保密★启用前

准考证号______________________________姓名____________

（在此卷上答题无效）

2024~2025学年福州市高三年级第三次质量检测

数学试题

2025.4

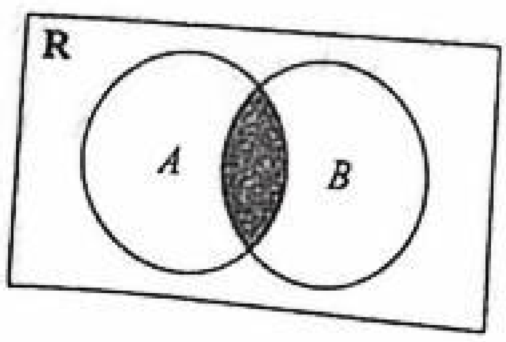
本试卷共4页，19小题，满分150分，考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知全集为$\mathbf{R}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{x\mid \log_2 x\in \mathrm{Z}\}$，则图中阴影部分表示的集合是



A．$\{1\}$　　B．$\{2\}$　　C．$\{1,2\}$　　D．$\{0,1,2,4\}$

2．若$z^2=-2\mathrm{i}$，则$|z|=$

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．4

3．已知随机变量$X\sim B(n,\frac{1}{2})$，若$E(X)=2$，则$P(X=2)=$

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{3}{8}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{5}{8}$

4．设$(1-2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=$

A．-2　　B．-1　　C．0　　D．1

5. 已知菱形$ABCD$的边长为2，E为AB的中点，则$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 3

6. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M为AB的中点，l为平面A_1MC_1与平面$ABCD$的交线，则

A. $l// AC_1$　　B. $l\perp AC_1$　　C. $l// BD_1$　　D. $l\perp BD_1$

7. 已知数列$\{a_n\}$是首项和公比均大于0的无穷等比数列，设甲:$\{a_n\}$为递增数列；乙:存在正整数N_0，当$n>N_0$时，$a_n>1$，则

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 设O为坐标原点，若曲线$y=x^2+1$和曲线$y=a\ln x(a>0)$上分别存在A，B两点，使得$\angle AOB=45°$，则a的取值范围为

A. $[\frac{e}{2},+\infty)$　　B. $[2e,+\infty)$　　C. $[\frac{e}{3},+\infty)$　　D. $[3e,+\infty)$

二、多项选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9. 已知直线$x=\frac{\pi}{3}$为函数$f(x)=\sin2x+a\cos2x$图象的一条对称轴，则

A. $f(x)$的最小正周期为2π　　B. $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $f(x)\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $f(x)$的图象关于点$(-\frac{\pi}{12},0)$对称

10. 过点$T(-3,0)$的直线交圆$C_1:(x-1)^2+y^2=1$于点P，Q，交圆$C_2:(x-5)^2+y^2=4$于点M，N，其中T，P，Q，M，N顺次排列．若$|TP|=3|PQ|$，则

A. $C_1P// C_2M$

B. $|MN|=2|PQ|$

C. $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}=14$

D. $|QM|=\sqrt{5}$

11．已知四棱锥$P-ABCD$的高为2，底面$ABCD$是边长为2的正方形，$PA=PB$，则

A．$\triangle PAD$的面积为定值

B．$\angle APD=\angle BPC$

C．四棱锥$P-ABCD$表面积的最小值为$3\sqrt{5}+4$

D．若四棱锥$P-ABCD$存在内切球，则该球半径为$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．

12．已知$\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=-3$，则$\dfrac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=$________．

13．已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{m}=1(m>0)$的焦点为$F_1$，$F_2$，$P$为$C$上的一点，若$\triangle PF_1F_2$的周长为18，则$C$的离心率为________．

14．6根长度相同的绳子平行放置在桌面上，分别将左、右两边的6个绳头各自随机均分成3组，然后将每组内的两个绳头打结，则这6根绳子恰能围成一个大圈的概率为________．

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（13分）

记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a\cos C-c\cos A=c+b$．

（1）求A；

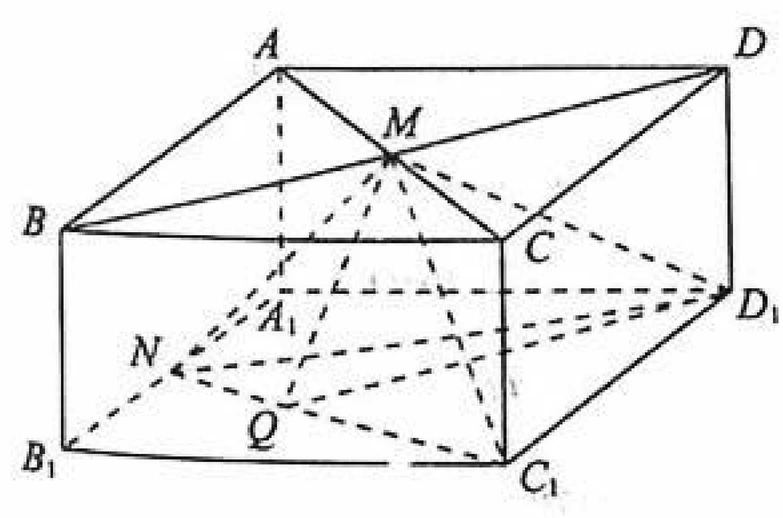
（2）D为边BC上一点，若$\angle BAD=90°$，且$BD=4DC=4$，求$\triangle ABC$的面积．

16．（15分）

如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AD=2AA_1$，AC与BD交于点M，N为棱A_1B_1的中点．

（1）证明：$MN\perp$平面MC_1D_1；

（2）设$\overrightarrow{NQ}=\lambda\overrightarrow{NC_1}$，其中$0<\lambda<1$，若二面角$Q\text{-}MD\text{-}C_1$的大小为60°，求$\lambda$．



17.（15分）

已知函数$f(x)=x^2+a\ln(x+1)$.

（1）当$a=-4$时，求$f(x)$的极小值；

（2）若$f(x)$存在唯一极值点x_0，证明：$f(x_0)+{x_0}^2\leqslant 0$.

18.（17分）

设抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，过F的直线l_1交C于A，B两点（A在第一象限），当l_1垂直于x轴时，$|AB|=4$.

（1）求C的方程；

（2）过F且与l_1垂直的直线l_2交C于D，E两点（D在第一象限），直线$x=1$与直线AD和BE分别交于P，Q两点.

（i）当l_1的斜率为$\frac{4}{3}$时，求$|PQ|$；

（ii）是否存在以PQ为直径的圆与y轴相切．若存在，求l_1，l_2的方程；若不存在，请说明理由．

19.（17分）

将区间$(0,1)$中的全体有理数按一定顺序排列得到数列$\{a_n\}$，规则如下：

①$a_n=\frac{p_n}{q_n}$，其中正整数p_n与q_n互质，如$p_1=1$，$q_1=2$；

②$q_n\leqslant q_{n+1}$，当且仅当$q_n=q_{n+1}$时，$p_n<p_{n+1}$.

（1）写出$\{a_n\}$的前5项；

（2）若$a_m=\frac{2023}{2024}$，$a_n=\frac{2024}{2025}$，求$n-m$；

（3）记$\{a_n\}$的前n项和为S_n，证明：$\frac{S_n}{n}\leqslant\frac{1}{2}$.

厦门市 2025 届高中毕业班第三次质量检测

数学试题答案及评分参考　　2025.4

选择题、填空题答案：1-4. CBBA　5-8. DDAC　9. BC　10. ABD　11. ABD　12 $\frac{1}{3}$

13 $\frac{4}{5}$　14. $\frac{8}{15}$　14 题结果未化简（如 $\frac{120}{225}$）也给分，12，13 题其它结果不得分。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	B	A	D	D	A	C

1. 答案：C

解析：易知 $B=\{x\,|\,x=2^k,k\in \mathbf{Z}\}$．所以 $A\cap B=\{1,2\}$，故选 C．

2. 答案：B

解析：$|z^2|=|z|^2=2$，所以 $|z|=\sqrt{2}$，故选 B．

3. 答案：B

解析：$E(X)=n\times\frac{1}{2}=2$，解得 $n=4$，所以 $P(X=2)=C_4^2(\frac{1}{2})^4=\frac{3}{8}$，故选 B．

4. 答案：A

解析：易知 $a_0=1$，令 $x=1$ 可得，$(-1)^5=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-1$，

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-2$，故选 A．

5. 答案：D

解析：$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}=\frac{\overrightarrow{AB}}{2}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=-\frac{\overrightarrow{AB}}{2}+\overrightarrow{AD}$，

所以 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}^2-\frac{\overrightarrow{AB}^2}{4}=3$，故选 D．

6. 答案：D

解析：设 N 为 BC 的中点，则 l 即为 MN 所在直线，故 $l\perp$ 平面 BDD_1B_1，

所以 $l\perp BD_1$，故选 D．

7. 答案：A

解析：若 $\{a_n\}$ 为递增数列，则 $a_1(1-q^{n-1})>0$，则公比 $q>1$，$a_n=a_1q^{n-1}$ 为指数型递增数列，易得存在正整数 N_0，当 $n>N_0$ 时，$a_n>1$．充分性成立；不妨设 $a_n=2$，此时 $\{a_n\}$ 不是递增数列，所以甲是乙的充分条件但不是必要条件，故选 A．

8. 答案：C

解析：设 $A(x_1,x_1^2+1)(x_1>0)$，则 $k_{OA}=\frac{x_1^2+1}{x_1}\geq 2$；设 $B(x_2,a\ln x_2)$，则 $k_{OB}=\frac{a\ln x_2}{x_2}\leq\frac{a}{e}$．

取 $k_{OA}=2$，$k_{OB}=\frac{a}{e}$，此时 $\tan\angle AOB=\frac{k_{OA}-k_{OB}}{1+k_{OA}k_{OB}}\leq\tan 45°$，解得 $a\geq\frac{e}{3}$，故选 C．

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

题号	9	10	11
答案	BC	ABD	ABD

9．答案：BC

解析：$f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，故选项 A 错误；

因为 $f'(\frac{\pi}{3})=2\cos\frac{2\pi}{3}-2a\sin\frac{2\pi}{3}=0$，解得 $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，故选项 B 正确；

由 B 可知，$f(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，所以 $f(x)\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故选项 C 正确；

$f(-\frac{\pi}{12})\ne 0$，故选项 D 错误．故选 BC．

10．答案：ABD

解析：考察 A 选项：$\because \frac{|TC_1|}{|TC_2|}=\frac{|C_1P|}{|C_2M|}=\frac{1}{2}$，$\angle TPC_1$，$\angle TMC_2$ 均为钝角，

因为 $\triangle TPC_1 \backsim \triangle TMC_2$，则 $\angle TPC_1=\angle TMC_2$，故 $C_1P \parallel C_2M$，A 选项正确．

考察 B 选项：同上述分析可知 $C_1Q \parallel C_2N$，所以 $\angle PC_1Q=\angle MC_2N$．

因为 $\frac{|C_1P|}{|C_2M|}=\frac{|C_1Q|}{|C_2N|}=\frac{1}{2}$，所以 $\triangle PC_1Q \backsim \triangle MC_2N$，$\frac{|PQ|}{|MN|}=\frac{1}{2}$，B 选项正确．

考察 C 选项：方法 1：取 PQ 中点 S，则 $\overline{TP}\cdot\overline{TQ}=(\overline{TS}+\overline{SP})\cdot(\overline{TS}+\overline{SQ})=\overline{TS}^2-\overline{SP}^2$

$=(\overline{TC_1}^2-\overline{C_1S}^2)-(\overline{PC_1}^2-\overline{C_1S}^2)=16-1=15$，C 选项错误．

方法 2：取 PQ 中点为 H，设 $|PQ|=a$，则 $|PH|=\frac{a}{2}$，$|TH|=\frac{7a}{2}$．

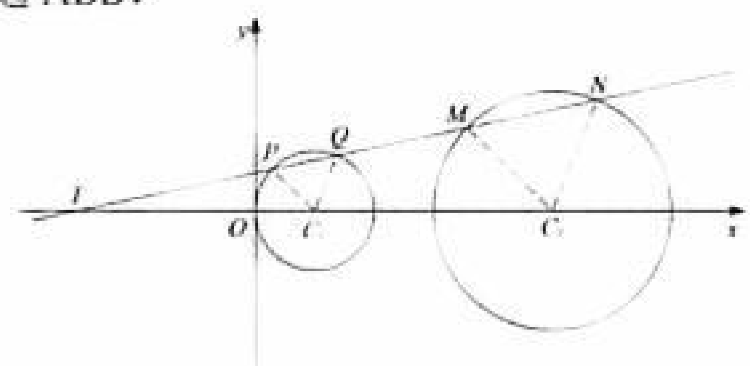
由勾股定理可得，$|C_1P|^2-|HP|^2+|HT|^2=|C_1T|^2$，

即 $1-(\frac{a}{2})^2+(\frac{7a}{2})^2=16$，解得 $|PQ|=a=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\overline{TP}\cdot\overline{TQ}=12\overline{PQ}^2=15$．

考察 D 选项：由题设及 C 选项的分析可知，$\overline{TP}\cdot\overline{TQ}=12\overline{PQ}^2=15$，所以 $|PQ|=\frac{\sqrt{5}}{2}$．

由 B 选项的分析可知，$|QM|=|QN|-|MN|=|TQ|-2|PQ|=2|PQ|=\sqrt{5}$，D 选项正确．

综上所述，本题应选 ABD．



11．答案：ABD

解析：因为$PA=PB$，所以P在底面$ABCD$的射影P_0在直线AB的垂直平分线上，过P_0作P_0H垂直AD于H，连接PH，则$PH\perp AD$，$PH=\sqrt{5}$，$\triangle PAD$的面积为$\frac{1}{2}PH\times AD=\sqrt{5}$，故选项A正确；

因为$\triangle PAD\cong\triangle PBC$，所以$\angle APD=\angle BPC$，故选项B正确；

过P_0分别作AB，CD的垂线，垂足分别为E，F，所以当$PE+PF$最小时，四棱锥$P-ABCD$表面积取得最小值，不妨设$P_0E=h$，则

$PE+PF\geq\sqrt{4+h^2}+\sqrt{4+(2-h)^2}\geq 2\sqrt{5}$，所以四棱锥$P-ABCD$表面积的最小值为$4+4\sqrt{5}$，故选项C错误；

若四棱锥$P-ABCD$存在内切球，则该球与平面$ABCD$，平面PAD，平面PBC均相切，过P_0作P_0G垂直BC于G，所以$\triangle PHG$的内切圆半径等于该球半径，为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

当四棱锥$P-ABCD$为正四棱锥时，存在内切球，满足题意，故选项D正确；故选ABD.

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12．答案：$\frac{1}{3}$

解析：$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=-3$，所以$\frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=\frac{1}{3}$

13．答案：$\frac{4}{5}$

解析：若C的长半轴为3，则$\triangle PF_1F_2$的周长小于12，不符题意；

所以C的长半轴为$\sqrt{m}$，所以$2\sqrt{m}+2\sqrt{m-9}=18$，解得$m=25$，所以C的离心率为$\frac{4}{5}$.

14．答案：$\frac{8}{15}$

解析：方法一：左、右两边的各6个绳头各自随机均分成3组，

共有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}\times\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15\times15=225$种，

先选定左边第一条绳子的绳头，然后从左边剩下的5个绳头里任取一个打结，

然后按照从右边4个绳头里任取一个，从左边3个绳头里任取一个，从右边2个绳头里任取一个的顺序打结，一共有A_5^5种，

所以6根绳子恰能围成一个大圈的概率为$\frac{A_5^5}{225}=\frac{8}{15}$

方法二：根据对称性，不妨假设左边分组已确定，从上至下依次为1至6号绳，且1号与2号在同一组，3号与4号在同一组，5号与6号在同一组.

对于1号绳的右端，若要6根绳子围成一个大圈，则其不能与2号绳的右端同一组，可以与3-6号绳的任意一根的右边同一组，概率为$\frac{4}{5}$，此后所选绳的左边所在组的另一根绳在剩余的3根绳的右边中不能选2号绳，概率为$\frac{2}{3}$，故所求概率为$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$.

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（13分）

记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a\cos C-c\cos A=c+b$．

（1）求A；

（2）若D在边BC上，且$\angle BAD=90°$，$BD=4DC=4$，求$\triangle ABC$的面积．

解：（1）方法一：由正弦定理得，$\sin A\cos C-\sin C\cos A=\sin C+\sin B$． ……2分

因为$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，所以$2\sin C\cos A+\sin C=0$，

由于$0°<C<180°$，故$\sin C>0$，$\cos A=-\dfrac{1}{2}$， ……4分

而$0°<A<180°$，因此$A=120°$． ……5分

方法二：由余弦定理得，$\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b}=c+b$， ……2分

所以$a^2-c^2=bc+b^2$，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{bc}=-\dfrac{1}{2}$． ……4分

而$0°<A<180°$，因此$A=120°$． ……5分

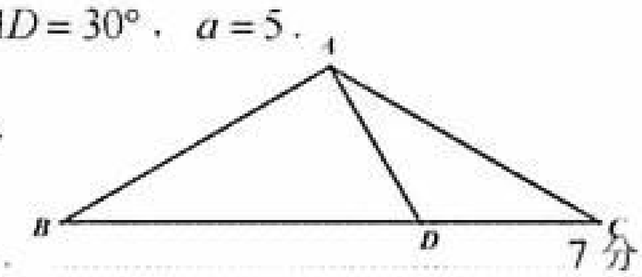
评分细则：

步骤一：使用正弦定理或余弦定理转化条件（2分）

步骤二：化简求出$\cos A$（2分）

步骤三：结合A的范围求A（1分）

（2）方法一：由（1）及题设知，$\angle BAD=90°$，$\angle CAD=30°$，$a=5$．



在$\triangle ABD$中，由正弦定理得，$\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{c}{\sin\angle ADB}$．

在$\triangle ACD$中，由正弦定理得，$\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{b}{\sin\angle ADC}$． ……7分

两式相除可得$\dfrac{c}{b}=\dfrac{4\sin\angle ADB}{2\sin\angle ADC}=2$． ……9分

故$25=b^2+c^2+bc=7b^2$， ……11分

$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b^2=\dfrac{25}{14}\sqrt{3}$． ……13分

方法二：过C作$CE\perp AB$，垂足为E．

在$\mathrm{Rt}\triangle ACE$中，$\angle CAE=180°-\angle BAC=60°$，所以$AE=\dfrac{1}{2}b$． ……7分

由于$\angle BAD=\angle BEC=90°$，故$\triangle BAD\backsim\triangle BEC$，$\dfrac{c}{BE}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{4}{5}$，得$c=2b$． ……9分

后同方法一．

方法三：由（1）及题设知，$\angle BAD=90°$，$\angle CAD=30°$．

一方面，因为高相同，$\triangle ABD$与$\triangle ACD$的面积之比等于$\dfrac{BD}{CD}=4$， ……7分

另一方面，$\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的面积之比 $=\dfrac{\frac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\angle CAD}=\dfrac{2c}{b}$． ……………………9 分

所以 $\dfrac{2c}{b}=4$，$c=2b$． ……………………10 分

后同解法一．

评分细则：

步骤一：转化条件 $BD=4DC$ （2 分）

步骤二：得到 $c=2b$ （2 分）

步骤三：求出 b^2 （或 b ）（2 分）

步骤四：求 $\triangle ABC$ 的面积（面积公式 1 分＋结果 1 分）

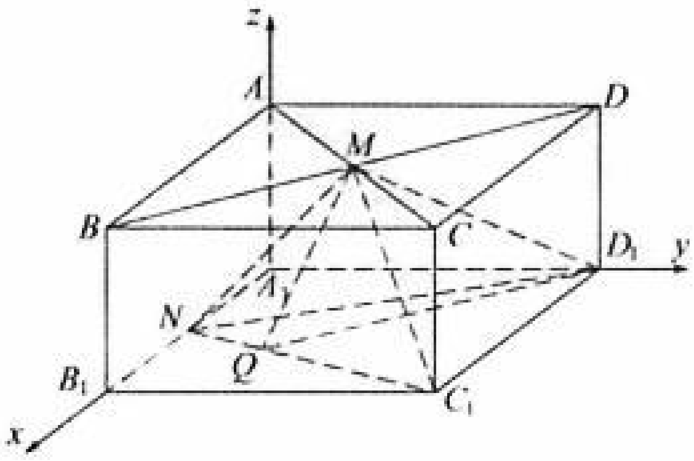
注：方法一、二中“13 分”这一步，面积公式和计算结果各 1 分；方法三中“9 分”这一步，含面积公式 1 分，后续步骤中求 b^2 （或 b ）2 分，求 $\triangle ABC$ 的面积 1 分，无公式分．

16．（15 分）

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=2AA_1$，AC 与 BD 交于点 M，N 为棱 A_1B_1 的中点．

（1）证明：$MN\perp$ 平面 MC_1D_1；

（2）设 $\overrightarrow{NQ}=\lambda\overrightarrow{NC_1}$，其中 $0<\lambda<1$，若二面角 $Q-MD_1-C_1$ 的大小为 $60°$，求 λ．



解：（1）

方法一：（1）以 A_1 为坐标原点，$|AA_1|$ 为单位长，$\overrightarrow{A_1B_1}$ 为 x 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系 A_1-xyz．

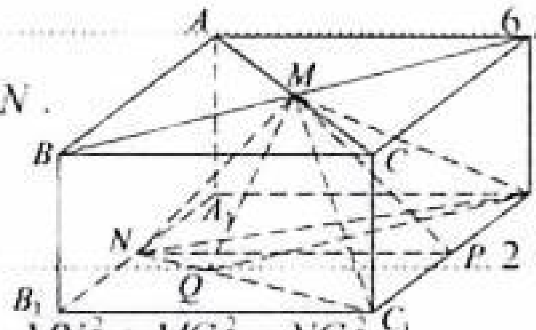
由题设知 $N(1,0,0)$，$M(1,1,1)$，$C_1(2,2,0)$，$D_1(0,2,0)$． ……………………2 分

由 $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{MC_1}=(0,1,1)\cdot(1,1,-1)=0$ 得，$\overrightarrow{NM}\perp\overrightarrow{MC_1}$．

由 $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{MD_1}=(0,1,1)\cdot(-1,1,-1)=0$ 得，$\overrightarrow{NM}\perp\overrightarrow{MD_1}$． ……………………4 分

而 $MC_1\subset$ 平面 MC_1D_1，$MD_1\subset$ 平面 MC_1D_1，$MC_1\cap MD_1=M$，

所以 $MN\perp$ 平面 MC_1D_1． ……………………6 分



方法二：（1）取 C_1D_1 中点 P，设 $|AA_1|=a$，连结 PM，PN．

在长方体中，$MN=MP=\sqrt{2}a$，$MN^2+MP^2=NP^2$，

故 $MN\perp MP$． ……………………2 分

$MC_1=\sqrt{MC^2+CC_1^2}=\sqrt{3}a$，$NC_1=\sqrt{NP^2+PC_1^2}=\sqrt{5}a$，$MN^2+MC_1^2=NC_1^2$，

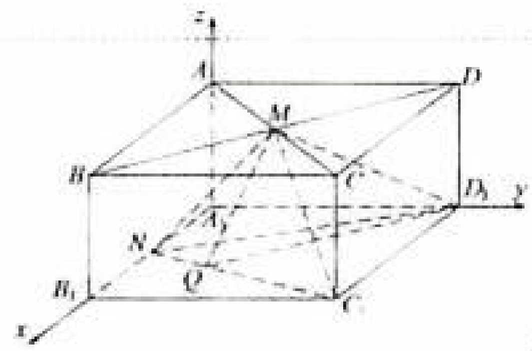
故 $MN\perp NC_1$． ……………………4 分

而 $MC_1\subset$ 平面 MC_1D_1，$MD_1\subset$ 平面 MC_1D_1，$MC_1\cap MD_1=M$，

所以 $MN\perp$ 平面 MC_1D_1． ……………………6 分

（2）方法一：由题设知 $\overrightarrow{NQ}=\lambda(1,2,0)$，$\therefore Q(1+\lambda,2\lambda,0)$． ……8 分

由（1），平面 MC_1D_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{NM}=(0,1,1)$． ……9 分



设平面 MQD_1 的法向量 $\boldsymbol{n}=(p,q,r)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1Q}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1M}=0.\end{cases}\quad 即\begin{cases}(1+\lambda)p+(2\lambda-2)q=0,\\ p-q+r=0.\end{cases}$$ ……11 分

令 $p=2-2\lambda$，可得平面 MQD_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(2-2\lambda,1+\lambda,3\lambda-1)$． ……13 分

则 $\left|\cos\langle\overrightarrow{NM},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{NM}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{NM}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{4\lambda}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{14\lambda^2-12\lambda+6}}$，又二面角 $Q-MD_1-C_1$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{2}$，

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 或 $\lambda=-1$（舍去），故 λ 的值为 $\dfrac{1}{3}$． ……15 分

评分细则：

步骤一：求 Q 的坐标（2 分）

步骤二：求两个法向量（1 分＋4 分）

步骤三：求二面角的余弦值及 λ（1 分＋1 分）

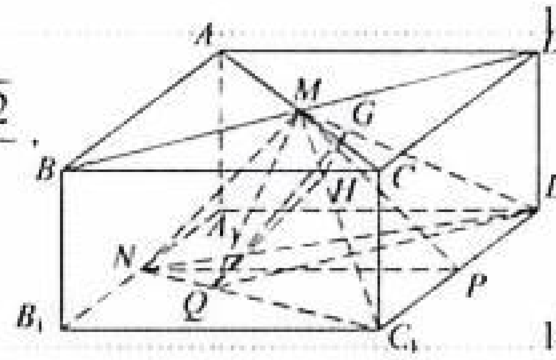
方法二：在平面 NMC_1 内过 Q 作 $QH\,/\!/\,NM$ 交 MC_1 于 H，则 $QH\perp$ 平面 MC_1D_1， ……7 分

在平面 MC_1D_1 内过 H 作 HG 垂直 MD_1 于 G，所以 $QH\perp MD_1$，

又 $HG\perp MD_1$，所以 $MD_1\perp$ 平面 QHG， ……9 分

所以 $MD_1\perp QG$，$\angle QGH$ 为二面角 $Q-MD_1-C_1$ 的平面角， ……10 分

不妨设 $AA_1=1$，易知，$QH=\sqrt{2}(1-\lambda)$， ……11 分



由余弦定理得，$\cos\angle C_1MD_1=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin\angle C_1MD_1=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $HG=\sqrt{3}\lambda\sin\angle C_1MD_1=\dfrac{2\sqrt{6}\lambda}{3}$， ……12 分

所以 $\tan\angle QGH=\dfrac{QH}{HG}=\dfrac{\sqrt{2}(1-\lambda)}{\frac{2\sqrt{6}\lambda}{3}}=\sqrt{3}$． ……14 分

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，故 λ 的值为 $\dfrac{1}{3}$． ……15 分

评分细则：

步骤一：作二面角的平面角（3 分＋1 分）

步骤二：求边长及平面角的正切（2 分＋2 分）

步骤三：求 λ（1 分）

方法三：由（1）可知，若二面角 $Q-MD_1-C_1$ 的大小为 60°，则 MN 和平面 MQD_1 所成的角为 30°，则 N 到平面 MQD_1 的距离为 $d=\dfrac{1}{2}MN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$． ……8 分

一方面，三棱锥 $M-NQD_1$ 的体积 $V=\frac{1}{3}aS_{\triangle NQD_1}=\frac{2}{3}a^3\lambda$； ……9 分

另一方面，$V=\frac{1}{3}dS_{\triangle MQD_1}$．

由余弦定理，$MQ=\sqrt{MN^2+NQ^2-2MN\cdot NQ\cdot\cos\angle MNQ}=\sqrt{5\lambda^2-4\lambda+2}a$， ……11 分

$QD_1=\sqrt{D_1N^2+NQ^2-2D_1N\cdot NQ\cdot\cos\angle D_1NQ}=\sqrt{5\lambda^2-6\lambda+5}a$． ……12 分

$\sin\angle D_1MQ=\sqrt{1-\cos^2\angle D_1MQ}=\sqrt{\frac{14\lambda^2-12\lambda+6}{3(5\lambda^2-4\lambda+2)}}$，

故 $S_{\triangle MQD_1}=\frac{1}{2}MQ\cdot MD_1\cdot\sin\angle D_1MQ=\frac{1}{2}\sqrt{14\lambda^2-12\lambda+6}a^2$． ……14 分

则 $\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{14\lambda^2-12\lambda+6}a^3=\frac{2}{3}a^3\lambda$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\lambda=-1$（舍去），故 λ 的值为 $\frac{1}{3}$． ……15 分

评分细则：

步骤一：二面角转化为线面角（2 分）

步骤二：用两种方式求体积（1 分，3 分+2 分）

步骤三：利用等体积解 λ（1 分）

17．（15 分）

已知函数 $f(x)=x^2+a\ln(x+1)$．

（1）当 $a=-4$ 时，求 $f(x)$ 的极小值；

（2）若 $f(x)$ 存在唯一极值点 x_0，证明：$f(x_0)+x_0^2\le 0$．

解：（1）$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$． ……1 分

当 $a=-4$ 时，$f(x)=x^2-4\ln(x+1)$，$f'(x)=2x-\frac{4}{x+1}=\frac{2(x+2)(x-1)}{x+1}$． ……3 分

令 $f'(x)=0$ 得，$x=-2$ 或 $x=1$． ……4 分

当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增． ……5 分

所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取极小值 $f(1)=1-4\ln 2$． ……6 分

评分细则：

步骤一：定义域和求导（1 分+2 分）

步骤二：求单调性和极小值（2 分+1 分）

（2）方法一：$f'(x)=\frac{2x^2+2x+a}{x+1}$，$x>-1$．

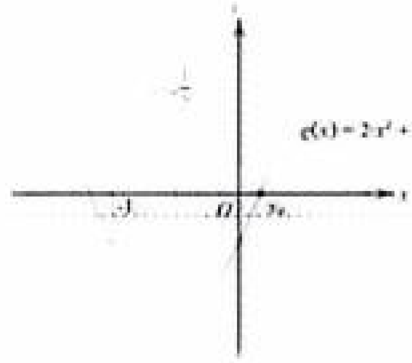
当 $x>-1$ 时，$f'(x)$ 与 $g(x)=2x^2+2x+a$ 同号． ……7 分

因为 $g(x)=2x^2+2x+a$ 的图象关于 $x=-\frac{1}{2}$ 对称，又 $f(x)$ 存在唯一极值点 x_0，

如图可得 $g(-1)\le 0$，所以 $a\le 0$． ……9 分

所以 $g(0)\le 0$，故 $x_0\ge 0$． ……10 分

将 $a=-(2x_0^2+2x_0)$ 代入得



$f(x_0)+x_0^2=2x_0^2+a\ln(x_0+1)=2x_0\left[x_0-(x_0+1)\ln(x_0+1)\right]$， ……12 分

构造 $h(x)=x-(x+1)\ln(x+1)$， $x\in[0,+\infty)$，

则 $h'(x)=-\ln(x+1)\le 0$， ……14 分

所以 $h(x)\le h(0)=0$，即 $x_0-(x_0+1)\ln(x_0+1)\ge 0$，

所以 $f(x_0)+x_0^2\le 0$ ……15 分

方法二：7 分及以前步骤同方法一.

易知 $g(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 单调递减，在 $(-\frac{1}{2},+\infty)$ 单调递增.

（i）当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，$g(x)=2(x+\frac{1}{2})^2+(a-\frac{1}{2})\ge 0$，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增，

函数 $f(x)$ 无极值点. ……8 分

（ii）当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，令 $g(x)=0$ 可得 $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1-2a}}{2}$，$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1-2a}}{2}$.

由于 $-1<x_1<x_2<0$，故 $f(x)$ 在区间 $(-1,x_1)$ 单调递增，(x_1,x_2) 单调递减，$(x_2,+\infty)$ 单调递增，从而有两个极值点，不合题意. ……9 分

（iii）当 $a\le 0$ 时，$x_1\le -1$，$x_2\ge 0$，故 $f(x)$ 在区间 $(-1,x_2)$ 单调递减，$(x_2,+\infty)$ 单调递增，恰有唯一极值点 $x_0=x_2$，符合题意. ……10 分

所以 $f(x_0)+x_0^2=2x_0^2+a\ln(x_0+1)=2(x_0^2+x_0)[\frac{x_0}{x_0+1}-\ln(x_0+1)]$. ……12 分

设 $h(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$，$x\ge 0$，$h'(x)=\dfrac{-x}{(x+1)^2}\le 0$. ……14 分

所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减，$h(x_0)\le h(0)=0$，

故 $f(x_0)+x_0^2=2(x_0^2+x_0)h(x_0)\le 0$. ……15 分

评分细则：

步骤一：确定 a 和 x_0 的范围（3 分+1 分）

步骤二：隐零点代换得到关于 x_0 的函数（2 分）

步骤三：证明该函数小于等于 0（3 分）

18.（17 分）

设抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过 F 的直线 l_1 交 C 于 A，B 两点（A 在第一象限），当直线 AB 垂直于 x 轴时，$|AB|=4$

（1）求 C 的方程；

（2）过 F 且与 AB 垂直的直线 l_2 交 C 于 D，E 两点（D 在第一象限），直线 $x=1$ 与直线 AD 和 BE 分别交于 P，Q 两点.

（i）当 l_1 的斜率为 $\frac{4}{3}$ 时，求 $|PQ|$.

（ii）是否存在以 PQ 为直径的圆与 y 轴相切. 若存在，求 l_1，l_2 的方程；若不存在，

请说明理由.

解：设各点坐标分别为$A(x_A,y_A),B(x_B,y_B),D(x_D,y_D),E(x_E,y_E)$,其中$y_A>0,y_D>0$.

（1）依题意$F(\frac{p}{2},0)$．当$AB\perp x$轴时，直线AB的方程为$x=\frac{p}{2}$. ……2分

令$x=\frac{p}{2}$可得$y_A=p$，$y_B=-p$. ……3分

故$|AB|=2p=4$，$p=2$，C的方程为$y^2=4x$. ……4分

评分细则：

步骤一：求直线AB的方程（2分）

步骤二：求A，B的坐标，进而求C的方程（1分+1分）

注：该问未考虑题目条件A在第一象限不扣分.

（2）（i）依题意，直线AB的方程为$y=\frac{4}{3}(x-1)$，即$x=\frac{3}{4}y+1$； ……5分

由$\begin{cases}y^2=4x,\\x=\frac{3}{4}y+1\end{cases}$得$y^2-3y-4=0$，故$y_A=4$，$y_B=-1$，则$A(4,4)$，$B(\frac{1}{4},-1)$. ……6分

直线DE的方程为$y=-\frac{3}{4}(x-1)$，即$x=-\frac{4}{3}y+1$. ……7分

由$\begin{cases}y^2=4x,\\x=-\frac{4}{3}y+1\end{cases}$得$y^2+\frac{16}{3}y-4=0$，故$y_D=\frac{2}{3}$，$y_E=-6$,则$D(\frac{1}{9},\frac{2}{3})$，$E(9,-6)$. ……8分

所以直线AD的方程为$y-4=\frac{6}{7}(x-4)$，令$x=1$得$P(1,\frac{10}{7})$. ……9分

直线BE的方程为$y+6=-\frac{4}{7}(x-9)$，令$x=1$得$Q(1,-\frac{10}{7})$，故$|PQ|=\frac{20}{7}$. ……10分

（ii）方法一：设直线AB的方程为$x=my+1$，不妨设$m>0$.

由$\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1\end{cases}$得$y^2-4my-4=0$，$y_Ay_B=-4$．同理$y_Dy_E=-4$. ……11分

直线AD的方程为$y-y_A=\frac{y_A-y_D}{x_A-x_D}(x-x_A)$，即$y=\frac{4}{y_A+y_D}(x-\frac{y_A^2}{4})+y_A$

令$x=1$得$y_P=\frac{4+y_Ay_D}{y_A+y_D}$ ……12分

由于$y_A=-\frac{4}{y_B}$，$y_D=-\frac{4}{y_E}$，所以$y_Q=-\frac{y_Ay_D+4}{y_A+y_D}=-y_P$. ……14分

从而PQ的中点恒为F．以PQ为直径的圆与y轴相切等价于$y_P=1$.

若$y_P=1$，则$y_Ay_D+4=y_A+y_D$．由$AB\perp DE$得，$\frac{4}{y_A+y_B}\cdot\frac{4}{y_D+y_E}=-1$，

故$(y_A-\frac{4}{y_A})(y_D-\frac{4}{y_D})=-16$，$(y_Ay_D)^2-4(y_A^2+y_D^2)+16=-16y_Ay_D$.

所以$(y_Ay_D+4)^2=4(y_A-y_D)^2$，$y_Ay_D+4=2(y_A-y_D)$，因此$y_A=3y_D$. ………… 16 分

回代得$3{y_D}^2-4y_D+4=0$，而判别式$\Delta=-32<0$，该方程无解，从而不存在以PQ为直径的圆与y轴相切. ………… 17 分

评分细则：

步骤一：求y_P，y_Q（1 分+1 分）

步骤二：通过联立韦达得到$y_P+y_Q=0$（2 分）

步骤三：利用垂直说明不存在（2 分+1 分）

方法二：设直线AD的方程为$x=ky+m$，其中$m<0$.

由$\begin{cases}y^2=4x,\\ x=ky+m\end{cases}$得$y^2-4ky-4m=0$，$\Delta=16k^2+16m>0$，

$y_A+y_D=4k$，$y_Ay_D=-4m$.

因为$FA\perp FD$，所以$\dfrac{y_A}{x_A-1}\cdot\dfrac{y_D}{x_D-1}=-1$，$y_Ay_D+(\dfrac{{y_A}^2}{4}-1)(\dfrac{{y_D}^2}{4}-1)=0$. ………… 12 分

从而$4k^2=m^2-6m+1$. ………… 13 分

令$x=1$得$y_P=\dfrac{1-m}{k}$. ………… 14 分

故${y_P}^2=\dfrac{(m-1)^2}{k^2}=\dfrac{4(m-1)^2}{m^2-6m+1}=4(1-\dfrac{4}{-m-\dfrac{1}{m}+6})\ge 2$.

当且仅当$m=-1$时，等号成立， ………… 16 分

同理${y_Q}^2\ge 2$，而P，Q分别在第一、第四象限，故$|PQ|\ge 2\sqrt{2}>2$，从而不存在以PQ为直径的圆与y轴相切. ………… 17 分

评分细则：

步骤一：利用垂直推导k和m的关系（3 分）

步骤二：说明$y_P\ge\sqrt{2}$，进而$|PQ|\ge 2\sqrt{2}$，从而不存在（3 分+1 分）

19.（17 分）

将区间$(0,1)$中的全体有理数按一定顺序排列得到数列$\{a_n\}$，规则如下：

①$a_n=\dfrac{p_n}{q_n}$，正整数p_n与q_n互质，如$p_1=1$，$q_1=2$；

②$q_n\le q_{n+1}$，当且仅当$q_n=q_{n+1}$时，$p_n<p_{n+1}$.

（1）写出$\{a_n\}$的前 5 项；

（2）若$a_m=\dfrac{2023}{2024}$，$a_n=\dfrac{2024}{2025}$，求$n-m$；

（3）记$\{a_n\}$的前n项和为S_n，证明：$\dfrac{S_n}{n}\le\dfrac{1}{2}$.

解：（1）$\{a_n\}$的前 5 项为$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{3}{4}$. ………… 4 分

评分细则：只看结果，第 2 项至第 5 项，每正确一项得一分.

（2）因为$a_m=\frac{p_m}{q_m}=\frac{2023}{2024}$，$p_m+1=q_m$，所以$q_{m+1}>q_m$.

又因为$m<n$，故$m+1\le n$，$q_{m+1}\le q_n=2025$，

因此$q_{m+1}=2025$，当且仅当$m+1\le k\le n$时，$q_k=2025$. ……6 分

由于$2025=45^2=3^4\times 5^2$.

故由p_k与 2025 互质可得p_k既不是 3 的倍数，也不是 5 的倍数. ……7 分

而在 1 到 2024 之间的正整数中，是 3 的倍数的整数有$\frac{2025}{3}-1=674$个，是 5 的倍数的整数有$\frac{2025}{5}-1=404$个，是 15 的倍数的整数有$\frac{2025}{15}-1=134$个. ……8 分

所以$n-m=2024-(674+404-134)=1080$. ……10 分

评分细则：

步骤一：分析得到a_m和a_n之间所有项分母均为 2025（2 分）

步骤二：求 2025 的质因数，进而用容斥原理求$n-m$（1 分，1 分+2 分）

（3）方法一：依题意，若正整数p_n与q_n互质，则q_n-p_n与q_n也互质， ……11 分

记$\{a_n\}$中分母为正整数$N(N>2)$的共有k_N项，则a_n总满足

$a_i=\frac{p_i}{q_i}$或$a_j=\frac{q_i-p_i}{q_i}(i<j)$，其中$q_i=N$，$k_N$为偶数.

因为$\frac{a_i+a_j}{2}=\frac{1}{2}$，所以$a_i<\frac{1}{2}<a_j$，且这$k_N$项的平均数为$\frac{1}{2}$. ……13 分

（i）对于满足$q_i\le N$的所有a_n的前n_0项和为$S_{n_0}=\frac{n_0}{2}$. ……14 分

（ii）当$q_n=N+1$时，不妨设$1=p_{n_0+1}<p_{n_0+2}<\cdots<p_{n_0+m}<N+1$，其中$m=n-n_0$.

则$S_{n_0+m}=S_{n_0}+(a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\cdots+a_{n_0+m})=\frac{n_0}{2}+(a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\cdots+a_{n_0+m})$.

①若$m\le\frac{k_{N+1}}{2}$，则$a_{n_0+1}<a_{n_0+2}<\cdots<a_{n_0+m}<\frac{1}{2}$，则$S_{n_0+m}<\frac{n_0}{2}+\frac{m}{2}=\frac{n_0+m}{2}$. ……15 分

②若$m>\frac{k_{N+1}}{2}$，则

$a_{n_0+1}<a_{n_0+2}<\cdots<a_{n_0+k_{N+1}-m}<a_{n_0+k_{N+1}-m+1}<\cdots<a_{n_0+\frac{k_{N+1}}{2}}<\frac{1}{2}<a_{n_0+\frac{k_{N+1}}{2}+1}<\cdots<a_{n_0+m}$，

则$S_{n_0+m}=\frac{n_0}{2}+(a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\cdots a_{n_0+k_{N+1}-m})+(m-\frac{k_{N+1}}{2})$，

所以$S_{n_0+m}<\frac{n_0}{2}+\frac{k_{N+1}-m}{2}+m-\frac{k_{N+1}}{2}=\frac{n_0+m}{2}$. ……16 分

综上，$\frac{S_n}{n}\le\frac{1}{2}$. ……17 分

方法二：记$H_N=\{a_n\mid q_n=N\}$，H_N中的元素个数为$|H_N|$.

设$n=\sum\limits_{N=2}^{k}|H_N|+r$，其中$0\le r<|H_{k+1}|$.

$\forall x=\dfrac{p_k}{N}\in H_N$，若正整数$p_k$与$N$互质，则$N-p_k$与$N$互质，

故$1-x\in H_N$，H_N中所有元素之和为$\dfrac{|H_N|}{2}$. ………………………………12分

（i）若$r=0$，则$S_n=\sum\limits_{x\in H_2}x+\sum\limits_{x\in H_3}x+\cdots+\sum\limits_{x\in H_k}x=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{N=2}^{k}|H_N|=\dfrac{n}{2}$，$\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{1}{2}$. ………………14分

（ii）若$r>0$，设H_{k+1}中的元素从小到大排列依次为$x_{k+1,1}$，$x_{k+1,2}$，…，$x_{k+1,r}$，则

$(|H_{k+1}|-r)\sum\limits_{i=1}^{r}x_{k+1,i}<r\sum\limits_{i=r+1}^{|H_{k+1}|}x_{k+1,i}$，这是由于不等式两边的元素数量均为$r(|H_{k+1}|-r)$个，但左边的最大元素$x_{k+1,r}$小于右边的最小元素$x_{k+1,r+1}$.

所以$|H_{k+1}|\sum\limits_{i=1}^{r}x_{k+1,i}<r\sum\limits_{i=1}^{r}x_{k+1,i}+r\sum\limits_{i=r+1}^{|H_{k+1}|}x_{k+1,i}=r\sum\limits_{i=1}^{|H_{k+1}|}x_{k+1,i}$.

所以$\dfrac{1}{r}\sum\limits_{i=1}^{r}x_{k+1,i}<\dfrac{1}{|H_{k+1}|}\sum\limits_{i=1}^{|H_{k+1}|}x_{k+1,i}=\dfrac{1}{2}$. ………………………………16分

从而$S_{n+r}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{N=2}^{k}|H_N|+\sum\limits_{i=1}^{r}x_{k+1,i}<\dfrac{1}{2}(\sum\limits_{N=2}^{k}|H_N|+r)=\dfrac{n+r}{2}$.

综上，$\dfrac{S_n}{n}\le\dfrac{1}{2}$. ………………………………17分

评分细则：

步骤一：将分母为N的项两两配对，得到a_n为某组的最后一项时$\dfrac{S_n}{n}\le\dfrac{1}{2}$（3分+1分）

步骤二：a_n不为某组的最后一项时，利用组内的单调性说明$\dfrac{S_n}{n}\le\dfrac{1}{2}$（2分+1分）