保密★使用前

泉州市2025届高中毕业班质量监测（二）

2025. 01

高 三 数 学

本试卷共19题，满分150分，共8页。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 考生作答时，将答案答在答题卡上。请按照题号在各题的答题区域（黑色线框）内作答，超出答题区域书写的答案无效。在草稿纸、试题卷上答题无效。

3. 选择题答案使用2B铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号；非选择题答案使用0.5毫米的黑色中性（签字）笔或碳素笔书写，字体工整、笔迹清楚。

4. 保持答题卡卡面清洁，不折叠、不破损。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知向量$\boldsymbol{a}=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，$\boldsymbol{b}=(x,x+1)$，且$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则$x=$

A. -2　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. 1

2. 设集合$A=\{a^2-a-2,1,2\}$，$B=\{0,a+2\}$，若$B\subseteq A$，则$a=$

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. -1

3. 已知$x\log_2 3=1$，则$3^x+3^{-x}=$

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{10}{3}$　　D. $\frac{17}{4}$

4. 已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)+1$为奇函数，且$f(-1)=-2$，则$f(1)=$

A. -2　　B. 0　　C. 1　　D. 2

5. $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ}-\frac{1}{\cos 20^\circ}=$

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

6. 已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 4，$\triangle ABC$ 的内切圆和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外接圆的半径均为 1，则该正三棱台的体积为

A. $7\sqrt{3}$　　B. $14\sqrt{3}$　　C. $21\sqrt{3}$　　D. $28\sqrt{3}$

7. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在 C 的渐近线上，PF_2 与 x 轴垂直，点 Q 在 x 轴上，$PF_1\perp PQ$，若 $|F_1F_2|=2|F_2Q|$，则 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

8. 已知函数 $f(x)=|\ln x|-ax$ 有 3 个零点，则 a 的取值范围是

A. $(0,\dfrac{1}{e^2})$　　B. $(0,\dfrac{1}{2e})$　　C. $(0,\dfrac{1}{e})$　　D. $(0,1)$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 将函数 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则

A. $g(x)$ 的最小正周期为 π

B. $g(\dfrac{\pi}{4}-x)=g(\dfrac{\pi}{4}+x)$

C. $g(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{12}]$ 上单调递减

D. $g(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{12}]$ 上的取值范围为 $[-1,0]$

10. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n．若 $a_{10}=1$，$S_{10}-S_7=7$，则

A. 数列 $\{\log_2 a_n\}$ 为等差数列　　B. $a_1=1024$

C. $S_n<1024$　　D. T_n 的最大值为 2^{45}

11．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 M 是 CD 的中点，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AA_1}+\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$（$\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$），点 F 在 AP 上，$BF\perp AP$，则下列说法正确的是

A．若 $\lambda=1$，$\mu=0$，则 $AP//$ 平面 BC_1M

B．若 $\lambda+2\mu=1$，则 $AM\perp BP$

C．若 $\lambda+\mu=1$，则二面角 $F-BD-A$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D．若 $\lambda=\mu$，则三棱锥 $F-ABD$ 的体积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．已知复数 $z=\frac{-2+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+1-\mathrm{i}$，则 $|z|=$ ________．

13．写出一个与直线 $y=\sqrt{3}x$ 和 x 轴都相切且半径为1的圆的标准方程________.

14．在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=2\sqrt{13}$，$AC=AD$，$\cos\angle CAB=\frac{4}{5}$，则 $AC=$ __；若点 E 是 CD 的中点，则当 BE 取得最大值时，四边形 $ABCD$ 的面积为________．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(x^2+a)(a<0)$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线与坐标轴所围成的三角形的面积为 $\frac{3}{2}$.

（1）求 a；

（2）求 $f(x)$ 在区间 $[-4,2]$ 上的最大值和最小值.

16.（15 分）

如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=3$，点 E,F 分别在边 AD,BC 上，且 $AE=CF=1$．将四边形 $EFCD$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFPQ$，使得 $QB=\sqrt{6}$，如图 2 所示．

（1）证明：$BE\perp$ 平面 $EFPQ$；

（2）求直线 QB 与平面 PBF 所成角的正弦值．

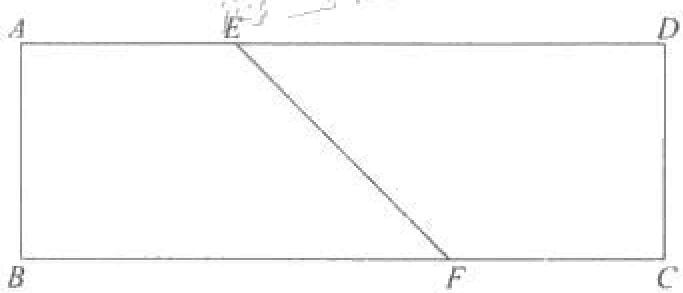


图 1

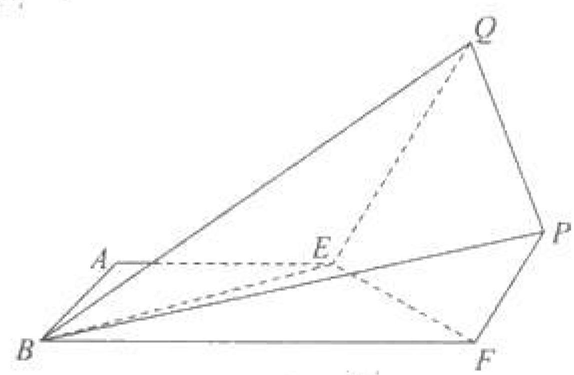


图 2

17.（15 分）

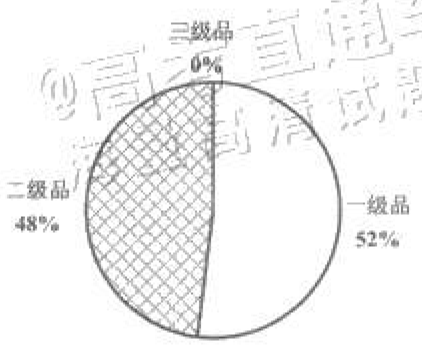
已知点 A,B 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的上、下顶点，点 $M(2\lambda,0)$，$N(2,\lambda-1)$，其中 $\lambda\in\mathbf{R}$，且 $\lambda\neq1$，直线 AM 与 BN 交于点 P．

（1）证明：点 P 在 C 上；

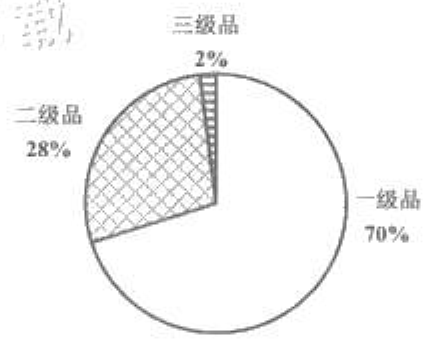
（2）若直线 MN 交 C 于 S，T 两点，且 $|MS|\cdot|MT|=\dfrac{15}{8}$，求 $|ST|$．

18.（17分）

随机数广泛应用于数据加密、安全通信、金融等领域．计算机中的随机数是由算法产生的，其“随机性”的优劣取决于所采用的算法．某工厂计划生产一种随机数发生器，这种发生器的显示屏能显示1，2，3，4中的一个数字，每按一次数字更新按钮后，显示屏上的数字将等可能地更新为另三个数字中的一个．在试生产阶段，采用两种不同算法，生产出相应算法的甲、乙两种随机数发生器．为评估两种算法的优劣，从这两种随机数发生器中随机抽取150件进行检验，得到数据饼图如下：



甲种发生器



乙种发生器

（1）已知这150件发生器中，乙种发生器的三级品为2件．在答题卡中填写列联表；依据小概率值$\alpha = 0.05$的χ^2独立性检验，能否认为甲、乙两种发生器的一级品率存在差异？

	一级品	非一级品	合计
甲			
乙			
合计			

（2）若发生器显示屏的初始显示数字为1，记按n次数字更新按钮后得到的数字为X_n（$n \in \mathbf{N}^*$），$P(X_n = 1) = p_n$．

（i）求p_1，p_2；

（ii）检测一个发生器是否为一级品的方案为：每件被测发生器需进行100轮测试，每轮测试共按10次数字更新按钮，f表示100轮测试得到“$X_{10} = 1$”的频率，规定满足$|f - p_{10}| \leqslant 0.0001$的被测发生器为一级品．若某件发生器经100轮测试后得到$f = 0.25$，能否判断该发生器为一级品？

附：$\chi^2 = \dfrac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

．

19.（17分）

将数组 $A_n:1,2,\cdots,n$（$n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2$）的某一个全排列记为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，若满足：$\forall i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，$(a_i+a_{i+1})(a_{i+1}-a_i-1)$ 能被3整除，则称 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 A_n 的一个“好排列”．例如：A_2 的“好排列”共有两个：$(1,2)$，$(2,1)$．

（1）写出 A_3 的所有“好排列”；

（2）若 A_n 中“好排列”至少有4个，求 n 的取值范围；

（3）记 A_n 的“好排列”个数为 T_n，证明：$T_{3n+2}=(3n+2)\cdot T_{3n+1}$．

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．$\sqrt{2}$．

13． $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=1$ ， 或 $(x+\sqrt{3})^2+(y+1)^2=1$ ， 或 $(x-\dfrac{\sqrt{3}}{3})^2+(y+1)^2=1$ ， 或 $(x+\dfrac{\sqrt{3}}{3})^2+(y-1)^2=1$．

14．10（2 分），52（3 分）．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15．（13 分）

【命题意图】本题主要考查基本初等函数、函数的单调性、导数的几何意义、导数的应用等基础知识；考查运算求解、推理论证等能力；考查化归与转化、数形结合、函数与方程等思想；体现基础性、综合性与应用性，导向对数学运算、直观想象、逻辑推理等核心素养的关注．

【试题解析】**解：**（1）由 $f(x)=e^x(x^2+a)$ 得 $f'(x)=e^x(x^2+2x+a)$， ……1 分

所以 $f'(0)=a$， ……2 分

又 $f(0)=a$， ……3 分

所以 $f(x)$ 在点 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程为 $y-f(0)=f'(0)(x-0)$，即 $y=ax+a$． ……4 分

当 $x=0$ 时，$y=a$；当 $y=0$ 时，$x=-1$． ……5 分

因为 $a<0$，所以 $\dfrac{1}{2}\times(-a)\times1=\dfrac{3}{2}$，所以 $a=-3$． ……6 分

（2）由（1）得 $f(x)=e^x(x^2-3)$，$f'(x)=e^x(x^2+2x-3)=e^x(x+3)(x-1)$． ……7 分

由 $f'(x)=0$ 得 $x=-3$ 或 $x=1$． ……8 分

当 $-4\le x<-3$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $-3<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $1<x\le 2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增． ……10 分（写出一个给 1 分，三个都对给 2 分）

因为 $f(-4)=\dfrac{13}{e^4}$，$f(-3)=\dfrac{6}{e^3}$， ……11 分

$f(1)=-2e$，$f(2)=e^2$，且 $e^2>\dfrac{6}{e^3}>\dfrac{13}{e^4}>-2e$， ……12 分（四个数没比较大小不扣分）

所以 $f(x)$ 在 $[-4,\ 2]$ 上的最大值为 $f(2)=e^2$，最小值为 $f(1)=-2e$． ……13 分

16．（15分）

【命题意图】本题主要考查多面体的体积、直线与平面的位置关系、直线与平面所成角等基础知识；考查空间想象、推理论证、运算求解等能力；考查化归与转化等思想；体现基础性和综合性，导向对发展直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养的关注．

【试题解析】**解法一**：（1）$\because AB=AE=1$，$BF=2$，

$\therefore BE=EF=\sqrt{2}$，……………………………………1分

$\therefore BE^2+EF^2=BF^2$，

$\therefore BE\perp EF$．……………………………………2分

$\because QE=2$，$QB=\sqrt{6}$，

$\therefore BE^2+QE^2=QB^2$，……………………………………3分

$\therefore BE\perp QE$，……………………………………4分

又EF，$QE\subset$平面$EFPQ$，

$EF\cap QE=E$，……………………5分（线在面内没写不扣分，相交没写扣一分）

$\therefore BE\perp$平面$EFPQ$．……………………………………6分

（2）连结QF，

$\because QF=EF=\sqrt{2}$，$QE=2$，

$\therefore QF^2+EF^2=QE^2$，

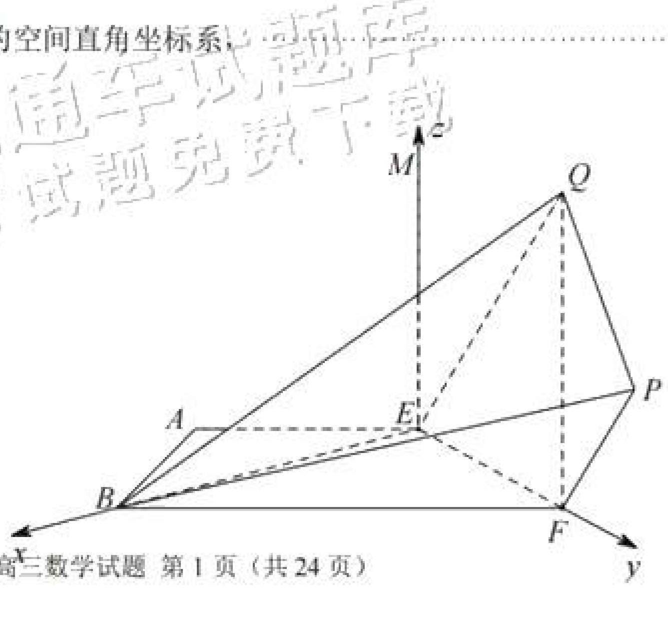
$\therefore QF\perp EF$．……………………………………7分

过点E作$EM\parallel QF$，则$EM\perp EF$．

又$BE\perp$平面$EFPQ$，则$BE\perp EF$，$BE\perp EM$，$EF\perp EM$，

以E为原点，EB，EF，EM所在直线分别为x轴、y轴、z轴，

建立如下图所示的空间直角坐标系，……………………………………8分



则 $B(\sqrt{2},0,0)$，$F(0,\sqrt{2},0)$，$P(0,\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$Q(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$，……………………9 分

$\overrightarrow{QB}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BF}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{PF}=(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$．……………………10 分

设平面 PBF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{PF}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0,\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{\sqrt{2}}{2}z=0.\end{cases}$ ……………………11 分

取 $x=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$．……………………12 分

设直线 QB 与平面 PBF 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{QB},\boldsymbol{n}>|=\left|\frac{\overrightarrow{QB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{QB}||\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}=\frac{1}{3}$．……………… 14 分（公式 1 分，结果 1 分）

故直线 QB 与平面 PBF 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$．……………………15 分

解法二：（1）同解法一．……………………6 分

（2）连结 QF．

过点 F 作 $FN\,/\!/\,BE$，则 $FN\perp$ 平面 $EFPQ$．

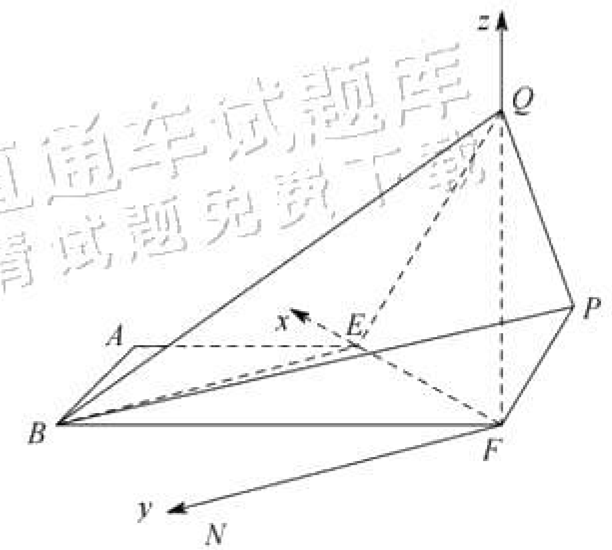
又∵ $QF=EF=\sqrt{2}$，$QE=2$，

$\therefore QF\perp EF$，……………………7 分

$\therefore EF\perp FN$，$EF\perp FQ$，$FN\perp FQ$．

以 F 为原点，FE，FN，FQ 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，

建立如下图所示的空间直角坐标系，……………………8 分



则 $F(0,0,0)$，$B(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$P(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，$Q(0,0,\sqrt{2})$，……………………………9 分

所以 $\overrightarrow{QB}=(\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{FP}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{FB}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$．……………………10 分

设平面 PBF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{FB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{FP}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0,\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0.\end{cases}$ ……………………………………11 分

取 $x=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$．……………………………………………………12 分

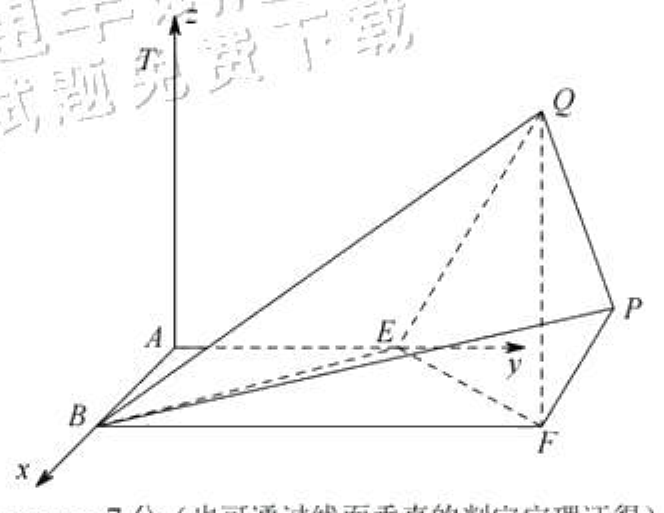
设直线 QB 与平面 PBF 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{QB},\boldsymbol{n}>|=\left|\frac{\overrightarrow{QB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{QB}||\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}=\frac{1}{3}$．…………14 分（公式 1 分，结果 1 分）

故直线 QB 与平面 PBF 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$．……………………………………15 分

解法三：（1）同解法一．………………………………………………………………6 分

（2）连结 QF．



$\because QF=EF=\sqrt{2}$，$QE=2$，

$\therefore QF^2+EF^2=QE^2$，

$\therefore QF\perp EF$．

$\because BE\perp$ 平面 $EFPQ$，$BE\subset$ 平面 $ABFE$，

$\therefore$ 平面 $ABFE\perp$ 平面 $EFPQ$．

又平面 $ABFE\cap$ 平面 $EFPQ=EF$，

$\therefore QF\perp$ 平面 $ABFE$．………………………7 分（也可通过线面垂直的判定定理证得）

过点 A 作 $AT\,//\,QF$，则 $AT\perp$ 平面 $ABFE$，

又 $AB\perp AE$，

以 A 为原点，AB，AE，AT 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，

建立如下图所示的空间直角坐标系，……………………………………………………8 分

则 $B(1,0,0)$，$F(1,2,0)$，$P(\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$Q(1,2,\sqrt{2})$，………………………………9 分

因此，$\overrightarrow{QB}=(0,-2,-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BF}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{FP}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$．……………………10 分

设平面 PBF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{BF}\cdot \boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{FP}\cdot \boldsymbol{n}=0\end{cases}$即$\begin{cases}2y=0,\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0.\end{cases}$ ………………………………………………… 11 分

取$x=\sqrt{2}$，可得$\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},0,-1)$． ………………………………………………… 12 分

设直线QB与平面PBF所成的角为θ，

则$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{QB},\boldsymbol{n}>|=\left|\frac{\overrightarrow{QB}\cdot \boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{QB}||\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}=\frac{1}{3}$. ………… 14 分（公式 1 分，结果 1 分）

故直线QB与平面PBF所成角的正弦值为$\frac{1}{3}$． ………………………………………………… 15 分

解法四：（1）同解法一． ………………………………………………… 6 分

（2）连结EP．

$\because BE\perp$平面$EFPQ$，$EP\subset$平面$EFPQ$，

$\therefore BE\perp EP$． ………………………………………………… 7 分

$\because BE=\sqrt{2}$，$EP=\sqrt{5}$，

$\therefore BP=\sqrt{7}$． ………………………………………………… 8 分

又$PF=1$，$BF=2$，

$\therefore \cos\angle BFP=\frac{BF^2+PF^2-BP^2}{2BF\cdot PF}=-\frac{1}{2}$，

$\therefore \sin\angle BFP=\frac{\sqrt{3}}{2}$． ………………………………………………… 9 分

$\therefore S_{\triangle BFP}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{\triangle FPQ}=\frac{1}{2}$． ………………………… 11 分（两个面积各 1 分）

设点Q到平面PBF的距离为h．

由$V_{Q-BFP}=V_{B-FPQ}$，得$\frac{1}{3}S_{\triangle BFP}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle FPQ}\cdot BE$． ………………………… 12 分

$\therefore h=\frac{\sqrt{6}}{3}$． ………………………………………………… 13 分

设直线QB与平面PBF所成的角为θ，

$\therefore \sin\theta=\frac{h}{QB}=\frac{1}{3}$． ………………………………………………… 14 分

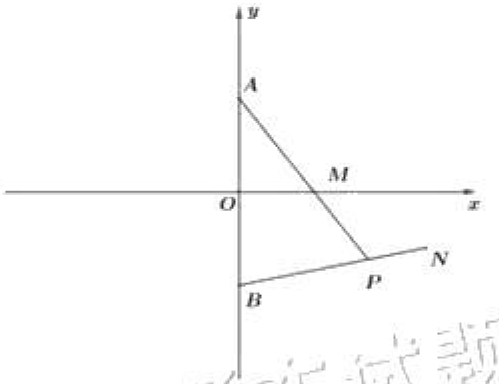
故直线QB与平面PBF所成角的正弦值为$\frac{1}{3}$． ………………………………………………… 15 分

17．（15 分）

【命题意图】本题主要考查椭圆的几何性质、直线与直线的位置关系，直线与椭圆的位置关系等基础知识；考查运算求解、推理论证等能力；考查化归与转化、数形结合、函数与方程等思想；体现基础性与综合性，导向对数学运算、直观想象、逻辑推理等核心素养的关注.

【试题解析】**解法一：**（1）（i）若 $\lambda=0$，则 $P(0,-1)$，经检查符合椭圆 C 的方程，所以点 P 在 C 上. ……………………1分

（ii）若 $\lambda\neq 0$，则直线 AM 的方程为 $y=-\dfrac{1}{2\lambda}x+1$， ……………………2分



直线 BN 的方程为 $y=\dfrac{\lambda}{2}x-1$， ……………………3 分

由 $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2\lambda}x+1, \\ y=\dfrac{\lambda}{2}x-1, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} y-1=-\dfrac{1}{2\lambda}x, & ① \\ y+1=\dfrac{\lambda}{2}x, & ② \end{cases}$ ……………………5 分

①×②，消去 λ，得 $(y-1)(y+1)=-\dfrac{1}{4}x^2$， ……………………6 分

即 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，所以点 P 在 C 上. ……………………7 分

（2）因为直线 MN 的斜率 $k_{MN}=\dfrac{\lambda-1-0}{2-2\lambda}=-\dfrac{1}{2}$，

所以直线 MN 的方程为 $y=-\dfrac{1}{2}(x-2\lambda)$，即 $x+2y-2\lambda=0$. ……………………8 分

由方程组 $\begin{cases} x+2y-2\lambda=0, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 消去 x，得 $2y^2-2\lambda y+\lambda^2-1=0$. ……………………9 分

由 $\Delta>0$ 得 $(2\lambda)^2-4\cdot 2\cdot(\lambda^2-1)=8-4\lambda^2>0$，解得 $-\sqrt{2}<\lambda<\sqrt{2}$. ……………………10 分

设 $S(x_1,y_1)$，$T(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\lambda$，$y_1\cdot y_2=\dfrac{\lambda^2-1}{2}$.

则 $|MS|=\sqrt{1+\dfrac{1}{(-\frac{1}{2})^2}}\cdot|y_1-0|=\sqrt{5}|y_1|$，$|MT|=\sqrt{5}|y_2|$，……………………………… 11 分

所以 $|MS|\cdot|MT|=5|y_1y_2|=\dfrac{5|\lambda^2-1|}{2}$.

又 $|MS|\cdot|MT|=\dfrac{15}{8}$，所以 $\dfrac{5|\lambda^2-1|}{2}=\dfrac{15}{8}$，解得 $\lambda^2=\dfrac{1}{4}$，或者 $\lambda^2=\dfrac{7}{4}$. ……………………… 12 分

由 $|ST|=\sqrt{5}|y_1|+\sqrt{5}|y_2|=\sqrt{5}|y_1-y_2|$，……………………………… 13 分

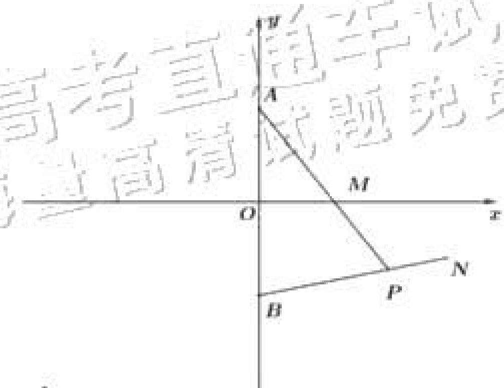
又 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\lambda^2-2(\lambda^2-1)}=\sqrt{2-\lambda^2}$，……………………………… 14 分

所以 $|ST|=\dfrac{\sqrt{35}}{2}$，或者 $|ST|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. ……………………………… 15 分

解法二：（1）（i）若 $\lambda=0$，则 $P(0,-1)$，经检查符合椭圆 C 的方程，所以点 P 在 C 上.

……………………………………………………………………………………1分

（ii）若 $\lambda\neq 0$，则直线 AM 的方程为 $y=-\dfrac{1}{2\lambda}x+1$，……………………………………2分



直线 BN 的方程为 $y=\dfrac{\lambda}{2}x-1(*)$，……………………………………………………3 分

由 $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2\lambda}x+1, \\ y=\dfrac{\lambda}{2}x-1 \end{cases}$ 消去 y，得 $x=\dfrac{4\lambda}{\lambda^2+1}$，代入(*)式得 $y=\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}$，

所以 $P(\dfrac{4\lambda}{\lambda^2+1},\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1})$. …………5 分（横坐标 1 分，纵坐标 1 分）

因为 $\dfrac{\left(\dfrac{4\lambda}{\lambda^2+1}\right)^2}{4}+\left(\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\right)^2=\dfrac{4\lambda^2+\lambda^4-2\lambda^2+1}{(\lambda^2+1)^2}=1$，……………………………6 分

符合椭圆 C 的方程，所以点 P 在 C 上. ……………………………………………7 分

（2）因为直线 MN 的斜率 $k_{MN}=\dfrac{\lambda-1-0}{2-2\lambda}=-\dfrac{1}{2}$，

所以直线 MN 的方程为 $y=-\frac{1}{2}(x-2\lambda)$. ……………………………………8 分

由方程组 $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}(x-2\lambda), \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-2\lambda x+2\lambda^2-2=0$. ……………………………………9 分

由 $\Delta>0$ 得 $(2\lambda)^2-4\times 2\cdot(\lambda^2-1)=8-4\lambda^2>0$，解得 $-\sqrt{2}<\lambda<\sqrt{2}$. ……………………………………10 分

设 $S(x_1,y_1)$，$T(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=2\lambda$，$x_1\cdot x_2=2\lambda^2-2$.

则 $|MS|=\sqrt{1+(-\frac{1}{2})^2}\,|x_1-2\lambda|=\frac{\sqrt{5}}{2}|x_1-2\lambda|$，$|MT|=\frac{\sqrt{5}}{2}|x_2-2\lambda|$， ……………………………………11 分

所以 $|MS|\cdot|MT|=\frac{5}{4}|(x_1-2\lambda)(x_2-2\lambda)|=\frac{5}{4}|x_1x_2-2\lambda(x_1+x_2)+4\lambda^2|$

$=\frac{5}{4}|2\lambda^2-2-4\lambda^2+4\lambda^2|=\frac{5}{2}|\lambda^2-1|$. ……………………………………12 分

又 $|MS|\cdot|MT|=\frac{15}{8}$，所以 $\frac{5|\lambda^2-1|}{2}=\frac{15}{8}$，解得 $\lambda^2=\frac{1}{4}$，或者 $\lambda^2=\frac{7}{4}$. ……………………………………13 分

由 $|ST|=\frac{\sqrt{5}}{2}|x_1-x_2|$，

又 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4\lambda^2-8(\lambda^2-1)}=2\sqrt{2-\lambda^2}$， ……………………………………14 分

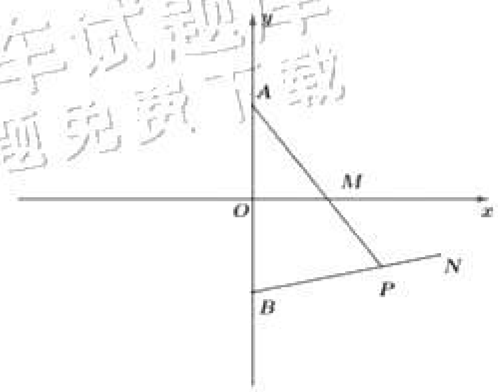
所以 $|ST|=\frac{\sqrt{35}}{2}$，或者 $|ST|=\frac{\sqrt{5}}{2}$. ……………………………………15 分

解法三：（1）（i）若 $\lambda=0$，则 $P(0,-1)$，经检查符合椭圆 C 的方程，所以点 P 在 C 上.

……………………………………1分

（ii）若 $\lambda\neq 0$，则直线 AM 的方程为 $y=-\frac{1}{2\lambda}x+1$， ……………………………………2分

直线 BN 的方程为 $y=\frac{\lambda}{2}x-1(*)$ ， ……………………………………3 分



由$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2\lambda}x+1, & ① \\ y=\dfrac{\lambda}{2}x-1, & ② \end{cases}$

①$\times\lambda^2+$②，消去x，得$y=\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}$，代入(*)式得$x=\dfrac{4\lambda}{\lambda^2+1}$，

所以$P(\dfrac{4\lambda}{\lambda^2+1},\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1})$. ……………………………5分（横坐标1分，纵坐标1分）

因为$\dfrac{\left(\dfrac{4\lambda}{\lambda^2+1}\right)^2}{4}+\left(\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\right)^2=\dfrac{4\lambda^2+\lambda^4-2\lambda^2+1}{(\lambda^2+1)^2}=1$，……………………………6分

符合椭圆C的方程，所以点P在C上. ……………………………7分

（2）由于直线MN的斜率$k_{MN}=\dfrac{\lambda-1-0}{2-2\lambda}=-\dfrac{1}{2}$，……………………………8分

设直线MN的方程为$\begin{cases} x=2\lambda-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}t, \\ y=0+\dfrac{\sqrt{5}}{5}t \end{cases}$（$t$为参数），……………………………9分

代入椭圆方程，得$(\lambda-\dfrac{t}{\sqrt{5}})^2+(\dfrac{t}{\sqrt{5}})^2=1$，即$\dfrac{2t^2}{5}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\lambda\cdot t+\lambda^2-1=0$，……………………………10分

由$|MS|=|t_1|$，$|MT|=|t_2|$，得$|MS|\cdot|MT|=|t_1\cdot t_2|=\left|\dfrac{5(\lambda^2-1)}{2}\right|=\dfrac{15}{8}$，

解得$\lambda^2=\dfrac{1}{4}$，或者$\lambda^2=\dfrac{7}{4}$. ……………………………12分

由$|ST|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$，……………………………13分

又$t_1+t_2=\sqrt{5}\lambda$，

所以$|ST|=\sqrt{5\lambda^2-4\cdot\dfrac{5(\lambda^2-1)}{2}}=\sqrt{10-5\lambda^2}=\sqrt{5(2-\lambda^2)}$，……………………………14分

所以$|ST|=\dfrac{\sqrt{35}}{2}$，或者$|ST|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. ……………………………15分

18．（17 分）

【命题意图】本题主要考查独立性检验、全概率公式的应用、递推数列等基础知识；考查运算求解能力、推理论证能力；考查化归与转化等思想；体现基础性和综合性，导向对数学抽象、逻辑推理、数学运算、数据分析等核心素养的关注．

【试题解析】**解法一：**（1）根据题意可得列联表：

	一级品	非一级品	合计
甲	26	24	50
乙	70	30	100
合计	96	54	150

……………………………………………………………………………………2 分（部分数字写对给 1 分，全对给 2 分）

零假设为 H_0：甲、乙两批发生器的一级品率没有差异．……………………………………3 分

根据列联表中的数据，经计算得

$\chi^2=\dfrac{150(26\times 30-24\times 70)^2}{50\times 100\times 96\times 54}=\dfrac{75}{16}=4.6875>3.841=x_{0.05}$，……5 分（数值代入正确给 1 分）

根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为甲、乙两批发生器的一级品率存在差异，此推断犯错误的概率不大于 0.05．……………………………6 分

（2）（i）依题意可得 $p_1=P(X_1=1)=0$．…………………………………………………7 分

记 $A_n=$“按 n 次按钮后显示的数字为 1”，……………………………………………8 分

由全概率公式，得

$p_2=P(X_2=1)=P(A_1A_2+\overline{A}_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid \overline{A}_1)$ ……………9 分

$=p_1\times 0+(1-p_1)\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$．…………………………………………………10 分

（ii）由全概率公式，得

$p_{n+1}=P(x_{n+1}=1)=P(A_nA_{n+1}+\overline{A}_nA_{n+1})=P(A_n)P(A_{n+1}\mid A_n)+P(\overline{A}_n)P(A_{n+1}\mid \overline{A}_n)$，……11 分

所以 $p_{n+1}=p_n\times 0+(1-p_n)\times\dfrac{1}{3}$，…………………………………………………12 分

即 $p_{n+1}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{3}(p_n-\dfrac{1}{4})$．

又因为 $p_1-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}\neq 0$，…………………………………………………13 分

所以 $\{p_n-\dfrac{1}{4}\}$ 是首项为 $-\dfrac{1}{4}$，公比为 $-\dfrac{1}{3}$ 的等比数列，…………………………14 分

所以 $p_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1}$，即 $p_n=-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1}+\frac{1}{4}$．……………………………………15 分

所以 $p_{10}=-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{10-1}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(\frac{1}{3})^9$．……………………………………16 分

因为 $|f-p_{10}|=\frac{1}{4}(\frac{1}{3})^9<0.0001$，

所以该发生器为一级品．……………………………………17 分

解法二：（1）同解法一．……………………………………6 分

（2）（i）依题意可得 $p_1=P(X_1=1)=0$．……………………………………7 分

记 $A_n=$ “按 n 次按钮后显示的数字为 1”，

$B_n=$ “按 n 次按钮后显示的数字为 2”，

$C_n=$ “按 n 次按钮后显示的数字为 3”，

$D_n=$ “按 n 次按钮后显示的数字为 4”，

则 $\Omega=A_n\cup B_n\cup C_n\cup D_n$，且 A_n，B_n，C_n，D_n 两两互斥．……………………………………8 分

依据题意得 $P(A_{n+1}|A_n)=0$，$P(A_{n+1}|B_n)=P(A_{n+1}|C_n)=P(A_{n+1}|D_n)=\frac{1}{3}$，

$P(B_n)=P(C_n)=P(D_n)=\frac{1-p_n}{3}$．……………………………………9 分

由全概率公式，得

$p_2=P(x_2=1)=P(A_1A_2+B_1A_2+C_1A_2+D_1A_2)$

$=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)+P(C_1)P(A_2|C_1)+P(D_1)P(A_2|D_1)$

$=\frac{1-p_1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1-p_1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1-p_1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(1-p_1)=\frac{1}{3}$．……………………………………10 分

（ii）$p_{n+1}=P(x_{n+1}=1)=P(A_nA_{n+1}+B_nA_{n+1}+C_nA_{n+1}+D_nA_{n+1})$

$=P(A_n)P(A_{n+1}|A_n)+P(B_n)P(A_{n+1}|B_n)+P(C_n)P(A_{n+1}|C_n)+P(D_n)P(A_{n+1}|D_n)$ ……………………11 分

所以 $p_{n+1}=\frac{1-p_n}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1-p_n}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1-p_n}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(1-p_n)$，……………………………………12 分

即 $p_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}(p_n-\frac{1}{4})$．

又因为 $p_1-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\neq 0$，……………………………………13 分

所以 $\{p_n-\frac{1}{4}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{4}$，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列．……………………………………14 分

所以 $p_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1}$，

即 $p_n=-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1}+\frac{1}{4}$． ………………………………………………………… 15 分

所以 $p_{10}=-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{10-1}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(\frac{1}{3})^{9}$． ………………………………………… 16 分

因为 $|f-p_{10}|=\frac{1}{4}(\frac{1}{3})^{9}<0.0001$，

所以该发生器为一级品． ………………………………………………………………………… 17 分

解法三：（1）同解法一． ……………………………………………………………………… 6 分

（2）（i）依题意可得 $p_1=P(X_1=1)=0$． ……………………………………………………… 7 分

记 A_n =“按 n 次按钮后显示的数字为1”， …………………………………………………… 8 分

由全概率公式，得

$p_2=P(X_2=1)=P(A_1A_2+\overline{A_1}A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})$ ……………… 9 分

$=p_1\times 0+(1-p_1)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$． …………………………………………………………… 10 分

$p_3=P(X_3=1)=P(A_2A_3+\overline{A_2}A_3)=P(A_2)P(A_3|A_2)+P(\overline{A_2})P(A_3|\overline{A_2})$

$=p_2\times 0+(1-p_2)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$． …………………………………………………………… 11 分

$p_4=P(X_4=1)=P(A_3A_4+\overline{A_3}A_4)=P(A_3)P(A_4|A_3)+P(\overline{A_3})P(A_4|\overline{A_3})$

$=p_3\times 0+(1-p_3)\times\frac{1}{3}=\frac{7}{27}$．

$p_5=P(X_5=1)=P(A_4A_5+\overline{A_4}A_5)=P(A_4)P(A_5|A_4)+P(\overline{A_4})P(A_5|\overline{A_4})$

$=p_4\times 0+(1-p_4)\times\frac{1}{3}=\frac{20}{81}$． ………………………………………………………… 12 分

$p_6=P(X_6=1)=P(A_5A_6+\overline{A_5}A_6)=P(A_5)P(A_6|A_5)+P(\overline{A_5})P(A_6|\overline{A_5})$

$=p_5\times 0+(1-p_5)\times\frac{1}{3}=\frac{61}{243}$．

$p_7=P(X_7=1)=P(A_6A_7+\overline{A_6}A_7)=P(A_6)P(A_7|A_6)+P(\overline{A_6})P(A_7|\overline{A_6})$

$=p_6\times 0+(1-p_6)\times\frac{1}{3}=\frac{182}{729}$． ………………………………………………………… 13 分

$p_8=P(X_8=1)=P(A_7A_8+\overline{A_7}A_8)=P(A_7)P(A_8|A_7)+P(\overline{A_7})P(A_8|\overline{A_7})$

$=p_7\times 0+(1-p_7)\times\frac{1}{3}=\frac{547}{2187}$． ……………………………………………………… 14 分

$p_9=P(X_9=1)=P(A_8A_9+\overline{A_8}A_9)=P(A_8)P(A_9|A_8)+P(\overline{A_8})P(A_9|\overline{A_8})$

$=p_8\times 0+(1-p_8)\times\frac{1}{3}=\frac{1640}{6561}$． ……………………………………………………… 15 分

$p_{10}=P(X_{10}=1)=P(A_9A_{10}+\overline{A_9}A_{10})=P(A_9)P(A_{10}|A_9)+P(\overline{A_9})P(A_{10}|\overline{A_9})$

$= p_9 \times 0 + (1 - p_9) \times \frac{1}{3} = \frac{4921}{19683}$. ………………………………………………………………………… 16 分

因为$|f - p_{10}| < 0.0001$，

所以该发生器为一级品. …………………………………………………………………………………… 17 分

19.（17分）

【命题意图】本题主要考查整数的整除、排列、组合等知识，考查阅读理解能力、逻辑思维能力与创新能力等关键能力；考查分类与整合思想、转化与化归思想；体现综合性、应用性与创新性，彰显高考的选拔特点，导向对发展数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养的关注.

【试题解析】解：（1）(a_1,a_2,a_3)的所有"好排列"为：

$(1,2,3)$，$(2,3,1)$，$(3,1,2)$.（每个1分）……3分

（2）当$n=2$时，(a_1,a_2)只有2个，不符合要求；……4分

当$n=3$时，由（1）可知，(a_1,a_2,a_3)只有3个"好排列"，不符合要求；……5分

当$n=4$时，(a_1,a_2,a_3,a_4)的"好排列"有$(1,2,3,4)$，$(3,1,2,4)$，

$(3,4,2,1)$，$(4,2,3,1)$，至少有4个，符合要求；……6分

当$n\ge 5$时，$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\cdots,a_n)$的"好排列"至少有$(1,2,3,4,5,\cdots,n)$，

$(3,1,2,4,5,\cdots,n)$，$(3,4,2,1,5,\cdots,n)$，$(4,2,3,1,5,\cdots,n)$，至少4个，符合要求；……7分

故当$n\ge 4$时，$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$中"好排列"至少有4个.……8分

（3）（i）考虑$(a_1,a_2,\cdots,a_{3n+1})$中"好排列"个数$T_{3n+1}$：

因为$a_1,a_2,\cdots,a_{3n+1}$是$1,2,\cdots,3n+1$的一个排列，考虑$1,2,\cdots,3n+1$除以3的余数，共有n+1个1，n个2，n个0；……9分

考虑由余数形成的排列$(b_1,b_2,\cdots,b_{3n+1})$，其中$b_1,b_2,\cdots,b_{3n+1}$为$n$+1个1，$n$个2，$n$个0的全排列，为满足"好排列"的条件要求，排列$(b_1,b_2,\cdots,b_{3n+1})$中每个1的右边必为2，故"好排列"的最后一个数为1，形如$(b_1,b_2,\cdots,b_{3n},1)$；……10分

其中$b_1,b_2,\cdots,b_{3n}$的排法数即为n个0与n个$(1,2)$的排法数，即$\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n!}$.……11分

故$(a_1,a_2,\cdots,a_{3n+1})$中"好排列"的个数$T_{3n+1}=\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n!}\cdot(n+1)!\cdot n!\cdot n!=(2n)!\cdot(n+1)!$.

……12分

（ii）考虑$(a_1,a_2,\cdots,a_{3n+2})$中"好排列"个数$T_{3n+2}$：

因为$a_1,a_2,\cdots,a_{3n+2}$是$1,2,\cdots,3n+2$的一个排列，考虑$1,2,\cdots,3n+2$除以3的余数，共有n+1个1，n+1个2，n个0；……13分

考虑由余数形成的排列$(b_1,b_2,\cdots,b_{3n+2})$，其中$b_1,b_2,\cdots,b_{3n+2}$为$n$+1个1，$n$+1个2，$n$个0的全排列；

① 情况1：$(b_1,b_2,\cdots,b_{3n+2})$中，$n$+1个1与$n$+1个2形成$n$+1个$(1,2)$，每个1的右边均为2；

此时$(b_1,b_2,\cdots,b_{3n+2})$为"好排列"的排法数即为$n$个0与$n$+1个$(1,2)$的排法数，

即$\dfrac{(2n+1)!}{n!\cdot(n+1)!}$．故$(a_1,a_2,\cdots,a_{3n+2})$“好排列”的个数有

$\dfrac{(2n+1)!}{n!\cdot(n+1)!}\cdot(n+1)!\cdot(n+1)!\cdot n!=(2n+1)!\cdot(n+1)!$；…………………………………… 14 分

②情况 2：$(b_1,b_2,\cdots,b_{3n+2})$最后位置的数为 1，则第一位的数必为 2，即排列$(2,b_2,\cdots,b_{3n+1},1)$；

其中$b_2,b_3,\cdots,b_{3n+1}$的排法数即为n个 0 与n个$(1,2)$的排法数，即$\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n!}$.

故$(a_1,a_2,\cdots,a_{3n+2})$“好排列”的个数有

$\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n!}\cdot(n+1)!\cdot(n+1)!\cdot n!=(2n)!\cdot(n+1)!\cdot(n+1)$．…………………………………… 15 分

由①，②可得$T_{3n+2}=(2n+1)!\cdot(n+1)!+(2n)!\cdot(n+1)!\cdot(n+1)=(2n)!\cdot(n+1)!\cdot(3n+2)$．

…………………………………………………………………………………………………… 16 分

所以$T_{3n+2}=(3n+2)\cdot T_{3n+1}$．…………………………………………………… 17 分