

高三数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围:高考范围。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 i 为虚数单位, 若 $\frac{3-i}{z} = -i$, 则 $z =$
- A. $1+3i$ B. $1-3i$
C. $-1-3i$ D. $-1+3i$
2. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 $P(s, t)$ 在 C 上, 且 $|PF| = 3$, O 为原点, 则 $|OP| =$
- A. 4 B. 6 C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$
3. 印刷电路板(PCB)是支撑数字产业的核心组件, 中国在全球已形成显著竞争优势. 某机构调研得到 2021—2025 年度中国 PCB 市场规模(单位: 千亿元)依次为 3.88, 3.84, 4.16, 4.46, 4.71, 则这 5 个数据的 40% 分位数是
- A. 4.00 B. 4.02 C. 3.84 D. 3.88
4. 若向量 $\mathbf{a} = (-1, 2)$, $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (3, 0)$, 记 $\theta = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, 则 $\cos 2\theta =$
- A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$
C. $-\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{5}$
5. 已知正数 x, y 满足 $x + y = xy$, 则 $x + 4y$ 的最小值为
- A. 7 B. 9 C. 6 D. 8
6. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a = 4, A = \frac{\pi}{3}, \sin B + \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, 则 $bc =$
- A. 16 B. 20 C. $\frac{20}{3}$ D. $\frac{80}{3}$

7. 已知正四面体 $ABCD$ 各条棱的中点都在球 O 的表面上, 则球 O 的表面积与该正四面体的表面积之比为

- A. $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$ B. $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}\pi}{36}$ D. $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

8. 若函数 $f(x) = ae^x + bx^2$ 存在极大值点 x_1 和极小值点 $x_2, x_1 < x_2$, 其中 a, b 都是实数, 则

- A. $ae + b < 0$ B. $a(e-1) + 2b < 0$
C. $2a + b < 0$ D. $2a + b(e-2) < 0$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 已知集合 $M = \{1, 2\}$, 若集合 N 满足 $M \cap N = \emptyset$, 则 N 可以是

- A. $\{x | x^2 - x \leq 0\}$
B. $\{x | x^2 + 2x = 0\}$
C. $\left\{y \left| y = 1 - \frac{1}{x^2} \right.\right\}$
D. $\{x | x = 3n - 1, n \in \mathbf{Z}\}$

10. 若 $(-1+x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6 + a_7x^7$, 则

- A. $\sum_{i=1}^7 |a_i| = 126$
B. $a_i \leq a_3 (i=0, 1, 2, 3, \cdots, 7)$
C. 从 $a_0, a_1, \cdots, a_7$ 这 8 个数中任取 2 个, 这两个数的积为正数的取法有 12 种
D. 从 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_7$ 这 8 个数中任取 3 个, 这三个数的和等于 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_7$ 中某数的取法有 28 种

11. 已知定义域与值域均为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, f(f(x_1 - x_2)) = f(2x_1) + f(-2x_2) - 1$, 且 $f(0) = -1$, 则

- A. $f(-1) = -3$
B. $\sum_{i=-2026}^{2026} f(i) = -4052$
C. $\exists k \in \mathbf{R}, g(x) = f(x) + k$ 是奇函数
D. $\exists k \in \mathbf{R}, g(x) = f(x) + kx$ 满足 $g(x+1) = g(x)$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 已知 $2^a = 3, 3^b = 5$, 用 a, b 表示 $\lg 5 =$ _____.

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 记 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, C 经过点 $P(c, y_1), Q(c, y_2) (y_1 \neq y_2)$, 且 $|PQ| = \sqrt{2}|OP| (O \text{ 为原点})$, 则 C 的离心率为_____.

14. 若函数 $f(x) = \left| |a| + \sin x \right| + \left| |a| - \sin x \right| - a - \frac{2}{3}$ 有零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3 - 3a_n$.

(1) 证明： $\{a_n\}$ 是等比数列；

(2) 若 $a_3, \frac{1}{3}S_3$ 分别是等差数列 $\{b_n\}$ 的第 1 项与第 3 项，求 $\{b_n\}$ 的公差 d .

16. (本小题满分 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 2，点 $M(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

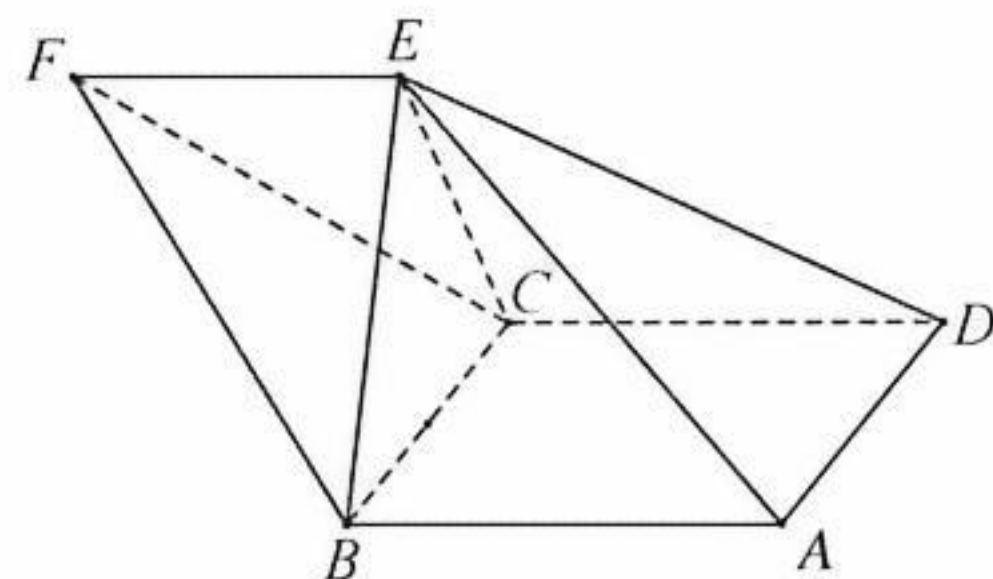
(2) 设直线 $l: y = x + m (m > 0)$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点. O 是坐标原点， $\triangle OAB$ 的面积是 $\frac{4}{5}$ ，求实数 m 的值.

17. (本小题满分 15 分)

如图，四棱锥 $E-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形， $EF \parallel AB$ ， $\triangle BCE$ 是正三角形， $BF = 5$ ，三棱锥 $F-BCE$ 的体积是四棱锥 $E-ABCD$ 体积的 $\frac{3}{8}$.

(1) 求证：平面 $ABE \perp$ 平面 BCE ；

(2) 求直线 CF 与平面 ADE 所成角的正弦值.



18. (本小题满分 17 分)

春节期间,某商家开展购物抽奖活动,部分活动规则如下:在一个不透明的抽奖箱中放入 $n(n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$ 张大小形状完全相同的卡片,其中有 $m(1 \leq m < n, m \in \mathbf{N}^*)$ 张卡片上标有“恭喜中奖”,其余都标有“谢谢参与”.

(1)若 $n=10, m=2$,每位顾客可以一次性抽取 2 张卡片,每张“恭喜中奖”卡片可以兑换精美礼品 1 份.现顾客甲参加抽奖活动.

(i)在顾客甲抽中“恭喜中奖”卡片的前提下,顾客甲抽中“谢谢参与”卡片的概率;

(ii)设顾客甲获得的精美礼品的份数为 X ,求 X 的分布列与方差;

(2)商家根据购物次序给每位顾客编号,编号的个位数字是 8 的顾客的抽取规则如下:顾客每次抽取 1 张卡片,抽到“谢谢参与”卡片就放回抽奖箱,继续抽取,抽中“恭喜中奖”卡片就停止抽取,赠送精美礼品 1 份,如果抽取 n 次仍然没有抽到“恭喜中奖”卡片,那么停止抽取,顾客不能获得精美礼品.若顾客乙编号的个位数字是 8,记顾客乙抽取的次数是 Y ,求 Y 的数学期望.

19. (本小题满分 17 分)

已知函数 $f(x) = (x-a)e^{\frac{x}{a}} (a > 0)$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处的切线方程;

(2)设 $t > 0$,证明:对任意 $s \in (-t, t)$,都有 $f(s) < f(t)$;

(3)若数列 $\{x_n\}$ 满足 $f(x_n) \leq -\frac{a}{2n}$,证明: $\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{a} < n - \frac{\ln(n+1)}{2e}$.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. A 由 $\frac{3-i}{z} = -i$, 得 $z = \frac{3-i}{-i} = \frac{(3-i)i}{-i \cdot i} = 1+3i$. 故选 A.
2. D 由抛物线的定义, 得 $|PF| = s+1=3$, 解得 $s=2$, 所以 $t^2=4s=8$, 所以 $|OP| = \sqrt{s^2+t^2} = \sqrt{4+8} = 2\sqrt{3}$. 故选 D.
3. B 因为 $5 \times 40\% = 2$, 故这 5 个数据的 40% 分位数是将数据从小到大排列后第 2 个数据 (3.88) 与第 3 个数据 (4.16) 的平均数 4.02. 故选 B.
4. C 由题意, 得 $\mathbf{b} = (-1, 2) + (3, 0) = (2, 2)$, 所以 $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{2}{\sqrt{5} \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 所以 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2 \times \frac{1}{10} - 1 = -\frac{4}{5}$. 故选 C.
5. B 由 $x+y=xy$, 得 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 所以 $x+4y = (x+4y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 5 + \frac{4y}{x} + \frac{x}{y} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{4y}{x} \times \frac{x}{y}} = 9$, 当且仅当 $\frac{4y}{x} = \frac{x}{y}$, 即 $x=2y=3$ 时等号成立. 故选 B.
6. C 由 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, 得 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{8}b$, $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{8}c$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{8}(b+c) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, 即 $b+c=6$, 又 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc = (b+c)^2 - 3bc$, 所以 $bc = \frac{(b+c)^2 - a^2}{3} = \frac{6^2 - 4^2}{3} = \frac{20}{3}$, 易知此时三角形有解. 故选 C.
7. D 设正四面体的棱长为 $2a$, 则表面积为 $S_1 = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2a)^2 = 4\sqrt{3}a^2$; 该正四面体的各条棱的中点构成棱长为 a 的正八面体, 其各顶点都在半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 的球 O 的表面上, 则球 O 的表面积为 $S_2 = 4\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a \right)^2 = 2\pi a^2$, 所以 $\frac{S_2}{S_1} = \frac{2\pi a^2}{4\sqrt{3}a^2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$. 故选 D.
8. B 由题意知 $f'(x) = ae^x + 2bx = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 , 显然 $ab \neq 0$, 所以 $\frac{x}{e^x} = -\frac{a}{2b}$, 令 $g(x) = \frac{x}{e^x}$, 则 $g'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, $x < 1$ 时, $g'(x) > 0$; $x > 1$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 1)$, 单调递减区间为 $(1, +\infty)$, $g(1) = \frac{1}{e}$, 又 $g(0) = 0$, 所以方程 $\frac{x}{e^x} = -\frac{a}{2b}$ 有两个解 x_1, x_2 时, $0 < -\frac{a}{2b} < \frac{1}{e}$, 由 x_1, x_2 分别是 $f(x)$ 的极大值点与极小值点且 $x_1 < x_2$ 知 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, x_1), (x_2, +\infty)$, 单调递减区间为 (x_1, x_2) , 所以 $0 < x_1 < 1 < x_2$. 当 $x < x_1$ 时, $\frac{x}{e^x} < -\frac{a}{2b}$, 当 $a > 0, b < 0$ 时, 有 $f'(x) = ae^x + 2bx > 0$, 符合题意, 由 $0 < -\frac{a}{2b} < \frac{1}{e}$ 得 $ae + 2b < 0$, 又 $0 < e - 1 < e$, 所以 $a(e-1) + 2b < ae + 2b < 0$, B 正确; 当 $a < 0, b > 0$ 时, 有 $f'(x) = ae^x + 2bx < 0$, 不合题意. 取 $a=1, b=-e$, 则 $-\frac{a}{2b} = \frac{1}{2e}$, $f(x)$ 存在极大值点 x_1 和极小值点 x_2 , 但 $ae+b=0$, A 错误; 取 $a=1, b=-2$, 则 $-\frac{a}{2b} = \frac{1}{4}$, $2a+b=0, 2a+b(e-2)=2-2(e-2)=2(3-e) > 0$, CD 错误. 故选 B.
9. BC 对于 A, $N = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$, 则 $M \cap N = \{1\}$, 不满足题意; 对于 B, $N = \{0, -2\}$, 则 $M \cap N = \emptyset$, 满足题意; 对于 C, $N = \{y | y < 1\}$, 则 $M \cap N = \emptyset$, 满足题意; 对于 D, 当 $n=1$ 时, $3n-1=2, 2 \in M \cap N$, 不满足题意. 故选 BC.
10. BCD 通项 $T_{r+1} = C_7^r (-1)^{7-r} x^r$, 所以 $a_r = C_7^r (-1)^{7-r} (r=0, 1, \dots, 7)$, 得 $|a_r| = C_7^r$, 所以 $\sum_{i=1}^7 |a_i| = C_7^1 + C_7^2 + \dots + C_7^7 = 2^7 - 1 = 127$, 故 A 错误; 由 $a_r = C_7^r (-1)^{7-r}$, 得 $a_3 = C_7^3 (-1)^4 = 35, a_4 = C_7^4 (-1)^3 = -35$, 由二项式系数的性质知 a_3 最大, 故 B 正确; 由 $a_r = C_7^r (-1)^{7-r}$, 得 a_0, a_2, a_4, a_6 为负数, a_1, a_3, a_5, a_7 为正数, 所以从 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_7$ 中任取 2 个, 这两个数之积为正数的取法有 $C_4^2 + C_4^2 = 12$ 种, 故 C 正确; 由题意知 $a_0 = -1, a_1 = 7, a_2 = -21, a_3 = 35, a_4 = -35, a_5 = 21, a_6 = -7, a_7 = 1$, 所以 $a_0 + a_7 = a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4 = 0$, 所以从 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_7$ 中任取 3 个, 其和仍在该组数据中的取法有 $4C_4^1 = 24$ 种, 又 $a_1 + a_2 + a_3 = 7 - 21 + 35 = 21 = a_5, a_4 + a_5 + a_6 = -21 = a_2, a_2 + a_3 + a_6 = 7 = a_1, a_1 + a_4 + a_5 = -7 = a_6$, 所以共有 $24 + 4 = 28$ 种, 故 D 正确. 故选 BCD.
11. ACD 因为 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, f(f(x_1 - x_2)) = f(2x_1) + f(-2x_2) - 1$, 取 $x_1 = x_2 = 0$, 得 $f(f(0)) = 2f(0) - 1$, 即 $f(-1) = -3$, 故 A 正确; 取 $x_1 = x_2 = \frac{x}{2}$, 得 $f(f(0)) = f(x) + f(-x) - 1$, 即 $f(x) + f(-x) = -2$, 所以 $\sum_{i=-2026}^{2026} f(i) = -2 \times 2026 + f(0) = -4053$, 故 B 错误; 当 $k=1$ 时, $g(x) + g(-x) = f(x) + 1 + f(-x) + 1 = 0$, 所以当 $k=1$ 时, $g(x)$ 是奇函数, 故 C 正确; 取 $x_1 = \frac{x}{2}, x_2 = -\frac{x}{2}$, 得 $f(f(x)) = 2f(x) - 1$. 设 $f(x) = t$, 则 t 的取值范围是 $\mathbf{R}$, 且 $f(t) = 2t - 1$, 所以 $f(x) = 2x - 1$. 当 $k=-2$ 时, $g(x) = f(x) - 2x = -1$, 所以 $g(x+1) = g(x) = -1$, 故

D 正确. 故选 ACD.

12. $\frac{ab}{1+ab}$ 由 $2^a = 3, 3^b = 5$, 得 $a = \log_2 3, b = \log_3 5$, 所以 $\log_2 5 = \log_2 3 \log_3 5 = ab$, 所以 $\lg 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 10} = \frac{\log_2 5}{\log_2 2 + \log_2 5} = \frac{\log_2 5}{1 + \log_2 5} = \frac{ab}{1+ab}$.

13. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 由题意, 知 PQ 过 C 的右焦点 F , 且 $PQ \perp OF$, 易求得 $|PF| = \frac{b^2}{a}$, 由 $|PQ| = \sqrt{2}|OP|$, 得 $\triangle POF$ 是等腰直角三角形, OP 为斜边, 所以 $\tan \angle POF = \tan 45^\circ = \frac{|PF|}{c} = \frac{b^2}{ac}$, 所以 $b^2 = ac$, 即 $c^2 - ac - a^2 = 0, e^2 - e - 1 = 0$, 所以 C 的离心率 $e = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

14. $\left[-\frac{2}{9}, \frac{2}{3}\right]$ ①当 $|a| \geq 1$ 时, $f(x) = 2|a| - a - \frac{2}{3}$, 若 $a \geq 1$, 则 $f(x) = a - \frac{2}{3} > 0$; 若 $a \leq -1$, 则 $f(x) = -3a - \frac{2}{3} \geq 3 - \frac{2}{3} > 0$, 故当 $|a| \geq 1$ 时, $f(x)$ 没有零点; ②当 $|a| < 1$ 时, 若 $|\sin x| \leq |a|$, 则 $-|a| \leq \sin x \leq |a|$, $f(x) = |a| + \sin x + |a| - \sin x - a - \frac{2}{3} = 2|a| - a - \frac{2}{3}$, 若 $f(x)$ 有零点, 则 $2|a| - a - \frac{2}{3} = 0$, 解得 $a = \frac{2}{3}$, 或 $a = -\frac{2}{9}$; 若 $|\sin x| > |a|$, 则 $\sin x > |a|$, 或 $\sin x < -|a| \leq |a|$, 若 $\sin x > |a|$, 则 $f(x) = |a| + \sin x + \sin x - |a| - a - \frac{2}{3} = 2\sin x - a - \frac{2}{3}$; 若 $\sin x < -|a|$, 则 $f(x) = -|a| - \sin x + |a| - \sin x - a - \frac{2}{3} = -2\sin x - a - \frac{2}{3}$, 所以 $f(x) = 2|\sin x| - a - \frac{2}{3}$, 若 $f(x)$ 有零点, 则 $|\sin x| = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{3}\right) > |a|$. 又 $|a| < 1$, 解得 $-\frac{2}{9} < a < \frac{2}{3}$. 综上, a 的取值范围是 $\left[-\frac{2}{9}, \frac{2}{3}\right]$.

15. (1) 证明: 因为 $S_n = 3 - 3a_n$, 所以 $S_{n+1} = 3 - 3a_{n+1}$, 1 分
两式相减, 得 $a_{n+1} = 3 - 3a_{n+1} - (3 - 3a_n) = 3a_n - 3a_{n+1}$, 3 分
所以 $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n$, 4 分

又 $S_n = 3 - 3a_n$, 得 $a_1 = S_1 = 3 - 3a_1$, 解得 $a_1 = \frac{3}{4}$, 6 分

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{4}$, 故 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{3}{4}$, 公比为 $\frac{3}{4}$ 的等比数列. 7 分

(2) 解: 由 (1) 得 $a_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ 8 分

$b_1 = a_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$, 9 分

法一: $b_2 = \frac{b_1 + b_3}{2} = \frac{a_3 + \frac{1}{3}S_3}{2} = \frac{3a_3 + S_3}{6} = \frac{3a_3 + 3 - 3a_3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, 11 分

所以数列 $\{b_n\}$ 的公差 $d = b_2 - b_1 = \frac{1}{2} - \frac{27}{64} = \frac{5}{64}$ 13 分

法二: $\{b_n\}$ 的公差 $d = \frac{1}{2}(b_3 - b_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}S_3 - a_3\right) = \frac{1}{2}(1 - 2a_3) = \frac{1}{2}\left[1 - 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3\right] = \frac{5}{64}$ 13 分

16. 解: (1) 因为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 2,
所以有 $2b = 2 \Rightarrow b = 1$, 2 分

又因为点 $M\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆 C 上, 所以有 $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$,

解得 $a = 2$, 4 分

可得该椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 5 分

(2) 将直线方程与椭圆方程联立: $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = x + m, \end{cases}$
化简得: $5x^2 + 8mx + 4(m^2 - 1) = 0$, 7 分

因为直线 $l: y = x + m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点,
所以有 $\Delta = (8m)^2 - 4 \times 5 \times 4(m^2 - 1) = 80 - 16m^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则有 $x_1 + x_2 = -\frac{8m}{5}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{5}$, 9 分

$|AB| = \sqrt{1+1} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \times \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{4\sqrt{2}\sqrt{5-m^2}}{5}$ 11 分

点 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{m}{\sqrt{2}}$, 所以 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{2}{5} m \sqrt{5-m^2}$, 13 分

由 $S_{\triangle OAB} = \frac{4}{5}$ 可得 $\frac{2}{5} m \sqrt{5-m^2} = \frac{4}{5}$,

即 $m=1$ 或 2 , 满足 $m>0, -\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$,

所以实数 m 的值是 1 或 2 15 分

17. (1) 证明: 在正方形 $ABCD$ 中, $AB \perp BC$, 设 AB 与平面 BCE 所成的角为 α ,

因为 $EF \parallel AB$, 所以 EF 与平面 BCE 所成的角也是 α ,

所以 A 到平面 BCE 的距离为 $AB \sin \alpha$, F 到平面 BCE 的距离为 $EF \sin \alpha$ 1 分

连接 AC , 因为 $V_{\text{四棱锥 } E-ABCD} = 2V_{\text{三棱锥 } E-ABC} = 2V_{\text{三棱锥 } A-BCE} = \frac{2}{3} AB \sin \alpha \times S_{\triangle BCE}$, $V_{\text{三棱锥 } F-BCE} = \frac{1}{3} EF \sin \alpha \times S_{\triangle BCE}$,

由题意知 $\frac{2}{3} AB \sin \alpha \times S_{\triangle BCE} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{3} EF \sin \alpha \times S_{\triangle BCE}$, 显然 $\sin \alpha \neq 0$, 所以 $EF = \frac{3}{4} AB = \frac{3}{4} \times 4 = 3$, 3 分

又 $BE=4, BF=5$, 所以 $BE^2 + EF^2 = BF^2$, 所以 $BE \perp EF$, 4 分

因为 $EF \parallel AB$, 所以 $AB \perp BE$,

又 $AB \perp BC, BC \cap BE = B, BC, BE \subset \text{平面 } BCE$, 所以 $AB \perp \text{平面 } BCE$, 6 分

因为 $AB \subset \text{平面 } ABE$, 所以平面 $ABE \perp \text{平面 } BCE$ 7 分

(2) 解: 由 (1) 知 $AB \perp \text{平面 } BCE, AB \subset \text{平面 } ABCD$,

所以平面 $BCE \perp \text{平面 } ABCD$ 8 分

分别取 BC, AD 的中点 O, G , 连接 OE, OG .

因为 $\triangle BCE$ 是正三角形, O 是 BC 边的中点, 所以 $EO \perp BC$.

又平面 $BCE \perp \text{平面 } ABCD$, 平面 $BCE \cap \text{平面 } ABCD = BC, EO \subset \text{平面 } BCE$,

所以 $EO \perp \text{平面 } ABCD$, 则 OB, OG, OE 两两垂直. 以 O 为原点, 直线 OB, OG, OE 分

别为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(2, 4, 0)$,

$C(-2, 0, 0), D(-2, 4, 0), E(0, 0, 2\sqrt{3}), F(0, -3, 2\sqrt{3})$,

所以 $\vec{AD} = (-4, 0, 0), \vec{AE} = (-2, -4, 2\sqrt{3}), \vec{CF} = (2, -3, 2\sqrt{3})$ 10 分

设平面 ADE 的一个法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{AD} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{AE} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -4x = 0, \\ -2x - 4y + 2\sqrt{3}z = 0, \end{cases}$$

令 $y = \sqrt{3}$, 解得 $x = 0, z = 2$, 所以 $\mathbf{n} = (0, \sqrt{3}, 2)$, 12 分

设直线 CF 与平面 ADE 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{|\vec{CF} \cdot \mathbf{n}|}{|\vec{CF}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{5 \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{35}$.

所以直线 CF 与平面 ADE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{35}$ 15 分

18. 解: (1) (i) 记顾客甲抽中“恭喜中奖”卡片为事件 A , 顾客甲抽中“谢谢参与”卡片为事件 B ,

则 $P(A) = \frac{C_2^2 + C_2^1 C_8^1}{C_{10}^2} = \frac{17}{45}, P(AB) = \frac{C_2^1 C_8^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}$, 2 分

所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{16}{17}$,

即在顾客甲抽中“恭喜中奖”卡片的前提下, 顾客甲抽中“谢谢参与”卡片的概率为 $\frac{16}{17}$ 4 分

(ii) 由题意知 X 的可能取值为 $0, 1, 2$,

则 $P(X=0) = \frac{C_2^0 C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}, P(X=1) = \frac{C_2^1 C_8^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}, P(X=2) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$.

X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

..... 6 分

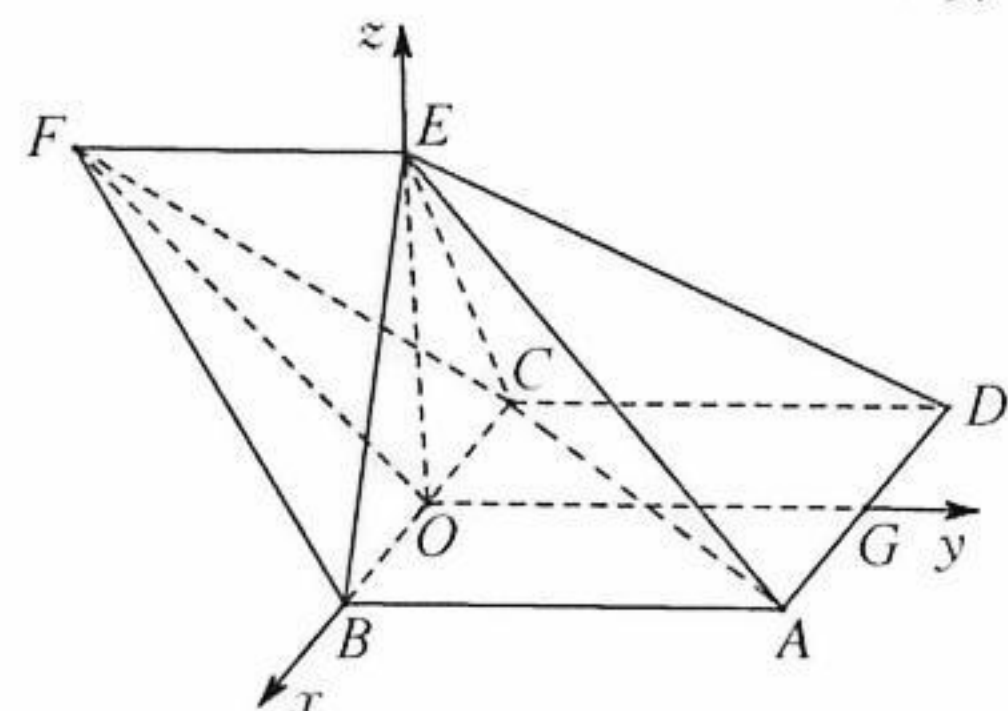
所以 $E(X) = 0 \times \frac{28}{45} + 1 \times \frac{16}{45} + 2 \times \frac{1}{45} = \frac{2}{5}$, 7 分

$D(X) = \left(0 - \frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{28}{45} + \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{16}{45} + \left(2 - \frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{1}{45} = \frac{64}{225}$ 9 分

(2) 由题意知 Y 的可能取值为 $1, 2, 3, \dots, n$, 则 $P(Y=k) = \left(\frac{n-m}{n}\right)^{k-1} \left(\frac{m}{n}\right), 1 \leq k \leq n-1, k \in \mathbf{N}^+$,

$P(Y=n) = \left(\frac{n-m}{n}\right)^{n-1} \left(\frac{m}{n}\right) + \left(\frac{n-m}{n}\right)^n = \left(\frac{n-m}{n}\right)^{n-1}$, 11 分

所以 $E(Y) = \sum_{k=1}^{n-1} \left[k \left(\frac{n-m}{n}\right)^{k-1} \left(\frac{m}{n}\right) \right] + n \left(\frac{n-m}{n}\right)^{n-1} = \frac{m}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left[k \left(\frac{n-m}{n}\right)^{k-1} \right] + n \left(\frac{n-m}{n}\right)^{n-1}$, 12 分



$$\text{设 } T_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \left[k \left(\frac{n-m}{n} \right)^{k-1} \right] = 1 \times \left(\frac{n-m}{n} \right)^0 + 2 \times \left(\frac{n-m}{n} \right)^1 + 3 \times \left(\frac{n-m}{n} \right)^2 + \dots + (n-1) \left(\frac{n-m}{n} \right)^{n-2},$$

$$\text{则 } \left(\frac{n-m}{n} \right) T_{n-1} = 1 \times \left(\frac{n-m}{n} \right)^1 + 2 \times \left(\frac{n-m}{n} \right)^2 + 3 \times \left(\frac{n-m}{n} \right)^3 + \dots + (n-1) \left(\frac{n-m}{n} \right)^{n-1},$$

$$\begin{aligned} \text{两式相减, 得 } \frac{m}{n} T_{n-1} &= \left(\frac{n-m}{n} \right)^0 + \left(\frac{n-m}{n} \right)^1 + \left(\frac{n-m}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n-m}{n} \right)^{n-2} - (n-1) \left(\frac{n-m}{n} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{n-m}{n} \right)^{n-1}}{1 - \frac{n-m}{n}} - (n-1) \left(\frac{n-m}{n} \right)^{n-1} = \frac{n}{m} - \frac{nm+n-m}{m} \cdot \left(\frac{n-m}{n} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } T_{n-1} = \frac{n^2}{m^2} - \frac{n^2 m + n^2 - mn}{m^2} \cdot \left(\frac{n-m}{n} \right)^{n-1}, \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } E(Y) &= \frac{m}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left[k \left(\frac{n-m}{n} \right)^{k-1} \right] + n \left(\frac{n-m}{n} \right)^{n-1} = \frac{n}{m} - \frac{nm+n-m}{m} \cdot \left(\frac{n-m}{n} \right)^{n-1} + n \left(\frac{n-m}{n} \right)^{n-1} \\ &= \frac{n}{m} - \frac{n-m}{m} \cdot \left(\frac{n-m}{n} \right)^{n-1}. \dots\dots\dots 17 \text{ 分} \end{aligned}$$

19. (1)解: 因为 $f'(x) = \frac{x}{a} e^{\frac{x}{a}}$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

所以 $f'(a) = e, f(a) = 0$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 处的切线方程为 $y = e(x - a)$. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

(2)证明: 因为 $a > 0$, 所以 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 递减;

$x > 0$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 递增; $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

因为 $s \in (-t, t)$, 所以 $0 \leq s < t$, 或 $-t < s < 0 < t$,

若 $0 \leq s < t$, 由 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增得 $f(s) < f(t)$; $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

若 $-t < s < 0 < t$, 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上递减, 所以 $f(s) < f(-t)$,

要证 $f(s) < f(t)$,

只要证 $f(-t) < f(t)$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

设 $F(x) = f(x) - f(-x), x > 0$,

$$\text{则 } F'(x) = f'(x) + f'(-x) = \frac{x}{a} e^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a} e^{-\frac{x}{a}} = \frac{x}{a} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) > 0,$$

所以 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $F(x) > F(0) = 0$, 所以 $f(-t) < f(t)$.

故 $f(s) < f(t)$. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

(3)证明: 由(2)知, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(0) = -a < 0, f(a) = 0$,

因为对任意 $k \in \mathbf{N}^+$, $-a < -\frac{a}{2k} < 0$,

所以存在唯一 $y_k \in (0, a)$, 使得 $f(y_k) = -\frac{a}{2k}$, 由 $f(x_k) \leq -\frac{a}{2k} = f(y_k)$ 得 $x_k \leq y_k, \frac{x_k}{a} \leq \frac{y_k}{a}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

首先证明: $\frac{y_k}{a} < 1 - \frac{1}{2ek}$. ①

设 $h(x) = (x - a)e^{\frac{x}{a}} - e(x - a)$,

则 $h'(x) = \frac{x}{a} e^{\frac{x}{a}} - e$ 递增, 因为 $h'(a) = 0$, 所以

当 $x \in (a, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 递增;

当 $x \in (-\infty, a)$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 递减, $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

所以 $h(x) \geq h(a) = 0$, 当且仅当 $x = a$ 时取“=”.

所以 $h(y_k) = f(y_k) - e(y_k - a) = -\frac{a}{2k} - e(y_k - a) > 0$, 即 $\frac{y_k}{a} < 1 - \frac{1}{2ek}$. $\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

其次证明: $\frac{1}{k} > \ln \frac{k+1}{k}, k \in \mathbf{N}^+$. ②

设 $t(x) = x - \ln(x+1), x > 0$,

则 $t'(x) = \frac{x}{x+1} > 0$, 所以 $t(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $t(x) > t(0) = 0$,

令 $x = \frac{1}{k}$, 得 $\frac{1}{k} > \ln \frac{k+1}{k}$. $\dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

$$\begin{aligned} \text{由①②得, } \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{a} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{y_k}{a} < n - \frac{1}{2e} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) < n - \frac{1}{2e} \left(\ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} \right) \\ &= n - \frac{1}{2e} \ln \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \right) = n - \frac{\ln(n+1)}{2e}. \end{aligned}$$

综上, 原不等式得证. $\dots\dots\dots 17 \text{ 分}$