……………………………………………… 5分

设通项公式$a_k=a_0+k\cdot d$，

由$\begin{cases}a_0=1, \\ a_N=a_0+N\cdot d=0,\end{cases}$得$d=-\dfrac{1}{N}$， ……………………………………………… 6分

所以$a_k=1-\dfrac{k}{N}$． …………………………………………………………………………… 7分

又因为系统数据块的初始数量为M，

所以系统最终以“成功复位”状态终止的概率为$a_M=1-\dfrac{M}{N}$，

从而系统最终以“内存溢出”状态终止的概率为$1-a_M=\dfrac{M}{N}$.

令$(1-\dfrac{M}{N})-\dfrac{M}{N}>0$，解得$M<\dfrac{N}{2}$， ………………………………………………… 8分

所以当$0\leqslant M<\dfrac{N}{2}$时，“成功复位”的概率大于“内存溢出”的概率；

同理可得，当 $M=\dfrac{N}{2}$ 时，"成功复位"的概率等于"内存溢出"的概率；

当 $\dfrac{N}{2}<M\leqslant N$ 时，"成功复位"的概率小于"内存溢出"的概率. ……………………9分

（3）解法一：设 ξ_i 为第 i 步数据块的数量的变化值，ξ_1，ξ_2，…，ξ_n 相互独立，且分布列均为 $P(\xi_i=-1)=p$，$P(\xi_i=1)=1-p$. ……………………………………………10分

由题意可知，$X_{n+1}=X_n+\xi_{n+1}$，……………………………………………………11分

所以 $E\left(\lambda^{X_{n+1}}\right)=E\left(\lambda^{X_n+\xi_{n+1}}\right)=E\left(\lambda^{X_n}\cdot\lambda^{\xi_{n+1}}\right)$. ……………………………… 12分

因为每步操作相互独立，所以第 $n+1$ 步的变化值 ξ_{n+1} 与之前的累积状态 X_n 相互独立，

从而随机变量 λ^{X_n} 与 $\lambda^{\xi_{n+1}}$ 相互独立，则 $E\left(\lambda^{X_n}\cdot\lambda^{\xi_{n+1}}\right)=E\left(\lambda^{X_n}\right)\cdot E\left(\lambda^{\xi_{n+1}}\right)$，………… 13分

所以 $E\left(\lambda^{X_{n+1}}\right)=E\left(\lambda^{X_n}\right)\cdot E\left(\lambda^{\xi_{n+1}}\right)$. ……………………………………… 14分

因为 $E\left(\lambda^{X_n}\right)$ 与 n 无关，所以 $E\left(\lambda^{X_{n+1}}\right)=E\left(\lambda^{X_n}\right)$ 恒成立，……………………… 15分

事实上，$E\left(\lambda^{X_{n+1}}\right)=E\left(\lambda^{X_n}\right)=E\left(\lambda^{X_{n-1}}\right)=\cdots=E\left(\lambda^{X_0}\right)=E\left(\lambda^{M}\right)$，故只需 $E\left(\lambda^{\xi_{n+1}}\right)=1$，

由 ξ_i 的分布列可知 $p\cdot\lambda^{-1}+(1-p)\cdot\lambda^{1}=1$，………………………………………… 16分

因式分解得 $(\lambda-1)\left[(1-p)\lambda-p\right]=0$，又 $\lambda\neq 1$，

所以 $\lambda=\dfrac{p}{1-p}$.

所以当 $p\neq\dfrac{1}{2}$ 时，若 $E\left(\lambda^{X_n}\right)$ 与 n 无关，则 $\lambda=\dfrac{p}{1-p}$. ……………………………… 17分

解法二：记系统运行 n 步的过程中，执行写入操作的次数为 Y. …………………… 10分

因为每步操作相互独立，所以 $Y\sim B(n，1-p)$. ……………………………………11分

因为 $X_n=M+Y-(n-Y)=M-n+2Y$，

所以 $\lambda^{X_n}=\lambda^{M-n+2Y}=\lambda^{M-n}\cdot(\lambda^2)^Y$，

所以 $E\left(\lambda^{X_n}\right)=\lambda^{M-n}\cdot E\left(\lambda^{2Y}\right)=\lambda^{M-n}\cdot E\left(\left(\lambda^2\right)^Y\right)$. ……………………………………… 12分

随机变量 $(\lambda^2)^Y$ 的可能取值为 $(\lambda^2)^0$，$(\lambda^2)^1$，…，$(\lambda^2)^n$. ………………………… 13分

因为 $P\left((\lambda^2)^Y=(\lambda^2)^r\right)=P(Y=r)=C_n^r(1-p)^r p^{n-r}$，$r=0$，1，2，…，$n$，……… 14分

所以 $E\left(\left(\lambda^2\right)^Y\right)=\sum\limits_{r=0}^{n}\left[\left(\lambda^2\right)^r\cdot P(Y=r)\right]=\sum\limits_{r=0}^{n}\left[C_n^r\cdot\left(\lambda^2\right)^r\cdot(1-p)^r\cdot p^{n-r}\right]=\left[\lambda^2(1-p)+p\right]^n$，

…………………………………………………………………………………………… 15分

从而$E\left(\lambda^{X_n}\right)=\lambda^{M-n}\cdot\left[\lambda^2(1-p)+p\right]^n=\lambda^M\cdot\left[\lambda(1-p)+\dfrac{p}{\lambda}\right]^n$. …………………………… 16分

要使得$E\left(\lambda^{X_n}\right)$与$n$无关，又$\lambda^M$是常数，$\lambda(1-p)+\dfrac{p}{\lambda}>0$，

所以$\lambda(1-p)+\dfrac{p}{\lambda}=1$，解得$\lambda=\dfrac{p}{1-p}$.

所以当$p\neq\dfrac{1}{2}$时，若$E\left(\lambda^{X_n}\right)$与$n$无关，则$\lambda=\dfrac{p}{1-p}$. ………………………………… 17分