

保密★启用前

准考证号_____姓名_____

(在此卷上答题无效)



全国名校联盟2026届高三上学期期中考试

数学试题

2025.11

本试卷共4页，19小题，考试时间120分钟，总分150分。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上和本试卷上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将写在题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，若 $A = \{1, 2, 5\}$ ， $B = \{2, 3, 5\}$ ，则 $\complement_U(A \cap B) =$
A. $\{5\}$ B. $\{1, 3\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{1, 3, 4\}$
2. 若 $z = \frac{a-i}{i}$ ($a \in \mathbf{R}$) 的虚部为2，则 $a =$
A. -2 B. 2 C. -4 D. 4
3. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，公差为 d ($d \neq 0$)，若 $S_5 = 10a_1$ ，则 $\frac{a_1}{d} =$
A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{1}{3}$ D. 3
4. 已知某放射性同位素的含量 N 与时间 t 的关系式为 $N = N_0 e^{-\frac{t}{48}}$ ，其中 N_0 为初始含量，则当该放射性同位素的含量为 $\frac{1}{4} N_0$ 时， t 的值约为
附： $\ln 2 \approx 0.693$.
A. 33 B. 45 C. 67 D. 78

5. 已知某圆锥的侧面展开图是面积为 2π 的半圆, 则该圆锥的体积为

- A. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\sqrt{3}\pi$ D. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

6. 已知函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$. 设甲: $f(1) = f(-1)$, 乙: $f(x)$ 是偶函数, 则

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
C. 甲是乙的充要条件
D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

7. 若函数 $f(x) = (x - a)(x - 2)^2$ 的极大值为 $\frac{4}{27}$, 则 $a =$

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

8. 若 $\sin(\theta + 20^\circ) = \cos(\theta - 10^\circ) + \cos(\theta + 70^\circ)$, 则 $\tan\theta =$

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $-\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

二、多项选择题: 本题共3小题, 每小题6分, 共18分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得6分, 部分选对的得部分分, 有选错的得0分。

9. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b = 2$, 则

- A. $ab \leq 1$ B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2$
C. $a^2 + b^2 \geq 2$ D. $\log_2 \sqrt{a} + \log_4 b \geq 0$

10. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1, 动点 P 在底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内, 且 $BP \perp B_1D$, 则

- A. $BP \parallel$ 平面 ACD_1
B. P 的轨迹长度为 $\sqrt{2}$
C. 恰有一个点 P , 满足 $BP \perp AC$
D. BP 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

11. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax + 2\ln x$ 恰有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 则

- A. $a > 3$
B. 存在 $a \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x)$ 有三个零点
C. $f(x_2) < -\frac{8}{3}$
D. $x_1 x_2 < 1$

三、填空题：本大题共3小题，每小题5分，共15分。

12. 已知向量 a, b 满足 $a \cdot b = 4, |b| = 1$, 则 $b \cdot (a - b) =$ _____.

13. 已知函数 $f(x) = e^{x-a} + e^{2-x}$, 若 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称, 则 $f(x)$ 的值域为 _____.

14. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, PA, PB, PC 两两垂直, $PB = 2PA$, 若点 P 到平面 ABC 的距离为 1, 则三棱锥 $P-ABC$ 体积的最小值为 _____.

四、解答题：本大题共5小题，共77分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. (13分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sqrt{3}b \sin C + c \cos B = c$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $A = 3C$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $3 - \sqrt{3}$, 求 a .

16. (15分)

已知函数 $f(x) = (1-x)e^x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

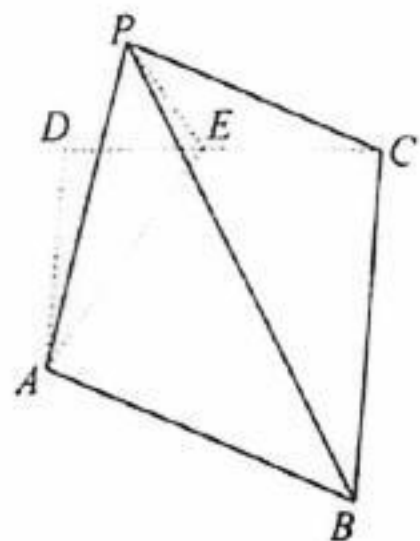
(2) 设点 (a, b) 在曲线 $y = f(x)$ 上, 求 $f(a) - f(b)$ 的最大值.

17. (15分)

如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, $AD = 2$, $BC = CD = 4$, E 是 CD 的中点, 将 $\triangle ADE$ 沿 AE 翻折至 $\triangle APE$, 使得 $PC = 2\sqrt{3}$.

(1) 证明: 平面 $PAE \perp$ 平面 $ABCE$;

(2) 求平面 PAE 与平面 PBC 夹角的余弦值.



18. (17分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n + a_{n+1} = k \times 2^{n-1} (k > 0)$.

(1) 设 $b_n = a_{2n+1} - a_{2n-1}$, 证明: 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列;

(2) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 求 k 的值;

(3) 若 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $a_n < a_{n+1}$, 求 k 的取值范围.

19. (17分)

设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x} (x > 0)$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程;

(2) 设 x_n 为 $f(x)$ 从小到大的第 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 个极值点.

(i) 证明: $x_2 - x_1 > \pi$;

(ii) 设 $a_n = x_n + \frac{1}{x_n}$, 证明: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < \frac{10}{9\pi^2}$.

全国名校联盟 2026 届高三上学期期中考
数学试题参考答案解析

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D	A	B	C	D	C	C	B	AC	ABC	ACD

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 答案：D

解析：易知 $A \cap B = \{2, 5\}$ ，则 $\complement_U(A \cap B) = \{1, 3, 4\}$ 。故选 D。

2. 答案：A

解析： $z = \frac{a-i}{i} = -1-ai$ ， $\therefore z$ 的虚部为 $-a=2$ ， $\therefore a=-2$ ，故选 A。

3. 答案：B

解析： $S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \times 5 = 5a_3 = 10a_1$ ， $\therefore a_3 = 2a_1$ ，即 $a_1 + 2d = 2a_1$ ， $\therefore \frac{a_1}{d} = 2$ ，故选 B。

4. 答案：C

解析：由题意得 $N = \frac{1}{4}N_0$ ，即 $e^{\frac{-t}{48}} = \frac{1}{4}$ ，两边取对数得 $-\frac{t}{48} = -2\ln 2$ ，解得 $t \approx 67$ ，故选 C。

5. 答案：D

解析：设圆锥的底面半径为 r ，母线长为 l ，则 $\frac{1}{2} \times \pi \times l^2 = 2\pi$ ， $\therefore l = 2$ ，又 $2\pi r = \pi l$ ， $\therefore r = 1$ ， $\therefore$ 圆

锥的高为 $\sqrt{3}$ ， $\therefore$ 该圆锥的体积为 $\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ ，故选 D。

6. 答案：C

解析：若 $f(1) = f(-1)$ ，则 $\cos(2+\varphi) = \cos(-2+\varphi)$ ，

$\therefore 2+\varphi = -2+\varphi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ （舍）或 $2+\varphi + (-2+\varphi) = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，

则 $\varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ， $\therefore f(x) = \cos(2x + k\pi)$ 。

若 k 为偶数，则 $f(x) = \cos(2x)$ 为偶函数；若 k 为奇数，则 $f(x) = -\cos(2x)$ 为偶函数。

若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(1) = f(-1)$ ，必要性成立。 $\therefore$ 甲是乙的充要条件，故选 C。

7. 答案：C

解析： $f'(x) = (x-2)^2 + 2(x-2)(x-a) = (x-2)(3x-2a-2)$ ，显然 $x=2$ 不是 $f(x)$ 的极大值点，

$\therefore x = \frac{2a+2}{3}$ 为 $f(x)$ 的极大值点，且 $\frac{2a+2}{3} < 2$ ， $\therefore f(\frac{2a+2}{3}) = \frac{4(2-a)^3}{27} = \frac{4}{27}$ ，

解得 $a=1$ ，故选 C。

8. 答案：B

解析：依题意， $\sin(\theta+20^\circ) = \cos(\theta-10^\circ) + \cos(\theta+70^\circ) = \cos(\theta-10^\circ) + \sin(20^\circ-\theta)$ ，

$\therefore \sin(20^\circ+\theta) - \sin(20^\circ-\theta) = 2\cos 20^\circ \sin \theta = \cos(\theta-10^\circ)$ ，

$\therefore \cos(\theta-10^\circ) = \cos \theta \cos 10^\circ + \sin \theta \sin 10^\circ$ ， $\therefore 2\cos 20^\circ \sin \theta = \cos \theta \cos 10^\circ + \sin \theta \sin 10^\circ$ ，

$\therefore \tan \theta = \frac{\cos 10^\circ}{2\cos 20^\circ - \sin 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{2\cos(30^\circ-10^\circ) - \sin 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{\sqrt{3}\cos 10^\circ + \sin 10^\circ - \sin 10^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，故选 B。

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 答案：AC

解析： $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ， $\therefore ab \leq 1$ ，故选项 A 正确；

$(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(\frac{a+b}{2}) = \frac{1}{2}(2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b}) \geq \frac{1}{2}(2+2) = 2$ ，故选项 B 错误；

$\therefore a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = 2$ ，故选项 C 正确；

$\log_2 \sqrt{a} + \log_4 b = \log_2 \sqrt{ab} \leq 0$ ，故选项 D 错误。故选 AC。

10. 答案：ABC

解析：易知 $B_1D \perp$ 平面 ACD_1 ， $\therefore B_1D \perp BP$ ， $BP \not\subset$ 平面 ACD_1 ， $\therefore BP \parallel$ 平面 ACD_1 ，A 选项正确；

$\therefore B_1D \perp$ 平面 BA_1C_1 ， $\therefore P$ 在对角线 A_1C_1 上，B 选项正确；

$\therefore AC \perp$ 平面 BB_1D_1D ， $\therefore$ 当且仅当 P 为 A_1C_1 的中点时，满足 $BP \perp AC$ ，C 选项正确；

BP 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角即为 $\angle BPB_1$ ， $\therefore$ 当 P 为 A_1C_1 的中点时， $\angle BPB_1$ 取得最大值，

此时 $\sin \angle BPB_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，D 选项错误；故选 ABC。

11. 答案：ACD

解析：考查选项 A： $f'(x) = x^2 - a + \frac{2}{x} = 0$ ， $\Rightarrow a = x^2 + \frac{2}{x}$ ， $\Leftrightarrow \begin{cases} y = a \\ y = x^2 + \frac{2}{x} \end{cases}$ ，两函数图象有且仅有两个

不同的交点。 $\therefore y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2} > 0 \Rightarrow x > 1$ ， $y' < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$ ，

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	+
y	单调递减	极小值	单调递增

$\therefore y_{\min} = 3$ ，另外， $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow +\infty$ ， $f(x) \rightarrow +\infty$ ， $\therefore a > 3$ 时，两函数图象有且仅有两个不同的交点，

$\therefore$ A 选项正确；

考查选项 B：由 A 选项知， $a > 3$ 时， $f(x)$ 有三个单调区间：

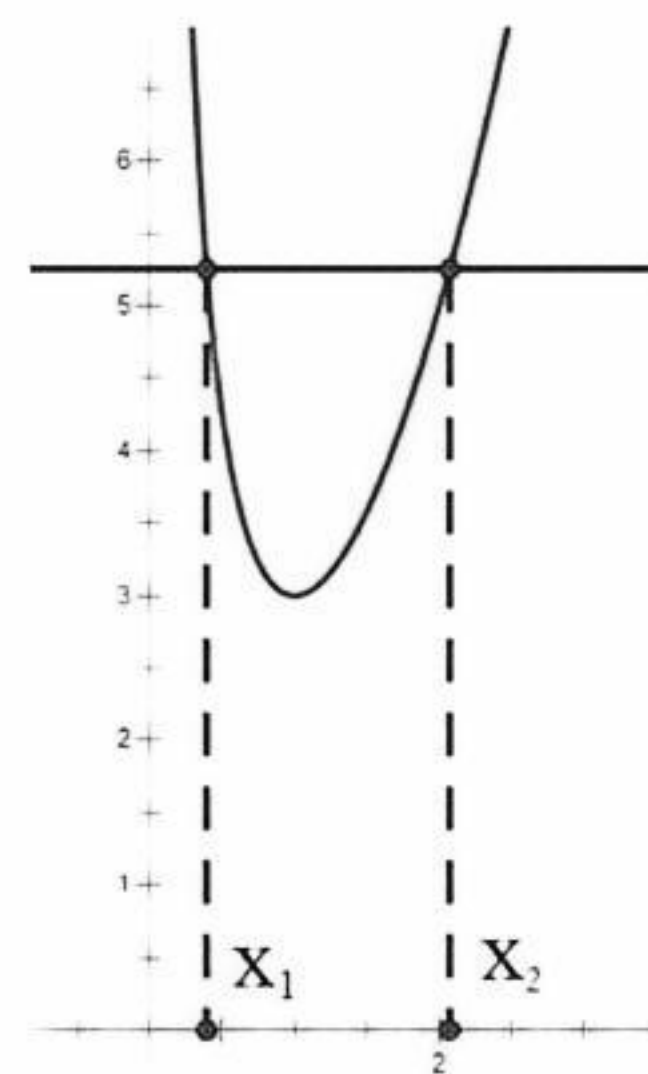
易知 $f(x)$ 在区间 $(0, x_1)$ 上单调递增，在区间 (x_1, x_2) 上单调递减，

在区间 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增，且 $a = x_1^2 + \frac{2}{x_1} = x_2^2 + \frac{2}{x_2}$ ，

则 $f(x_1) = \frac{1}{3}x_1^3 - ax_1 + 2\ln x_1 = -\frac{2}{3}x_1^3 - 2 + 2\ln x_1$ ，（极大值）

设 $g(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2\ln x - 2$ ，则 $g'(x) = -2x^2 + \frac{2}{x} = \frac{2(1-x^3)}{x}$ ，

$\therefore$ 当 $x \in (0,1)$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增，当 $x \in (1,+\infty)$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减，



$$f(x_1) = g(x_1) < g(1) = -\frac{2}{3} - 2 + 0 < 0,$$

∴ $f(x)$ 的极大值小于零，不可能有三个零点，∴ B 选项错误；

考查选项 C：同理可得， $f(x_2) = \frac{1}{3}x_2^3 - ax_2 + 2\ln x_2 = -\frac{2}{3}x_2^3 - 2 + 2\ln x_2$ ，由 B 选项可知，

$$f(x_2) = g(x_2) < g(1) = -\frac{8}{3}, \text{ C 选项正确.}$$

考查选项 D：由选项 B 知， $a = x_1^2 + \frac{2}{x_1} = x_2^2 + \frac{2}{x_2}$ ，且 $x_1 \in (0, 1)$ ， $x_2 \in (1, +\infty)$ ，

$$\therefore x_1^2 - x_2^2 = \frac{2}{x_2} - \frac{2}{x_1} = \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}, \text{ 即 } x_1 + x_2 = \frac{2}{x_1 x_2},$$

∵ $x_1 + x_2 > 2\sqrt{x_1 x_2}$ ，∴ $\frac{2}{x_1 x_2} > 2\sqrt{x_1 x_2}$ ，即 $x_1 x_2 < 1$ ，∴ D 选项正确。故选 ACD。

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 答案：3

解析： $b \cdot (a - b) = a \cdot b - b^2 = 4 - 1 = 3$ ，故填 3。

13. 答案： $[2e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ 或 $[2e\sqrt{e}, +\infty)$

解析： $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称，则 $f(x) = f(1-x)$ ，即 $e^{x-a} + e^{2-x} = e^{1-x-a} + e^{1+x}$ ，解得 $a = -1$ ，

∴ $f(x) = e^{x+1} + e^{2-x} \geq 2\sqrt{e^{x+1} \times e^{2-x}} = 2e^{\frac{3}{2}}$ ，故填 $[2e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ 。

14. 答案： $\frac{5\sqrt{3}}{8}$

解析：不妨设 $PA = x$ ， $PC = y$ ，则 $PB = 2x$ ， $AB = \sqrt{5}x$ ，

过 P 作 PH 垂直 AB 于 H ，则 $PH = \frac{2x}{\sqrt{5}}$ ，

∵ $PC \perp AB$ ， $PH \perp AB$ ， $PH \cap PC = P$ ，∴ $AB \perp$ 平面 CPH ，

$$\therefore \frac{2xy}{\sqrt{5}\sqrt{y^2 + \frac{4x^2}{5}}} = 1, \therefore x^2 = \frac{5y^2}{4(y^2 - 1)},$$

$$\text{三棱锥 } P-ABC \text{ 的体积 } V = \frac{x^2 y}{3} = \frac{5y^3}{12(y^2 - 1)},$$

$$\text{不妨设 } f(x) = \frac{5x^3}{12(x^2 - 1)} (x > 1), \text{ 则 } f'(x) = \frac{5x^2(x^2 - 3)}{12(x^2 - 1)^2},$$

令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = \sqrt{3}$ ，∴ $f(x)$ 的最小值为 $f(\sqrt{3}) = \frac{5\sqrt{3}}{8}$ ，

∴ 三棱锥 $P-ABC$ 体积的最小值为 $\frac{5\sqrt{3}}{8}$ ，故填 $\frac{5\sqrt{3}}{8}$ 。

四、解答题：共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\sqrt{3}b \sin C + c \cos B = c$ 。

(1) 求 B ；

(2) 若 $A = 3C$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $3 - \sqrt{3}$ ，求 a 。

解：(1) $\because \sqrt{3}b \sin C + c \cos B = c$ ，由正弦定理，

$$\therefore \sqrt{3} \sin B \sin C + \sin C \cos B = \sin C, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\because \sin C > 0,$$

$$\therefore \sqrt{3} \sin B + \cos B = 1, \text{ 即 } \sin(B + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

由 B 为三角形内角，即 $B \in (0, \pi)$ ，

$$\therefore B + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \text{ 得 } B = \frac{2}{3}\pi. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

评分细则：

步骤一：使用正弦定理转化条件 (2 分)

步骤二：辅助角公式化简得到 $\sin(B + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ (2 分)

步骤三：结合 B 的范围求 B (2 分)

$$(2) \because A = 3C, \text{ 且 } B = \frac{2}{3}\pi,$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{4}, C = \pi - A - B = \frac{\pi}{12}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore \sin C = \sin \frac{\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由正弦定理有 } \frac{a}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{c}{\sin \frac{\pi}{12}}, \therefore c = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}a, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\triangle ABC \text{ 的面积为 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{8}a^2, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } 3 - \sqrt{3}, \text{ 可得 } \frac{3 - \sqrt{3}}{8}a^2 = 3 - \sqrt{3},$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2}. \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

评分细则：

步骤一：得到 A, C (1 分)；步骤二：求出 $\sin C$ (1 分)；步骤三：正弦定理得到 $c = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}a$ (1 分)；

步骤四：表达 $\triangle ABC$ 的面积（2分）；步骤五：代入求 a （2分），其他过程酌情给分.

16. （15分）

已知函数 $f(x) = (1-x)e^x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设点 (a, b) 在曲线 $y = f(x)$ 上，求 $f(a) - f(b)$ 的最大值.

解：（1） $f'(x) = -xe^x$ ，2分

当 $x < 0$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增，

当 $x > 0$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，4分

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减.5分

评分细则：

步骤一：求导（2分）；步骤二：判断单调性（2分）；步骤三：结论（1分）；

（2）由（1）可知， $f(x)$ 的最大值为 $f(0) = 1$ ，7分

又 $x \rightarrow +\infty$ 时， $f(x) \rightarrow -\infty$ ， $\therefore b \leq 1$ ，8分

由题意得， $b = f(a)$ ， $\therefore f(a) - f(b) = b - f(b)$ ，

不妨设 $g(x) = x - f(x) (x \leq 1)$ ，11分

则 $g'(x) = 1 - f'(x) = 1 + xe^x$ ，设 $h(x) = g'(x)$ ，则 $h'(x) = (x+1)e^x$ ，

$\therefore h(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 上单调递减，在区间 $(-1, 1]$ 上单调递增，

$\therefore h(x) \geq h(-1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$ ，13分

$\therefore g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 在区间 $(-\infty, 1]$ 上单调递增， $\therefore g(x) \leq g(1) = 1 - f(1) = 1$ ，

$\therefore f(a) - f(b)$ 的最大值为 1.15分

评分细则：

步骤一：得到 $b \leq 1$ ，没有极限说明扣 1 分（3分）；

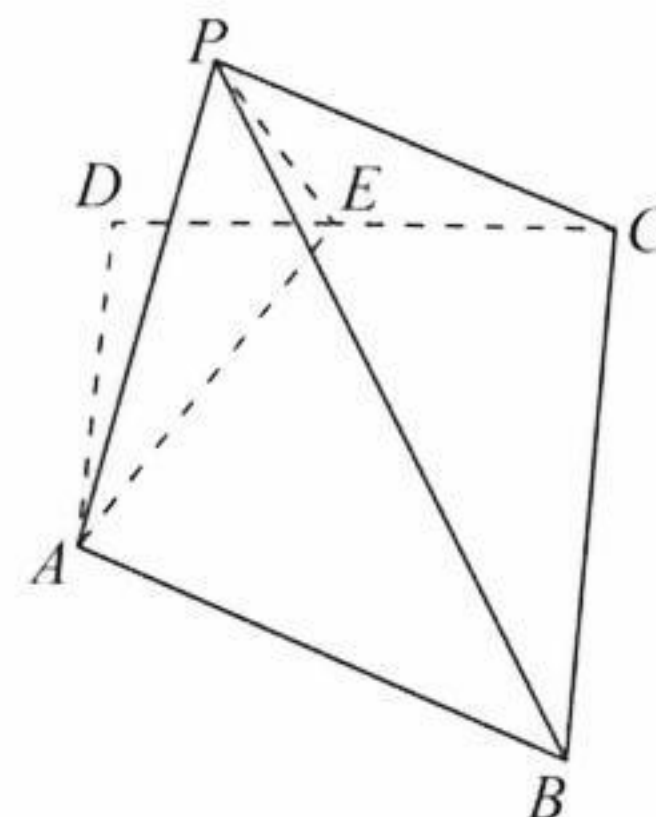
步骤二：代换得到 $f(a) - f(b) = b - f(b)$ ，设 $g(x) = x - f(x) (x \leq 1)$ （3分）；

步骤三：求导判断 $g(x)$ 单调递增（2分）；

步骤四：求最值以及结论（2分）；

17. (15 分)

如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, $AD = 2$, $BC = CD = 4$, E 是 CD 的中点, 将 $\triangle ADE$ 沿 AE 翻折至 $\triangle APE$, 使得 $PC = 2\sqrt{3}$.



- (1) 证明: 平面 $PAE \perp$ 平面 $ABCE$;
(2) 求平面 PAE 与平面 PBC 夹角的余弦值.

解: (1) 连接 BD 交 AE 于点 O , 连接 OP , OC , OB ,

$\because PA = PE, \therefore OP \perp AE$,

在 $Rt\triangle ADE$ 中, $AD = DE = 2, \therefore OP = OD = \sqrt{2}$,

在 $\triangle OEC$ 中, $OC^2 = OE^2 + CE^2 - 2OE \cdot CE \cos 135^\circ = (\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 2 \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 10$,2 分

在 $\triangle POC$ 中, $OP = \sqrt{2}, OC = \sqrt{10}, PC = 2\sqrt{3}$,

$\therefore OP^2 + OC^2 = PC^2, \therefore OP \perp OC$,3 分

又 $\because AE \cap OC = O, AE, OC \subset$ 平面 $ABCE$,

$\therefore OP \perp$ 平面 $ABCE$,5 分

又 $OP \subset$ 平面 $PAE, \therefore$ 平面 $PAE \perp$ 平面 $ABCE$6 分

评分细则:

步骤一: 求 OC (2 分);

步骤二: 勾股定理得到 $OP \perp OC$ (1 分);

步骤三: 线面垂直证明: $OP \perp$ 平面 $ABCE$ (2 分);

步骤四: 面面垂直证明: 平面 $PAE \perp$ 平面 $ABCE$ (1 分).

(2) 易知 $\angle DEA = \angle CDB = 45^\circ, \therefore BD \perp AE$, 即 $OA \perp OB$,

由 (1) 可知 $OP \perp$ 平面 $ABCE$, 又 $\because OA, OB \subset$ 平面 $ABCE$,

$\therefore OP \perp OA, OP \perp OB, \therefore OP, OA, OB$ 两两垂直,7 分

易知 $AB = 2\sqrt{5}, OA = \sqrt{2}, \therefore OB = 3\sqrt{2}$,8 分

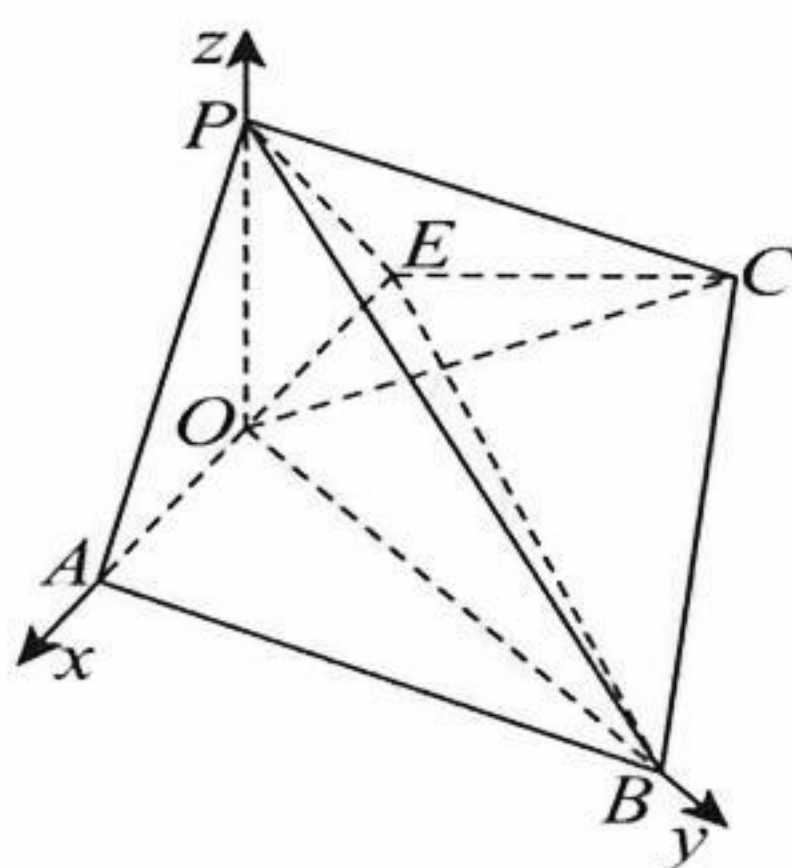
评分细则:

步骤一: 由几何关系得到 OP, OA, OB 两两垂直 (1 分);

步骤二: 求得 $OB = 3\sqrt{2}$ (1 分);

方法 1:

如图, 以 O 点为原点建立如图所示的空间直角坐标系,



$$O(0,0,0), A(\sqrt{2},0,0), B(0,3\sqrt{2},0), C(-2\sqrt{2},\sqrt{2},0), P(0,0,\sqrt{2}), E(-\sqrt{2},0,0),$$

$$\overrightarrow{CB} = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0), \overrightarrow{PB} = (0, 3\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \overrightarrow{EP} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{设平面 } PBC \text{ 的法向量为 } \vec{n} = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \overrightarrow{CB} \cdot \vec{n} = 0, \\ \overrightarrow{PB} \cdot \vec{n} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 0, \\ 3\sqrt{2}y - \sqrt{2}z = 0, \end{cases}$$

$$\text{取 } x = 1, \text{ 得 } y = -1, z = -3, \text{ 则 } \vec{n} = (1, -1, -3), \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{易知平面 } PAE \text{ 的法向量为 } \vec{m} = (0, 1, 0), \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

$\therefore$ 设平面 PAE 与平面 PBC 夹角的为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}| \times |\vec{m}|} = \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11},$$

$$\therefore \text{平面 } PAE \text{ 与平面 } PBC \text{ 夹角的余弦值为 } \frac{\sqrt{11}}{11}. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

评分细则:

步骤一: 建系得到点和向量 (1 分);

步骤二: 求平面 PBC 的法向量 (2 分);

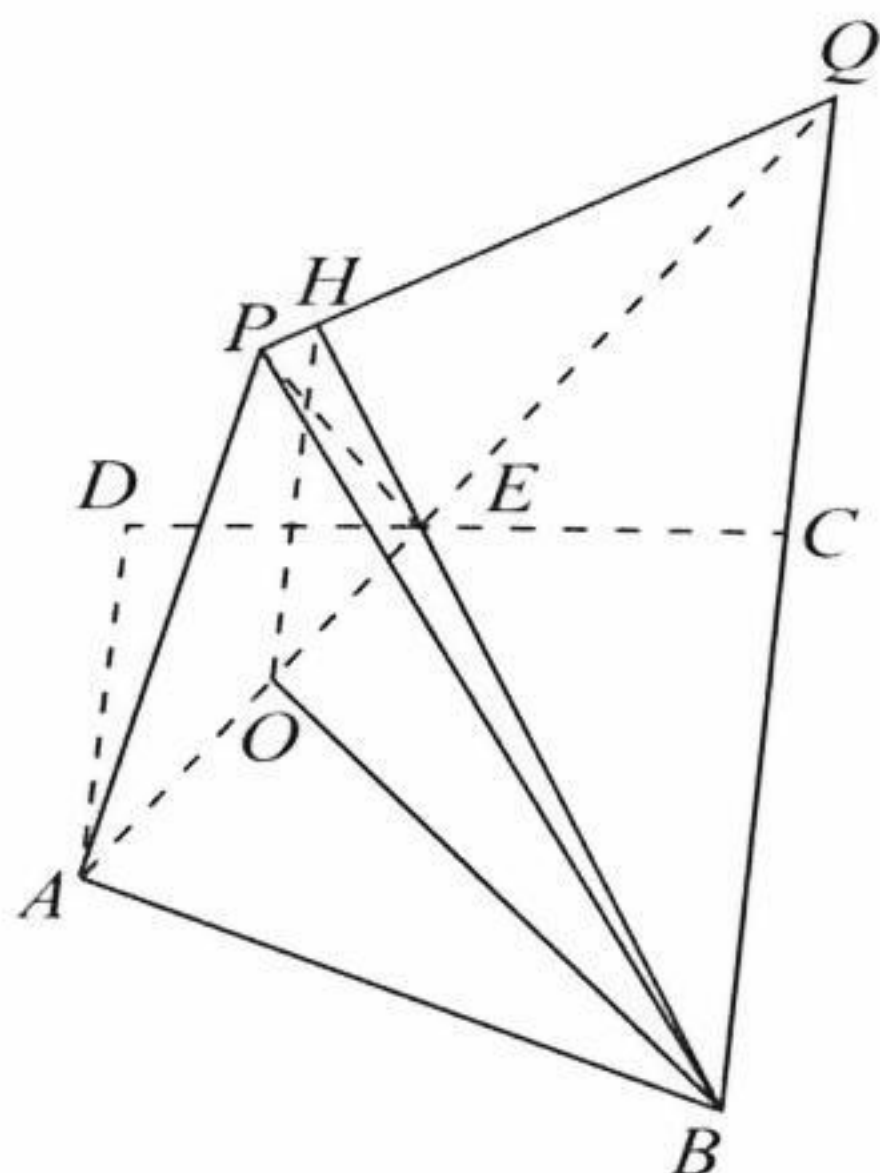
步骤三: 求平面 PAE 的法向量 (2 分);

步骤四: 求值和结论 (2 分).

方法 2:

如图, 分别延长 AE , BC 交于点 Q , 则 $OQ = 3\sqrt{2}$, $PQ = 2\sqrt{5}$,

Q 过 O 作 OH 垂直 PQ 于 H ,9 分



$\because BO \perp$ 平面 PAQ , $PQ \subset$ 平面 PAQ , $\therefore BO \perp PQ$,

又 $OH \perp PQ$, $OH \cap OB = O$, $\therefore PQ \perp$ 平面 OHB ,

$\therefore PQ \perp HB$, 平面 PAE 与平面 PBC 的夹角即为 $\angle OHB$,12 分

易知 $\sin \angle PQA = \frac{PO}{PQ} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\therefore OH = OQ \sin \angle PQA = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$,

故 $\tan \angle OHB = \frac{OB}{OH} = \sqrt{10}$, $\cos \angle OHB = \frac{\sqrt{11}}{11}$15 分

评分细则:

步骤一: 作辅助线 (1 分);

步骤二: 证明 $\angle OHB$ 为平面 PAE 与平面 PBC 的夹角, 具体过程酌情给分 (3 分);

步骤四: 求值和结论 (3 分).

18. (17 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n + a_{n+1} = k \times 2^{n-1}$ ($k > 0$).

(1) 设 $b_n = a_{2n+1} - a_{2n-1}$, 证明: 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列;

(2) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 求 k 的值;

(3) 若 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $a_n < a_{n+1}$, 求 k 的取值范围.

方法 1:

解: (1) 由已知可得 $a_{2n-1} + a_{2n} = k \times 2^{2n-2}$, 且 $a_{2n} + a_{2n+1} = k \times 2^{2n-1}$,1 分

$\therefore a_{2n+1} - a_{2n-1} = k \times (2^{2n-1} - 2^{2n-2}) = k \times 4^{n-1}$, 即 $b_n = k \times 4^{n-1}$,2 分

$\because b_1 = a_3 - a_1 = k > 0$, 且 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{k \times 4^n}{k \times 4^{n-1}} = 4$,

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是首项为 k , 公比为 4 的等比数列.4 分

评分细则:

步骤一: 求 $b_n = k \times 4^{n-1}$ (2 分);

步骤二: 证明和结论 (2 分).

(2) 易知 $a_1 + a_2 = k$, 且 $a_2 + a_3 = 2k$,

$\therefore a_2 = k - 1$, $a_3 = 2k - (k - 1) = k + 1$, $\therefore a_2^2 - a_1 a_3 = k^2 - 3k = 0$,5 分

$\because k > 0$, $\therefore k = 3$,6 分

当 $k = 3$ 时,

$\because a_{2n+1} - a_{2n-1} = 3 \times 4^{n-1}$,

$\therefore a_{2n+1} = (a_{2n+1} - a_{2n-1}) + (a_{2n-1} - a_{2n-3}) + \cdots + (a_3 - a_1) + a_1$

$= 3 \times (4^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + 1) + 1 = 2^{2n}$,7 分

$\because a_{2n} + a_{2n+1} = 3 \times 2^{2n-1}$,

$\therefore a_{2n} = 3 \times 2^{2n-1} - 4^n = 2^{2n-1}$,8 分

$\therefore a_n = 2^{n-1}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}^*$,

又 $a_1 = 1 = 2^{1-1}$, $\therefore a_n = 2^{n-1}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $\therefore \{a_n\}$ 为等比数列,

综上所述, 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则 $k = 3$9 分

评分细则:

步骤一: 必要性得到 $k = 3$ (2 分);

步骤二: 验证 $k = 3$, 其中奇数项和偶数项通项各 1 分 (3 分).

其他解法酌情给分

$$(3) \because a_{2n+1} - a_{2n-1} = k \times 4^{n-1},$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{2n+1} &= (a_{2n+1} - a_{2n-1}) + (a_{2n-1} - a_{2n-3}) + \cdots + (a_3 - a_1) + a_1 \\ &= k \times (4^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + 1) + 1 = \frac{k}{3} \times 2^{2n} + 1 - \frac{k}{3}, \end{aligned} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore a_{2n} = k \times 2^{2n-1} - a_{2n+1} = k \times 2^{2n-1} - \left(\frac{k}{3} \times 2^{2n} + 1 - \frac{k}{3} \right) = \frac{k}{3} \times 2^{2n-1} - 1 + \frac{k}{3}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\because a_{2n-1} = \frac{k}{3} \times 2^{2n-2} + 1 - \frac{k}{3}, \quad n \geq 2, \quad n \in \mathbf{N}^*, \quad \text{且 } a_1 = 1 = \frac{k}{3} \times 2^{2 \times 1 - 2} + 1 - \frac{k}{3},$$

$$\therefore a_{2n-1} = \frac{k}{3} \times 2^{2n-2} + 1 - \frac{k}{3}, \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

不难知道 $a_{2n-1} < a_{2n+1}$, $a_{2n} < a_{2n+2}$, 故条件等价于 $a_{2n-1} < a_{2n} < a_{2n+1}$ 恒成立, $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

$$\text{由 } a_{2n} < a_{2n+1}, \text{ 得 } \frac{k}{3} \times 2^{2n-1} - 1 + \frac{k}{3} < \frac{k}{3} \times 2^{2n} + 1 - \frac{k}{3}, \therefore \frac{k}{3} (2^{2n-1} - 2) > -2,$$

$$\because \frac{k}{3} (2^{2n-1} - 2) \geq \frac{k}{3} (2 - 2) = 0 > -2, \therefore \text{任意 } k > 0 \text{ 均符合题意}, \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\text{由 } a_{2n-1} < a_{2n}, \text{ 得 } \frac{k}{3} \times 2^{2n-2} + 1 - \frac{k}{3} < \frac{k}{3} \times 2^{2n-1} - 1 + \frac{k}{3}, \text{ 解得 } k > \frac{3}{2^{2n-3} + 1},$$

$$\text{显然 } \left\{ \frac{3}{2^{2n-3} + 1} \right\} \text{ 是递减数列, } \therefore \frac{3}{2^{2n-3} + 1} \leq \frac{3}{2^{2 \times 1 - 3} + 1} = 2, \therefore k > 2, \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

综上所述, k 的取值范围为 $(2, +\infty)$. $\dots\dots\dots 17 \text{ 分}$

评分细则:

步骤一: 求奇数项和偶数项通项 (2 分);

步骤二: 分别处理 $a_{2n} < a_{2n+1}$, $a_{2n-1} < a_{2n}$ (4 分);

步骤三: 结论 (1 分);

其他解法酌情给分

方法 2:

解: (1) 由 $a_n + a_{n+1} = k \times 2^{n-1}$ 可得, $a_{n+1} - \frac{k}{3} \times 2^n = -(a_n - \frac{k}{3} \times 2^{n-1})$,1 分

$$\therefore a_n - \frac{k}{3} \times 2^{n-1} = (a_1 - \frac{k}{3})(-1)^{n-1} = \frac{3-k}{3}(-1)^{n-1},$$

$$\therefore a_n = \frac{3-k}{3}(-1)^{n-1} + \frac{k}{3} \times 2^{n-1}, \text{2 分}$$

$$b_n = a_{2n+1} - a_{2n-1} = \frac{3-k}{3}(-1)^{2n} + \frac{k}{3} \times 2^{2n} - [\frac{3-k}{3}(-1)^{2n-2} + \frac{k}{3} \times 2^{2n-2}]$$

$$= \frac{3-k}{3} + \frac{k}{3} \times 2^{2n} - [\frac{3-k}{3} + \frac{k}{3} \times 2^{2n-2}] = k \times 4^{n-1}, \text{3 分}$$

$$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{k \times 4^n}{k \times 4^{n-1}} = 4,$$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是首项为 k , 公比为 4 的等比数列.4 分

评分细则:

步骤一: 求出通项 (2 分);

步骤二: 求 b_n (1 分);

步骤三: 证明及结论 (1 分);

(2) 易知 $a_1 + a_2 = k$, 且 $a_2 + a_3 = 2k$,

$$\therefore a_2 = k - 1, a_3 = 2k - (k - 1) = k + 1, \therefore a_2^2 - a_1 a_3 = k^2 - 3k = 0, \text{5 分}$$

$$\because k > 0, \therefore k = 3, \text{6 分}$$

由 (1) 可得, $a_n = 2^{n-1}$, $\therefore \{a_n\}$ 为等比数列,

综上所述, 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则 $k = 3$9 分

评分细则:

步骤一: 必要性得到 $k = 3$ (2 分);

步骤二: 验证及结论 (3 分);

(3) 依题意, $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n < a_{n+1}$,

$$\text{即 } \forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{3-k}{3}(-1)^{n-1} + \frac{k}{3} \times 2^{n-1} < \frac{3-k}{3}(-1)^n + \frac{k}{3} \times 2^n, \text{11 分}$$

当 n 为偶数时, 即 $\frac{3-k}{3}(-1) + \frac{k}{3} \times 2^{n-1} < \frac{3-k}{3} + \frac{k}{3} \times 2^n$,

即 $2 - \frac{6}{k} < 2^{n-1}$, $\because 2 - \frac{6}{k} < 2 < 2^{n-1}$,

$\therefore 2 - \frac{6}{k} < 2^{n-1}$ 对任意偶数恒成立,13 分

当 n 为奇数时, 即 $\frac{3-k}{3} + \frac{k}{3} \times 2^{n-1} < \frac{3-k}{3}(-1) + \frac{k}{3} \times 2^n$, 即 $\frac{6}{k} - 2 < 2^{n-1}$,

$\because 2^{n-1} \geq 2^{1-1} = 1$, $\therefore \frac{6}{k} - 2 < 1$, 解得 $k > 2$,16 分

综上所述, k 的取值范围为 $(2, +\infty)$17 分

评分细则:

步骤一: 转化为 $a_n < a_{n+1}$, 代入写出目标式 (2 分);

步骤二: 分别讨论 n 为偶数、奇数 (5 分);

步骤三: 结论 (1 分).

19. (17 分)

设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x} (x > 0)$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程;

(2) 设 x_n 为 $f(x)$ 从小到大的第 n ($n \in \mathbf{N}^*$) 个极值点.

(i) 证明: $x_2 - x_1 > \pi$;

(ii) 设 $a_n = x_n + \frac{1}{x_n}$, 证明: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < \frac{10}{9\pi^2}$.

解: (1) 易知 $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$, $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{4}{\pi^2}$,2 分

又 $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$, $\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程为 $y - f(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2})$,3 分

整理得, $y = -\frac{4}{\pi^2}x + \frac{4}{\pi}$,

$\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程为 $y = -\frac{4}{\pi^2}x + \frac{4}{\pi}$4 分

评分细则:

步骤一: 求导以及得到 $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{4}{\pi^2}$ (2 分);

步骤二: 写出切线方程 (1 分);

步骤三: 整理以及结论 (1 分).

(2) 令 $f'(x) = 0$, 显然 $\cos x \neq 0$,

$$\therefore f'(x) = \frac{-\cos x(\tan x - x)}{x^2}, \therefore \tan x - x = 0, \text{ 即 } \tan x_n - x_n = 0, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

当 $x \in (n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2})$ 时, 设 $g(x) = \tan x - x$, 则 $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x > 0$,

$\therefore$ 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 时, $g(\pi) = -\pi < 0$, $x \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$, $\therefore x_1 \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$,

同理可得, $x_2 \in (2\pi, \frac{5\pi}{2})$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

评分细则:

步骤一: 得到 $\tan x_n - x_n = 0$ (1 分); 步骤二: 判断 $g(x) = \tan x - x$ 的单调性 (1 分);

步骤三: 得到 $x_1 \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, $x_2 \in (2\pi, \frac{5\pi}{2})$ (1 分).

方法 1:

要证: $x_2 - x_1 > \pi$, 即证: $\frac{3}{2}\pi - x_1 > \frac{5}{2}\pi - x_2$, $\because \frac{3}{2}\pi - x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\frac{5}{2}\pi - x_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$\therefore$ 只需证: $\tan(\frac{3}{2}\pi - x_1) > \tan(\frac{5}{2}\pi - x_2)$, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$$\because \tan(\frac{3}{2}\pi - x_1) = \frac{1}{\tan x_1} = \frac{1}{x_1}, \tan(\frac{5}{2}\pi - x_2) = \frac{1}{\tan x_2} = \frac{1}{x_2},$$

$\therefore$ 只需证: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, 即证 $x_1 < x_2$, 显然成立,

$\therefore x_2 - x_1 > \pi$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

评分细则:

步骤一: 转化为证 $\tan(\frac{3}{2}\pi - x_1) > \tan(\frac{5}{2}\pi - x_2)$ (2 分); 步骤二: 结论 (1 分).

方法 2:

$$\because g(x_2 - \pi) = \tan(x_2 - \pi) - (x_2 - \pi) = x_2 - (x_2 - \pi) = \pi > 0,$$

$\therefore g(x_2 - \pi) > g(x_1)$, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$\therefore x_2 - \pi > x_1$, 即 $x_2 - x_1 > \pi$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

评分细则:

步骤一: 得到 $g(x_2 - \pi) > g(x_1)$ (2 分);

步骤二：单调性证明及结论（1分）.

(ii) 由 (i) 可知, $g(x) = \tan x - x$ 在区间 $(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2})$ 上单调递增,

$g(n\pi) = -n\pi < 0$, 当 $x \rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$,

$\therefore x_n \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$, $n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$,11 分

由 (i) 可知, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, 即 $\tan x > x$,

$\therefore \tan(n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n) = \frac{1}{\tan x_n} > n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n$,

$\because \tan x_n = x_n$, $\therefore \frac{1}{x_n} > n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n$, 即 $x_n + \frac{1}{x_n} = a_n > n\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+1)\pi}{2}$,14 分

$\therefore \frac{1}{a_n^2} < \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} < \frac{4}{\pi^2(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{\pi^2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$,15 分

当 $n=1$ 时, $\frac{1}{a_1^2} < \frac{4}{9\pi^2} < \frac{10}{9\pi^2}$ 成立,16 分

$\therefore$ 当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < \frac{4}{9\pi^2} + \frac{2}{\pi^2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$
 $= \frac{4}{9\pi^2} + \frac{2}{3\pi^2} - \frac{2}{(2n+1)\pi^2} < \frac{10}{9\pi^2}.$

$\therefore \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < \frac{10}{9\pi^2}$17 分

评分细则:

步骤一: 证明 $x_n \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$, $n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ (1分);

步骤二: 由 $\tan x > x$, 得到 $a_n > \frac{(2n+1)\pi}{2}$ (3分);

步骤三: $\frac{1}{a_n^2}$ 放缩裂项 (1分);

步骤四: 证明及结论, 其中考虑 $n=1$ 1分 (2分).

其他解法酌情给分