准考证号________________ 姓名__________

（在此试卷上答题无效）

漳州市 2025 届高三毕业班第三次教学质量检测

数学试题

本试题卷共 4 页，19 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

考生注意：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的"准考证号、姓名"与考生本人准考证号、姓名是否一致。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，用 0.5 mm 黑色签字笔将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 锐角$\triangle ABC$的内角A，B的对边分别为a，b，则"$a>b$"是"$\tan A>\tan B$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 已知集合$A=\{x|2x-1<0\}$，$B=\{x|e^x<2\}$，则

A. $A\cup B=\left\{x\middle|x<\frac{1}{2}\right\}$　　B. $A\cap B=\{x|x<\ln 2\}$

C. $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$　　D. $B\cup(\complement_{\mathbf{R}}A)=\mathbf{R}$

3. 已知复数$z_1=1+2i$，在复平面内，复数z_1，z_2对应的点分别为Z_1，Z_2，且点Z_1与点Z_2关于直线$y=x$对称，则$|z_1-z_2|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 5

4. 某工厂产生的废气经过滤后排放，过滤过程中废气中的污染物含量P（单位：mg/L）与时间t（单位：h）间的关系为$P=P_0e^{-kt}$，其中P_0，$k>0$，若在前 5 h 内消除了 10%的污染物，则 15 h 后污染物含量还剩余

A. 70%　　B. 85%　　C. 81%　　D. 72.9%

5. 已知$f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$，若$f(x)$在区间$\left[a,a+\frac{\pi}{6}\right]$$(0<a<2\pi)$上不单调，则$a$的取值范围是

A. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$　　C. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{3}\right)$

$S_2-2S_1=1$

6. 记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_1=2$，$S_{n+1}-2S_n=n$，则$a_{10}=$

A. 1 024　　B. 1 023　　C. 513　　D. 256

7. 已知点 M 是抛物线 $x^2=y$ 上一动点，过点 M 作直线 MN 与圆 P：$(x-5)^2+(y+1)^2=4$ 相切于点 N，则△PMN 面积的最小值为

A. 4　　B. $2\sqrt{5}$　　C. 5　　D. $2\sqrt{6}-1$

8. 设 A、B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$，则下列说法正确的是

A. $P(AB)>P(B|A)$

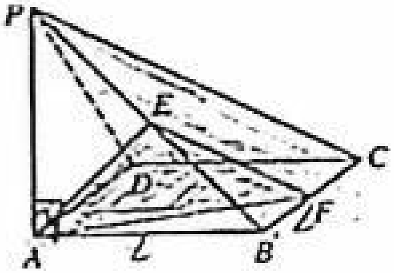
B. $1-P(AB)=(1-P(A))P(B|\overline{A})$

C. 若 A 与 B 互斥，则 $P(\overline{A}\cup B)=1$

D. 若 $P(AB)\neq 0$，则 A 与 B 相互独立

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$PA\perp$底面 $ABCD$，$PA=AB$，E 为线段 PB 的中点，F 为线段 BC 上的动点，则



A. 平面 $AEF\perp$平面 PBC

B. $AE/\!/$平面 PCD

C. 当 $PC/\!/$平面 AEF 时，三棱锥 $E-ABF$ 的体积为$\frac{1}{3}$

D. 当 F 是 BC 的中点时，三棱锥 $E-ABF$ 外接球的表面积为 5π

10. 在△ABC 中，$AC=2\sqrt{5}$，$\tan A=2$，向量$\overrightarrow{AC}$ 在向量$\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，则

A. 边 BC 上的高为 $3\sqrt{2}$

B. $\sin C=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

C. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-8$

D. 边 AB 上的中线为$\sqrt{17}$

11. 已知函数 $f(x)$对任意 $x,y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$都有 $f\left(\frac{y}{x}\right)=xf(y)-\frac{x^2}{y}f(x)$，且 $f(e)=\frac{1}{e}$，则

A. $f(-1)=0$

B. $f\left(\frac{1}{e}\right)=e$

C. $f(x)$是奇函数

D. $x=e$ 是 $f(x)$的极小值点

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 记等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_3=3a_1+6$，$a_{n+1}=3a_n-2$，则 $a_n=$______.

13. $\left(x^2+\frac{1}{x^2}-3\right)^4$ 的展开式中常数项为______.

14. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>1)$的左、右焦点分别为 $F_1(-1,0)$、$F_2(1,0)$，上顶点为 B，直线 BF_1 交椭圆 C 于点 M，直线 MF_2 交椭圆 C 于点 N，且 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BN}=0$，则椭圆 C 的方程为______.

四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13分）

甲在进行某项试验时，设计了A，B两种方案. 为了判断方案的选择对试验结果是否有影响，方案A运行了60次，试验成功了40次；方案B运行了70次，试验成功了60次.

(1)根据题干信息，完善以下列联表，依据 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，能否认为方案的选择对试验结果有影响.

方案	结果		合计
	成功	未成功	
A			
B			
合计			

(2)以题干样本数据中两个方案试验成功的频率为相应试验成功的概率. 若甲在每次试验中，选择方案A的概率为 $\frac{1}{3}$. 现已知甲在一次试验中获得了成功，请问此次试验选择方案A的概率是多少.

参考公式及数据：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

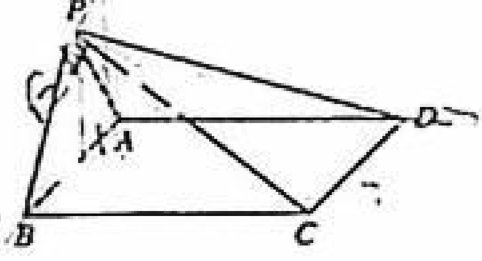
α	0.050	0.010	0.005
x_α	3.841	6.635	7.879

16.（15分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形，且 $AB=2$，$\triangle PAB$ 是以 $\angle APB$ 为顶角的等腰直角三角形，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$.

(1)求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积. p-ABCD

(2)试判断在 $\triangle PBC$ 内（包括边界）是否存在一点 Q 使得二面角 $Q-AD-C$ 的平面角取到 $\frac{\pi}{6}$（不需要确定点 Q 的具体位置）.



17.（15分）

设过点 $A(1,0)$，$B(-1,0)$ 的动直线 l_1，l_2 交于点 P，l_1，l_2 的斜率之积恒为 1.

(1)求动点 P 的轨迹 C 的方程.

(2)设直线 l 与曲线 C 交于点 M，N. 若以 MN 为直径作圆，该圆恒过点 A.

（Ⅰ）请判断 l 是否符合如下的结论①或结论②，并给予证明.

结论①：l 过定点；结论②：l 的斜率为定值.

（Ⅱ）是否存在直线 l 使得 $\triangle AMN$ 为等腰直角三角形？若存在，请求出此时 $\triangle AMN$ 的面积；若不存在，请说明理由.

18.（17分）

已知函数 $f(x)=e^{x-1}+k$，$g(x)=\ln x$，$h(x)=1-x$.

(1)当 $k=0$ 时，设函数 $f(x)$ 的图象、$g(x)$ 的图象与函数 $h(x)$ 的图象的交点分别为 P，Q，求线段 PQ 中点 M 的坐标.

(2)若 $f(x)\geqslant g(x)$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

(3)若函数 $H(x)=e^{x-1}+(k+1)x-x\ln x$ 至少有两个相异的零点，求整数 k 的最大值.

19.（17分）

若一个平面图形是由三点 $P(a_1,b_1)$，$Q(a_2,b_2)$，$R(a_3,b_3)$ 构成的三角形，则 $\triangle PQR$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|(a_2-a_1)\cdot(b_3-b_1)-(a_3-a_1)\cdot(b_2-b_1)|$；若一个平面图形是不规则的平面图形，则可通过割补法将其分解为规则的图形分别运算面积后再通过求和估算面积. 已知点 $A(1,0)$，$A_n(2^n,n)$，$B_{n+1}(2^{n+1},0)$，$M_n(n+1,\log_2(n+1))$，设曲线 $y=\log_2 x$，直线 $x=2^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 以及 x 轴所围成的封闭区域为 D_n.

(1)分别计算三角形 AA_nA_{n+1} 和五边形 $AM_1M_2M_3B_2$ 的面积.

(2)设 $\triangle AA_nA_{n+1}$ 的面积为 P_n，求数列 $\{P_n\}$ 的前 n 项和，并用多边形 $AA_1A_2A_3\cdots A_{n+1}B_{n+1}$ 的面积估算封闭区域 D_n 的面积 S_n'.

(3)同学甲提出另一个方案来估算 D_n 的面积：用多边形 $AM_1M_2M_3\cdots M_{2^{n+1}-1}B_{n+1}$ 的面积来估算 D_n 的面积得到 S_n''，利用 S_n' 与 S_n'' 证明不等式：$\log_2[(2^{n+1}-1)!]+\frac{n}{2}-(2n-1)\cdot 2^n>1(n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立.

漳州市2025届高三毕业班第三次教学质量检测

数学　答案详解

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C	D	A	D	B	B	A	C	ACD	ABD	AC

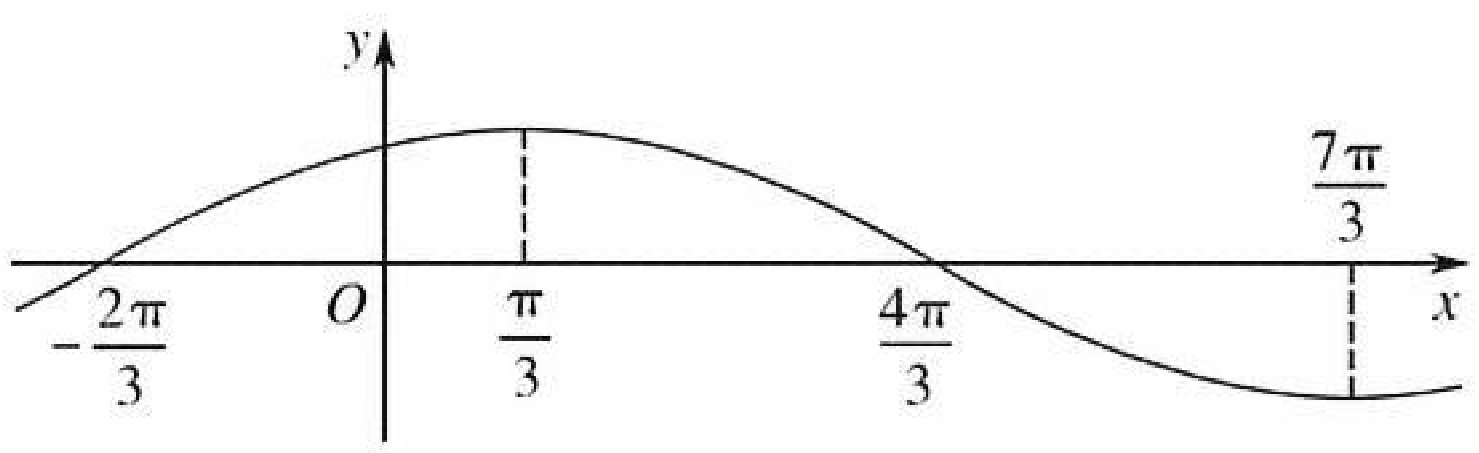
1. C 【解题思路】因为$\triangle ABC$是锐角三角形，所以A，$B\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 若$a>b$，则$A>B$，即$0<B<A<\dfrac{\pi}{2}$，又$y=\tan x$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增，所以$\tan A>\tan B$成立. 若$\tan A>\tan B$，且$A,B\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$A>B$，所以$a>b$成立. 所以"$a>b$"是"$\tan A>\tan B$"的充要条件. 故选C.

2. D 【解题思路】因为集合$A=\{x\mid 2x-1<0\}=\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{1}{2}\right\}$，$B=\{x\mid e^x<2\}=\{x\mid x<\ln 2\}$，$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\ln e=\ln e^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{e}<\ln\sqrt{4}=\ln 2$，所以$A\cup B=\{x\mid x<\ln 2\}$. 故选项A错误. $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{1}{2}\right\}$，故选项B错误. $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{1}{2}\right\}\cup\{x\mid x\geqslant\ln 2\}\neq\mathbf{R}$，故选项C错误. $B\cup(\complement_{\mathbf{R}}A)=\{x\mid x<\ln 2\}\cup\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\dfrac{1}{2}\right\}=\mathbf{R}$，故选项D正确. 故选D.

3. A 【解题思路】因为$z_1=1+2i$，所以点$Z_1(1,2)$. 因为点Z_1与点Z_2关于直线$y=x$对称，所以$Z_2(2,1)$. 所以$|z_1-z_2|=|Z_1Z_2|=\sqrt{(1-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$. 故选A.

4. D 【解题思路】当$t=0$时，$P=P_0\cdot e^{-k\cdot 0}=P_0$. 当$t=5$时，$\dfrac{P_0\cdot e^{-5k}}{P_0}=0.9$，即$e^{-5k}=0.9$. 当$t=15$时，$\dfrac{P_0\cdot e^{-15k}}{P_0}=e^{-15k}=(e^{-5k})^3=0.9^3=0.729$，故选D.

5. B 【解题思路】画出函数$f(x)$的部分图象如图所示，因为$a<2\pi$，所以$a+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13\pi}{6}<\dfrac{7\pi}{3}$. 因为$f(x)$在区间$\left[a,a+\dfrac{\pi}{6}\right](0<a<2\pi)$上不单调，所以$\begin{cases}a<\dfrac{\pi}{3},\\ a+\dfrac{\pi}{6}>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$ 解得$\dfrac{\pi}{6}<a<\dfrac{\pi}{3}$. 故选B.



6. B 【解题思路】由$S_{n+1}-2S_n=n$得$S_{n+1}+n+2=2(S_n+n+1)$，因为$a_1=2$，所以$S_1+1+1=4$. 所以$S_n+n+1\neq 0$. 所以$\{S_n+n+1\}$是首项为4，公比为2的等比数列. 所以$S_n+n+1=4\times 2^{n-1}$. 所以$S_n=2^{n+1}-n-1$. 所以$a_{10}=S_{10}-S_9=1\ 023$. 故选B.

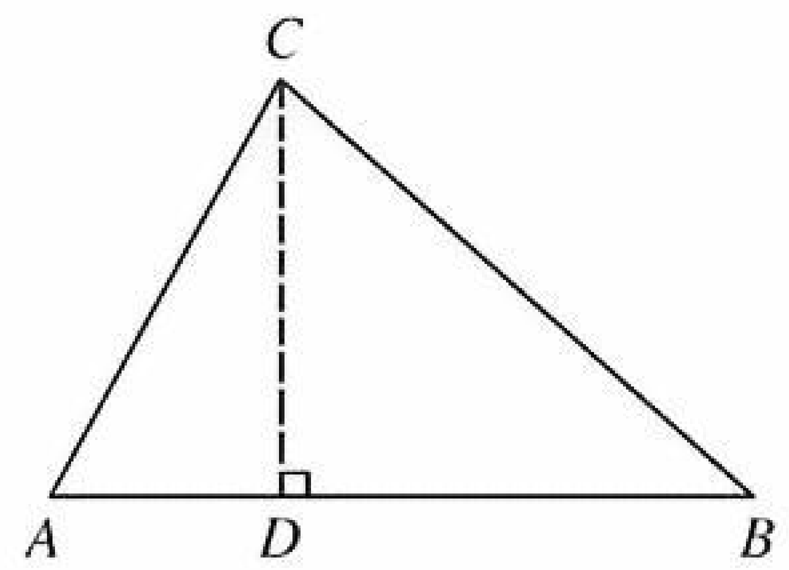
7. A 【解题思路】由题意得$S_{\triangle PMN}=\dfrac{1}{2}|MN||PN|=|MN|=\sqrt{|PM|^2-|PN|^2}=\sqrt{|PM|^2-4}$，所以当$|PM|^2$取得最小值时，$\triangle PMN$的面积最小. 设$M(t,t^2)$，则$|PM|^2=(t-5)^2+(t^2+1)^2=t^4+3t^2-10t+26$，令$g(t)=t^4+3t^2-10t+26$，则$g'(t)=4t^3+6t-10$，令$h(t)=g'(t)=4t^3+6t-10$，则$h'(t)=12t^2+6>0$，所以$h(t)$单调递增，即$g'(t)$单调递增. 又$g'(1)=0$，所以当$t>1$时，$g'(t)>0$，$g(t)$单调递增，当$t<1$时，$g'(t)<0$，$g(t)$单调递减. 所以$g(t)_{\min}=g(1)=20$. 所以$\triangle PMN$面积的最小值为4. 故选A.

8. C 【解题思路】对于A选项，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，若$P(AB)>P(B|A)$，则$P(A)>1$，不符合题意，故A选项不正确. 对于B选项，$P(B|\bar{A})=\dfrac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\dfrac{P(\bar{A}B)}{1-P(A)}$，若$1-P(AB)=[1-P(A)]\cdot P(B|\bar{A})$，则

$1-P(AB)=P(\bar{A}B)$，所以 $P(AB)+P(\bar{A}B)=1$，即 $P(B)=1$. 不符合题意. 故 B 选项不正确. 对于 C 选项，因为 A 与 B 互斥，所以 $A\cap B=\varnothing$. 又 $\bar{A}\cup A=\Omega$，$\bar{B}\cup B=\Omega$，所以 $A\subseteq\bar{B}$，$B\subseteq\bar{A}$. 所以 $\bar{A}\cup\bar{B}=\Omega$. 故 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$. 故 C 选项正确. 对于D选项，$P(AB)\neq 0$，不能说明 $P(AB)=P(A)P(B)$ 成立，故 D 选项不正确. 故选 C.

9. ACD 【解题思路】因为 $PA=AB$，E 为线段 PB 的中点，所以 $AE\perp PB$. 因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PA\perp BC$. 因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以 $AB\perp BC$. 又 $PA\cap AB=A$，$PA,AB\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp$ 平面 PAB. 因为 $AE\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp AE$. 又 $PB\cap BC=B$，$PB,BC\subset$ 平面 PBC，所以 $AE\perp$ 平面 PBC. 因为 $AE\subset$ 平面 AEF，所以平面 $AEF\perp$ 平面 PBC. 故选项 A 正确. 选项 B 显然不正确. 当 $PC/\!/$平面 AEF 时，$EF/\!/PC$，因为 E 为线段 PB 的中点，所以 F 为线段 BC 的中点. 所以 $BF=1$. 因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$. 又 $PA=AB=2$，E 为 PB 的中点，所以 $AE=BE=\sqrt{2}$. 因为 $BC\perp$ 平面 PAB，$PB\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp PB$. 所以三棱锥 $E-ABF$ 的体积 $V_{E-ABF}=V_{A-BEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle BEF}\cdot AE=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 1\times\sqrt{2}=\frac{1}{3}\left(\text{另解：}V_{E-ABF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABF}\cdot\frac{PA}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\frac{2}{2}=\frac{1}{3}\right)$. 故选项 C 正确. 因为 $AE\perp$ 平面 PBC，$BE\perp BF$，所以三棱锥 $E-ABF$ 可补全为长方体. 设三棱锥 $E-ABF$ 外接球的半径为 R，则 $4R^2=BE^2+BF^2+AE^2=5$，所以三棱锥 $E-ABF$ 外接球的表面积为 5π. 所以选项 D 正确. 故选 ACD.

10. ABD 【解题思路】如图，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，则 $AD=\frac{1}{3}AB$，设 $AD=x$，则 $BD=2x$，又 $\tan A=2$，所以 $CD=2x$. 所以 $B=45°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$AC=\sqrt{5}x$. 又 $AC=2\sqrt{5}$，所以 $x=2$. 所以 $AD=2$，$BD=4$，$CD=4$. 所以 $AB=6$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，易得 $BC=4\sqrt{2}$，所以边 BC 的高为 $AB\cdot\sin B=3\sqrt{2}$. 故选项 A 正确. 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理的推论得 $\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2CA\cdot CB}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 故选项 B 正确. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cos C=8$，故选项 C 错误. 设 AB 的中点为 M，则 $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$，所以 $\overrightarrow{CM}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})=\frac{1}{4}\times(20+32+2\times 8)=17$. 则 $|\overrightarrow{CM}|=\sqrt{17}$. 故选项 D 正确，故选 ABD.



11. AC 【解题思路】令 $x=y=1$，则 $f(1)=f(1)-f(1)=0$. 令 $x=-1$，$y=1$，则 $f(-1)=-f(1)-f(-1)$，得 $f(-1)=0$，故选项 A 正确. 令 $x=\mathrm{e}$，$y=1$，则 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}f(1)-\mathrm{e}^2f(\mathrm{e})$，得 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\mathrm{e}$，故选项 B 错误. 令 $x=-1$，则 $f(-y)=-f(y)-\frac{1}{y}f(-1)=-f(y)$，故 $f(x)$是奇函数. 故选项 C 正确. 由题可得 $\frac{y}{x}f\left(\frac{y}{x}\right)=yf(y)-xf(x)$，令 $g(x)=xf(x)$，则有 $g\left(\frac{y}{x}\right)=g(y)-g(x)$. 取 $g(x)=\ln|x|(x\neq 0)$，则 $f(x)=\frac{\ln|x|}{x}=\begin{cases}\frac{\ln x}{x},x>0,\\ \frac{\ln(-x)}{x},x<0,\end{cases}$ 当 $x>0$ 时，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，可得 $f(x)$在 $x=\mathrm{e}$ 处取得极大值，故 D 选项错误. 故选 AC.

12. $2n-1$ 【解题思路】因为 $S_3=\frac{(a_1+a_3)\times 3}{2}=3a_2=3a_1+6$，所以 $a_2-a_1=2$，即$\{a_n\}$的公差 $d=2$. 又 $a_{3n+1}=3a_{n+1}-2$，故令 $n=1$，得 $a_4=3a_2-2$. 所以 $a_1+3d=3a_1+3d-2$. 所以 $a_1=1$. 所以 $a_n=2n-1$.

13. -873 【解题思路】$\left(x^2+\frac{1}{x^2}-3\right)^5=C_5^0\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^5\cdot(-3)^0+C_5^1\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^4(-3)+C_5^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^3(-3)^2+C_5^3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2(-3)^3+C_5^4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)(-3)^4+C_5^5\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^0(-3)^5$. 观察可知，常数项为 $C_5^1\cdot C_4^2\cdot x^4\cdot\frac{1}{x^4}\cdot(-3)+C_5^3\cdot C_2^1\cdot x^2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(-3)^3+(-3)^5=30\times(-3)+20\times(-3)^3+(-3)^5=-873$.

14. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ 【解题思路】依题意得 $k_{BF_1}=b$，所以直线 BF_1 的方程为 $y=bx+b$. 代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，解得 $M\left(-\frac{2a^2}{a^2+1},-\frac{b(a^2-1)}{a^2+1}\right)$. 因为 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BN}=0$，所以 $MB\perp BN$. 所以 $k_{BN}=-\frac{1}{b}$. 所以直线 BN 的方程为 $y=-\frac{1}{b}x+b$. 代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，解得 $N\left(\frac{2a^2b^2}{a^2+b^4},\frac{b(b^4-a^2)}{a^2+b^4}\right)$. 因为 M,F_2,N 三点共线，所以 $k_{MF_2}=k_{NF_2}$. 即$\frac{-\frac{b(a^2-1)}{a^2+1}}{-\frac{2a^2}{a^2+1}-1}=\frac{\frac{b(b^4-a^2)}{a^2+b^4}}{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^4}-1}$，化简得 $2b^2-a^2-1=0$. 又 $a^2=b^2+1$，所以 $a^2=3,b^2=2$. 所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

15. **解**：(1)完善列联表如下，

方案	结果		合计
	成功	未成功	
A	40	20	60
B	60	10	70
合计	100	30	130

(3 分)

零假设 H_0：方案的选择对试验结果没有影响. (4 分)

根据列联表中的数据，经计算可得

$\chi^2=\frac{130\times(40\times10-20\times60)^2}{60\times70\times100\times30}\approx6.6>3.841$，(6 分)

根据小概率值 $x_{0.050}=3.841$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为方案的选择对试验结果有影响，此推断犯错的概率不超过 0.05. (7 分)

(2)在一次试验中，选择方案 A 记为事件 A，选择方案 B 记为事件 B，试验成功记为事件 C.

由题意，得 A 与 B 是对立事件，且 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=1-P(A)=\frac{2}{3}$，$P(C|A)=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$，$P(C|B)=\frac{60}{70}=\frac{6}{7}$，(9 分)

所以 $P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}=\frac{50}{63}$. (11 分)

故甲在一次试验中获得了成功，则此次试验选择方案 A 的概率是 $P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)P(C|A)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}{\frac{50}{63}}=\frac{7}{25}$. (13 分)

16. **解**：(1)如图，设点 O 是 AB 的中点，连接 PO. (1 分)

由题可知 $PA\perp PB$，$PA=PB$，

所以 $PO\perp AB$. (2 分)

因为 $AB=2$，所以 $PO=1$. (3 分)

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$PO\subset$平面 PAB，

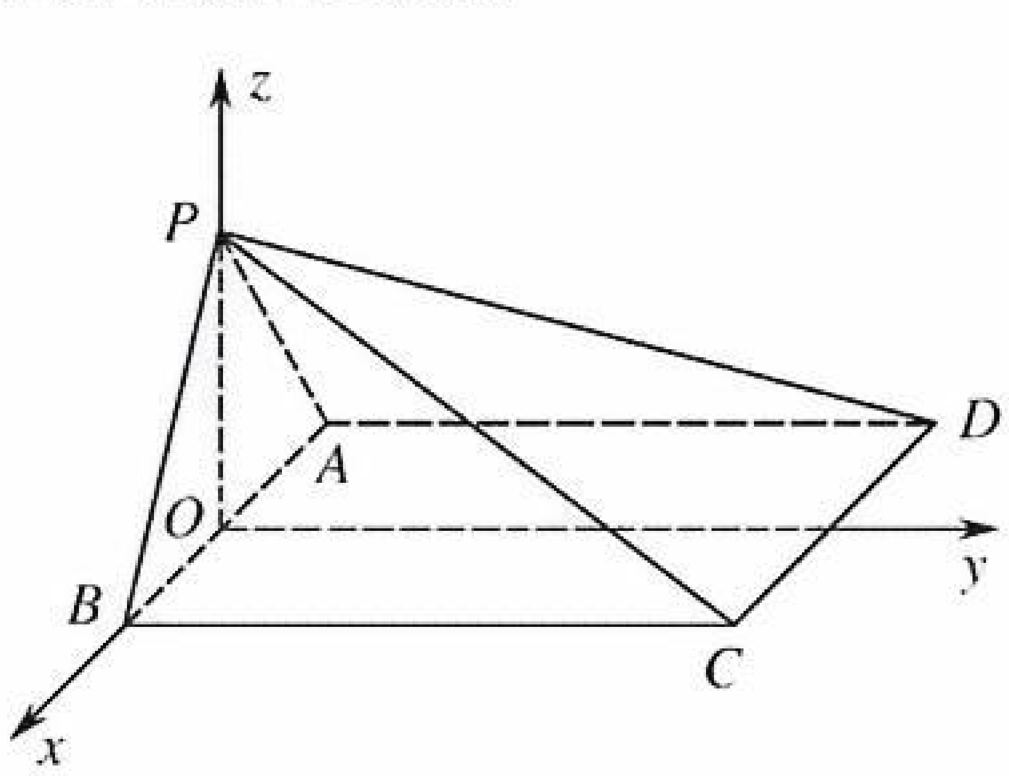
所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

所以 PO 的长为点 P 到平面 $ABCD$ 的距离. (4 分)

所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{正方形ABCD}\cdot PO$

$=\frac{1}{3}\times2^2\times1=\frac{4}{3}$. (6 分)

(2)以点 O 为坐标原点，OB 所在直线为 x 轴，过点 O 作 AD 的平行线为 y 轴，OP 所在直线为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系， (7 分)



则点 $P(0,0,1)$，$D(-1,2,0)$，$A(-1,0,0)$，　(8 分)

则 $\overrightarrow{PA}=(-1,0,-1)$，$\overrightarrow{PD}=(-1,2,-1)$.　(9 分)

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-x-z=0,\\ -x+2y-z=0.\end{cases}$　(10 分)

取 $z=1$，从而可得 $\boldsymbol{n}_1=(-1,0,1)$.　(11 分)

易知平面 ACD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$.

(12 分)

设平面 PAD 与平面 ACD 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

即平面 PAD 与平面 ACD 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$.　(13 分)

当 Q 与点 B 重合时，二面角 $Q-AD-C$ 的平面角为 $0°$；当 Q 与点 P 重合时，二面角 $Q-AD-C$ 的平面角为 $\dfrac{\pi}{4}$.　(14 分)

当点 Q 在线段 PB 上运动时，根据二面角变化的连续性可知存在一点 Q 使得二面角 $Q-AD-C$ 的平面角取到 $\dfrac{\pi}{6}$（**提示：本题仅要求判断是否存在，不需要求出具体的点 Q**）.　(15 分)

17. **解**：(1)设点 P 的坐标为 $(x,y)(x\neq\pm1)$，直线 l_1，l_2 的斜率为 k_1，k_2.

根据斜率定义可得 $k_1=\dfrac{y}{x-1}$，$k_2=\dfrac{y}{x+1}$.　(1 分)

根据斜率之积恒为 1 可得 $\dfrac{y}{x-1}\cdot\dfrac{y}{x+1}=1$.　(2 分)

化简可得动点 P 的轨迹 C 的方程为 $x^2-y^2=1(x\neq\pm1)$.　(3 分)

(2)(ⅰ)符合结论②.　(4 分)

证明如下：

当直线 l 的斜率不存在时，设直线 l 的方程为 $x=t$ $(|t|>1)$.

由题意可得 $\sqrt{t^2-1}=|t-1|$，解得 $t=1$，不符合题意，舍去.

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+m(x\neq\pm1)$.

联立该直线与曲线 C 的方程可得 $(k^2-1)x^2+2kmx+m^2+1=0$，$\Delta>0$.　(6 分)

设点 M，N 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

根据韦达定理可得 $x_1+x_2=-\dfrac{2km}{k^2-1}$，$x_1x_2=\dfrac{m^2+1}{k^2-1}$.　(8 分)

若以 MN 为直径作圆，该圆恒过点 A，则等价于 $AM\perp AN$，

即可得 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，

即可得 $(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=0$.　(9 分)

根据直线 l 的方程可得 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)$，

代入上式可得 $(k^2+1)x_1x_2+(km-1)(x_1+x_2)+m^2+1=0$，即 $\dfrac{(m^2+1)(k^2+1)}{k^2-1}-\dfrac{(km-1)2km}{k^2-1}+\dfrac{(m^2+1)(k^2-1)}{k^2-1}=0$，　(10 分)

化简可得 $km+k^2=0$，

即可得 $k=0$ 或 $k+m=0$.　(11 分)

当 $k+m=0$ 时，可知直线 l 恒过定点 $(1,0)$，此时不满足题中条件，故舍去.

故 $k=0$，即直线 l 的斜率恒为定值 0.

因此 l 符合结论②.　(12 分)

(ⅱ)不存在.　(13 分)

理由如下：根据(ⅰ)可得直线 l 的方程为 $y=m$ $(m\neq0)$，此时 M，N 的坐标为 $(-\sqrt{1+m^2},m)$，$(\sqrt{1+m^2},m)$，线段 MN 中点 T 的坐标为 $(0,m)$，

(14 分)

则直线 AT 与直线 l 始终不垂直，由此可得 $\triangle AMN$ 不可能是等腰直角三角形.　(15 分)

18. **解**：(1)当 $k=0$ 时，函数 $f(x)=e^x$ 与函数 $g(x)=\ln x$ 互为反函数，两个函数的图象关于直线 $l:y=x$ 对称，　(2 分)

函数 $h(x)=1-x$ 的图象也关于直线 $l:y=x$ 对称，

(3 分)

所以 P，Q 关于直线 $l:y=x$ 对称.　(4 分)

综上可知点 M 为函数 $h(x)=1-x$ 的图象与直线 l：

$y=x$ 的交点， (5分)

计算可得 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. (6分)

(2)不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立等价于 $e^{x+k}+k\geqslant \ln x$ 恒成立， (7分)

即 $e^{x+k}+x+k\geqslant x+\ln x=e^{\ln x}+\ln x$， (8分)

构造函数 $F(x)=e^x+x$，上式等价于 $F(x+k)\geqslant F(\ln x)$. (9分)

易知 $F(x)$ 为单调递增函数，所以 $x+k\geqslant \ln x$，等价于 $k\geqslant \ln x-x$. (10分)

设函数 $G(x)=\ln x-x(x>0)$，

求导可得 $G'(x)=\frac{1-x}{x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$G'(x)>0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$G'(x)<0$.

由此可得 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减， (11分)

即可得 $G(x)_{\max}=G(1)=-1$， (12分)

由此可得 k 的取值范围是 $[-1,+\infty)$. (13分)

(3) $H(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

对函数 $H(x)=e^{x+k}+(k+1)x-x\ln x$ 求导可得 $H'(x)=e^{x+k}+k-\ln x$， (14分)

由(2)可知，当 $k\in[-1,+\infty)$ 时，$H'(x)\geqslant 0$，

即可得 $H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以函数 $H(x)$ 至多只有一个零点. (15分)

所以当函数 $H(x)=e^{x+k}+(k+1)x-x\ln x$ 至少有两个相异的零点时，$k<-1$. (16分)

又因为 k 为整数，所以不妨令 $k=-2$.

则 $H(x)=e^{x-2}-x-x\ln x$，

当 $x\to 0$ 时，$H(x)\to e^{-2}>0$，

$H(1)=e^{-1}-1<0$，

当 $x\to+\infty$ 时，$H(x)\to+\infty$，

此时函数 $H(x)$ 至少存在两个零点，由此可得整数 k 的最大值为 -2. (17分)

19. **解法一**：(1)由题意可知点 $A(1,0)$，$A_n(2^n,n)$，$A_{n+1}(2^{n+1},n+1)$，

结合题中所给的面积公式可得三角形 AA_nA_{n+1} 的面积为 $\frac{1}{2}|(2^n-1)\cdot(n+1-0)-(2^{n+1}-1)\cdot(n-0)|=(n-1)2^{n-1}+\frac{1}{2}$. (2分)

由题意可知点 $A(1,0)$，$M_1(2,\log_2 2)$，$M_2(3,\log_2 3)$，$M_3(4,\log_2 4)$，$B_2(2^2,0)$，在坐标系中描出各点的大致位置，

观察得五边形 $AM_1M_2M_3B_2$ 可以近似分割为三个三角形和两个矩形，其中三个三角形的面积和为 $\frac{1}{2}[(\log_2 2-0)\times1+(\log_2 3-\log_2 2)\times1+(\log_2 4-\log_2 3)\times1]=1$，

两个矩形的面积和为 $1\times\log_2 2+1\times\log_2 3=1+\log_2 3$， (4分)

则五边形 $AM_1M_2M_3B_2$ 的面积为 $2+\log_2 3$. (5分)

(2)由(1)可知 $P_n=(n-1)\cdot 2^{n-1}+\frac{1}{2}$，

设 $c_n=(n-1)\cdot 2^{n-1}$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项的和为 T_n，

即可得 $T_n=2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}$，

则 $2T_n=2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n$， (7分)

两式相减可得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-(n-1)\cdot 2^n$，

即 $-T_n=(2-n)\cdot 2^n-2$，

从而可得 $T_n=(n-2)\cdot 2^n+2$. (9分)

综上可得数列 $\{P_n\}$ 的前 n 项的和为 $(n-2)\cdot 2^n+\frac{n}{2}+2$. (10分)

为了估算 D_n 的面积还需考虑由点 $(1,0)$，$(2^{n+1},0)$，$(2^{n+1},n+1)$ 构成的三角形的面积，

则该三角形的面积为 $\frac{1}{2}(2^{n+1}-1)(n+1)$. (11分)

综上，知 $S_n'=(n-2)\cdot 2^n+\frac{n}{2}+2+\frac{1}{2}(2^{n+1}-1)(n+1)=(2n-1)\cdot 2^n+\frac{3}{2}$. (12分)

(3)证明：多边形 $AM_1M_2M_3\cdots M_{2^{n+1}-1}B_{n+1}$ 可分割为不同的三角形以及矩形进行运算.

其中三角形的面积和为 $\frac{1}{2}[\log_2 2+\log_2 3-\log_2 2+\cdots+\log_2(2^{n+1})-\log_2(2^{n+1}-1)]=\frac{n+1}{2}$， (13分)

矩形的面积和为 $\log_2 2+\log_2 3+\cdots+\log_2(2^{n+1}-1)=\log_2[(2^{n+1}-1)!]$, (14 分)

由此可得对应的估算值 $S_n''=\log_2[(2^{n+1}-1)!]+\frac{n+1}{2}$. (15 分)

由于多边形 $AM_1M_2M_3\cdots M_{2^{n+1}-1}B_{n+1}$ 包含多边形 $AA_1A_2A_3\cdots A_{n+1}B_{n+1}$,

从而可得 $S_n'<S_n''$,

即 $(2n-1)\cdot 2^n+\frac{3}{2}<\log_2[(2^{n+1}-1)!]+\frac{n+1}{2}$, (16 分)

化简即可得不等式 $\log_2[(2^{n+1}-1)!]+\frac{n}{2}-(2n-1)\cdot 2^n>1(n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立. (17 分)

解法二:(1)由题意可知点 $A(1,0)$,$A_n(2^n,n)$,$A_{n+1}(2^{n+1},n+1)$,结合题中所给的面积公式可得三角形 AA_nA_{n+1} 的面积为 $\frac{1}{2}|(2^n-1)\cdot(n+1-0)-(2^{n+1}-1)\cdot(n-0)|=(n-1)2^{n-1}+\frac{1}{2}$. (2 分)

由题意可知点 $A(1,0)$,$M_1(2,\log_2 2)$,$M_2(3,\log_2 3)$,$M_3(4,\log_2 4)$,$B_2(2^2,0)$,记 $M_n'(n+1,0)$,

则五边形 $AM_1M_2M_3B_2$ 的面积为 $S_{\triangle AM_1M_1'}+S_{梯形M_1M_1'M_2'M_2}+S_{梯形M_2M_2'M_3'M_3}=\frac{1}{2}[\log_2 2+(\log_2 2+\log_2 3)+(\log_2 3+\log_2 4)]=2+\log_2 3$. (5 分)

(2)由(1)可知 $P_n=(n-1)\cdot 2^{n-1}+\frac{1}{2}$,

设 $c_n=(n-1)\cdot 2^{n-1}$,数列$\{c_n\}$的前 n 项的和为 T_n.

即可得 $T_n=2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}$,

$2T_n=2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n$, (7 分)

两式相减可得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-(n-1)\cdot 2^n$,

即可得 $-T_n=(2-n)\cdot 2^n-2$,

从而可得 $T_n=(n-2)\cdot 2^n+2$, (9 分)

综上可得数列$\{P_n\}$的前 n 项的和为 $(n-2)\cdot 2^n+\frac{n}{2}+2$. (10 分)

记 $A_n'(2^n,0)$,

则 $S_n'=S_{\triangle AA_1A_1'}+S_{梯形A_1A_1'A_2'A_2}+S_{梯形A_2A_2'A_3'A_3}+\cdots+S_{梯形A_nA_n'A_{n+1}'A_{n+1}}$

$=\frac{1}{2}[(2-1)\times 1+(1+2)\times(2^2-2)+(2+3)\times(2^3-2^2)+\cdots+(n+n+1)\times(2^{n+1}-2^n)]$

$=\frac{1}{2}[1\times 1+3\times 2+5\times 2^2+\cdots+(2n+1)\times 2^n]$,

所以 $2S_n'=\frac{1}{2}[1\times 2+3\times 2^2+\cdots+(2n-1)\times 2^n-(2n+1)\times 2^{n+1}]$.

所以 $-S_n'=\frac{1}{2}[1+2\times 2+2\times 2^2+\cdots+2\times 2^n-(2n+1)\times 2^{n+1}]$

$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{2\times 2\times(1-2^n)}{1-2}-(2n+1)\times 2^{n+1}\right]$

$=(1-2n)\times 2^n-\frac{3}{2}$.

所以 $S_n'=(2n-1)\cdot 2^n+\frac{3}{2}$. (12 分)

(3)证明:多边形 $AM_1M_2M_3\cdots M_{2^{n+1}-1}B_{n+1}$ 的面积

$S_n''=S_{\triangle AM_1M_1'}+S_{梯形M_1M_1'M_2'M_2}+S_{梯形M_2M_2'M_3'M_3}+\cdots+S_{梯形M_{2^{n+1}-2}M'_{2^{n+1}-2}M'_{2^{n+1}-1}M_{2^{n+1}-1}}$

$=\frac{1}{2}\{\log_2 2+(\log_2 2+\log_2 3)+(\log_3 3+\log_3 4)+\cdots+[\log_2(2^{n+1}-1)+\log_2 2^{n+1}]\}$

$=\frac{1}{2}\{2[\log_2 2+\log_2 3+\log_3 4+\cdots+\log_2(2^{n+1}-1)]+\log_2 2^{n+1}\}$

$=\log_2[(2^{n+1}-1)!]+\frac{n+1}{2}$. (15 分)

由于多边形 $AM_1M_2M_3\cdots M_{2^{n+1}-1}B_{n+1}$ 包含多边形 $AA_1A_2A_3\cdots A_{n+1}B_{n+1}$,

从而可得 $S_n'<S_n''$,

即 $(2n-1)\cdot 2^n+\frac{3}{2}<\log_2[(2^{n+1}-1)!]+\frac{n+1}{2}$, (16 分)

即不等式 $\log_2[(2^{n+1}-1)!]+\frac{n}{2}-(2n-1)\cdot 2^n>1(n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立. (17 分)