厦门市2025届高中毕业班第二次质量检测

数学试题

满分:150分　　考试时间:120分钟

考生注意:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将答题卡交回.

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|3\leqslant x<5\}$, $B=\{x|x>4\}$,则 $A\cap(C_{R}B)=$

A. $\{x|x\geqslant 3\}$　　B. $\{x|x\leqslant 4\}$　　C. $\{x|3<x<4\}$　　D. $\{x|3\leqslant x\leqslant 4\}$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

A. 0　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

3. 直线 $l:\sqrt{3}x-y=0$ 被圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 所截得的弦长为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

4. 已知 $\alpha\in(0,\pi)$,若 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$,则 $\cos2\alpha=$

A. $-\dfrac{3}{8}$　　B. $-\dfrac{3}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{55}}{8}$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{n+2}$,则 $\{a_n\}$ 的前6项和为

A. $\dfrac{7}{6}$　　B. $\dfrac{5}{3}$　　C. $\dfrac{12}{7}$　　D. $\dfrac{7}{4}$

6. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F, P 为 C 上一点, M 为 PF 的中点,则 $\tan\angle MOF$ 的最大值为

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

7. 已知 $0.3^m=2^n=0.4$,则

A. $mn<m+n<0$　　B. $m+n<mn<0$

C. $m+n<0<mn$　　D. $0<mn<m+n$

8. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1,点 P 在正方体的内切球表面上运动,且满足 $D_1P/\!/$平面 A_1BC_1,则 AP 的最小值为

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分

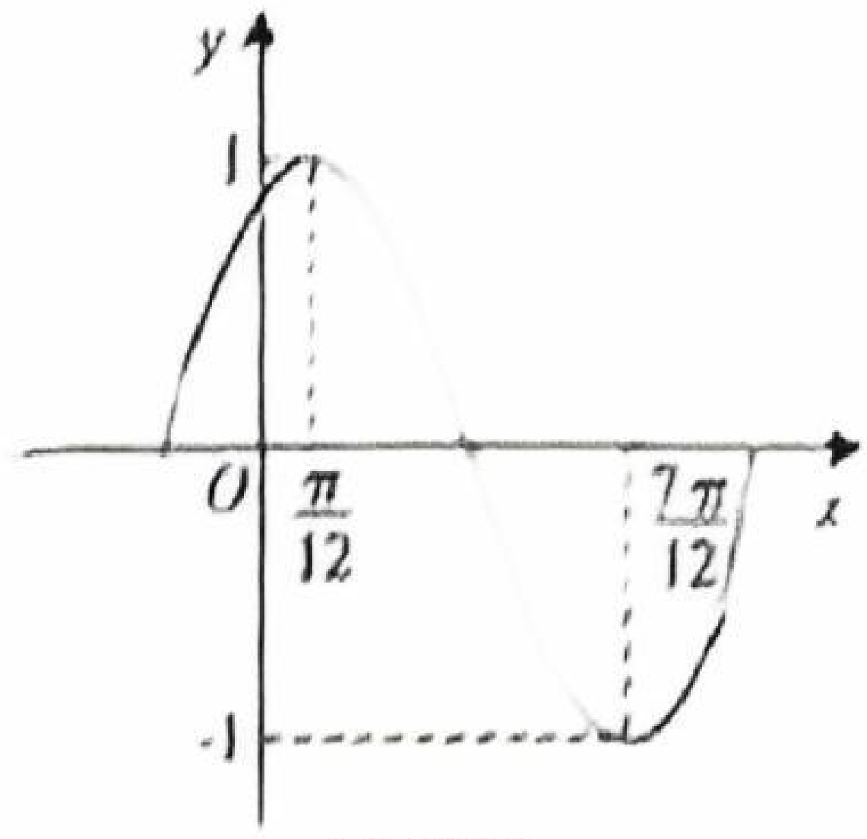
9. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则

A. $\omega=2$

B. $\varphi=\frac{\pi}{6}$

C. $y=f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$是奇函数

D. 当$x\in[3\pi,4\pi]$时，$f(x)$的图象与x轴有2个交点



第9题图

10. 某校开展"强国有我，筑梦前行"主题演讲比赛，共有6位男生，4位女生进入决赛. 现通过抽签决定出场顺序，记事件A表示"第一位出场的是女生"，事件B表示"第二位出场的是女生"，则

A. $P(AB)=\frac{3}{5}$　　B. $P(B|A)=\frac{1}{3}$　　C. $P(A)=P(B)$　　D. $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$

11. 分别用$m(x)$，$M(x)$表示$f(x)$，$g(x)$中的最小者和最大者，记为$m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$，$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$. 若$f(x)=x+\frac{1}{x}$，$g(x)=x-\frac{1}{x}$，则

A. $m(1)+M(-1)=0$

B. 函数$y=m(x)-2x$有2个零点

C. 函数$y=m(x)M(x)$的图象关于y轴对称

D. 关于x的方程$(m(x)-\sqrt{a})(M(x)-\sqrt{a})=0$的所有解的乘积为$-1$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 已知$z=\frac{1-i}{1+i}$，则$|z+1|=$ __▲__ .

13. 在五一小长假期间，要从5人中选若干人在3天假期值班(每天只需1人值班)，不出现同一人连续值班2天，则可能的安排方法有 __▲__ 种.

14. l_1，l_2，l_3是同一平面内的三条平行直线，l_1，l_3位于l_2两侧，l_1与l_2的距离为1，l_2与l_3的距离为2，点A，B，C分别在l_1，l_2，l_3上运动. 若$BA=BC$，则$\triangle ABC$面积的最小值为 __▲__ .

四、解答题：本题共5小题，共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13分）

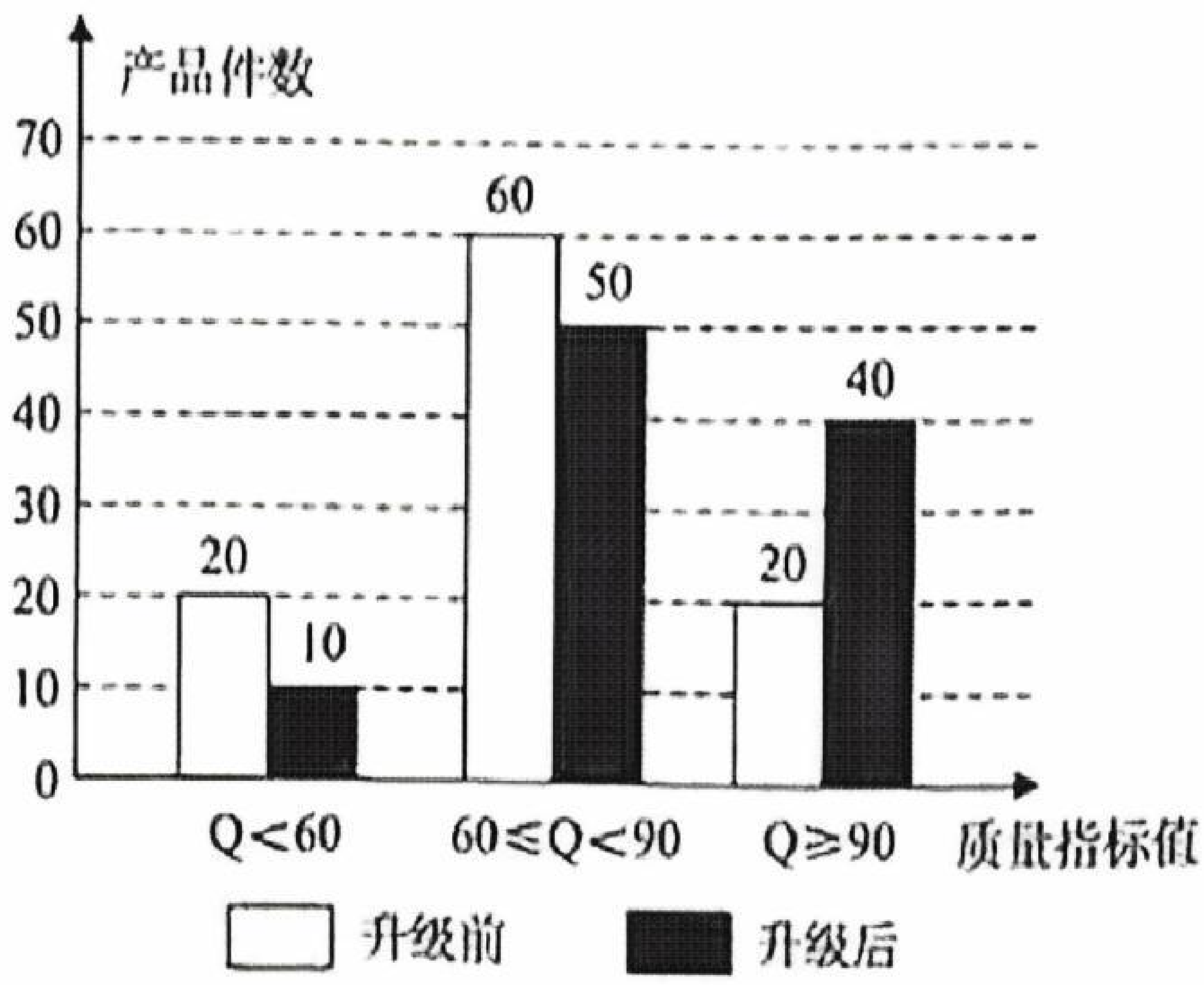
已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n+a_n=n+3$.

（1）证明：数列$\{a_n-1\}$是等比数列；

（2）记数列$\left\{\dfrac{a_n}{a_n-1}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，求满足$T_n>2025$的最小正整数$n$的值.

16.（15分）

某工厂生产某款产品，根据质量指标值Q对产品进行等级划分. Q小于60的产品视为不合格品，Q不小于60的产品视为合格品，其中Q不小于90的产品视为优质品. 工厂为了提升产品质量，对设备进行升级. 为考察设备升级后产品的质量，质检部门对设备升级前后生产的产品进行简单随机抽样，得到样本数据，制作如下频数表：



（1）根据所给数据填写下列2×2列联表，并依据小概率值$\alpha=0.1$的独立性检验，分析产品合格与设备升级是否有关联.

	不合格品件数	合格品件数	合计
升级前			
升级后			
合计			

（2）以上述样本中设备升级后的优质品频率作为升级后产品的优质品率，质检部门为检查设备升级后是否正常运转，每天从该设备生产的产品中随机抽取10件产品并检测.

（i）记X表示抽取的10件产品中的优质品件数，求$P(X\leqslant 1)$（精确到0.001）；

（ii）质检部门规定：若抽检的10件产品中，至少出现2件优质品，则认为设备正常运转，否则需对设备进行检修. 请根据$P(X\leqslant 1)$的值解释上述规定的合理性.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

α	0.1	0.05	0.01
x_α	2.706	3.841	6.635

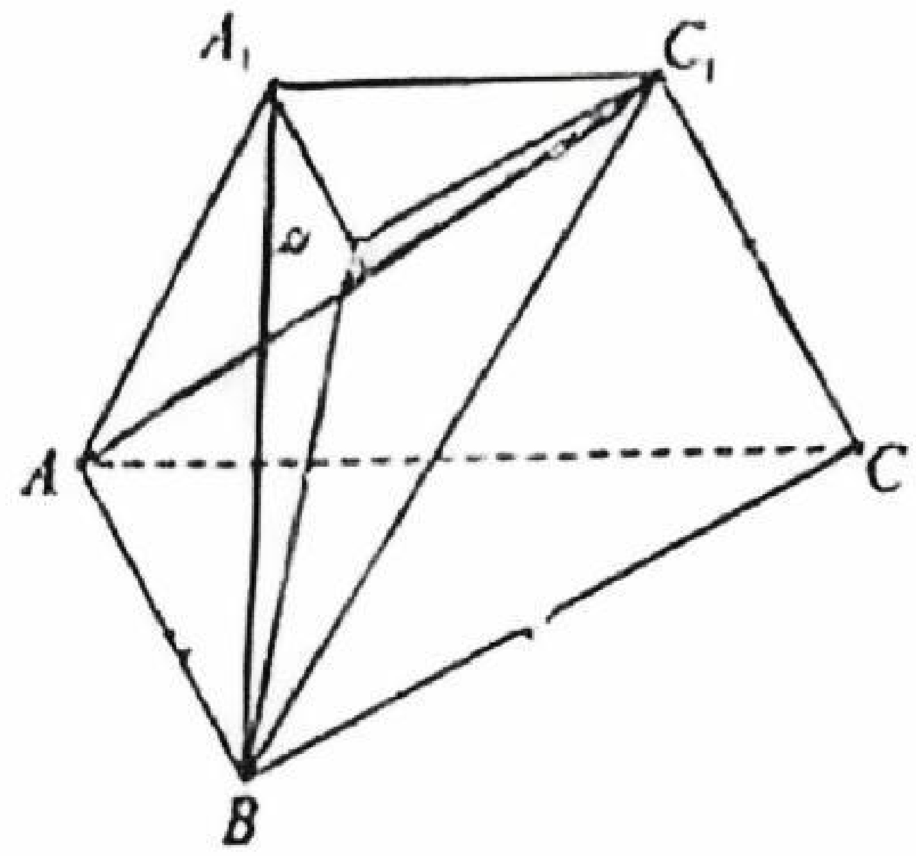
参考数据：$0.6^8\approx 0.0168$，$0.6^9\approx 0.0101$，$0.6^{10}\approx 0.0060$.

17.(15分)

如图,在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABC,$AA_1=A_1C_1=C_1C=2$,$AC=4$,$BA=BC$.

(1)证明:$A_1B\perp AC_1$;

(2)当直线 BB_1 与平面 BA_1C_1 所成的角最大时,求三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积.



18.(17分)

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2,过 C 的右焦点 $F(2,0)$ 的直线 l 与 C 的右支交于 P,Q 两点. 当 l 与 x 轴垂直时,$\angle PA_1F=\frac{\pi}{4}$.

(1)求 C 的方程;

(2)直线 A_1P,A_1Q 与直线 $x=1$ 的交点分别为 M,N、E 为 A_2M 的中点.

(i) 求 $|MN|$ 的最小值;

(ii)证明:点 A_2 关于直线 EF 对称的点在 l 上.

19.(17分)

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,若 $y=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,则称 $f(x)$ 为"强增函数".

(1)若 $f(x)=x^2-x\ln x+a$ 是"强增函数",求 a 的取值范围;

(2)若 $f(x)$ 为"强增函数",且 $f(x)<0$. 当 $0<x<1$ 时,比较 $e^{-x}f(x)$ 与 $e^{-\frac{1}{x}}f(\frac{1}{x})$ 的大小,并说明理由;

(3)已知 $f(x)=2e^x-x^2\ln x-2$,$r>0$,$s>0$,$t>0$. 证明:$f(r+s+t)>f(r)+f(s)+f(t)$.

参考结论:当 $x\to0$ 时,$x^2\ln x\to0$.

厦门市2025届高三毕业班第二次质量检测参考答案

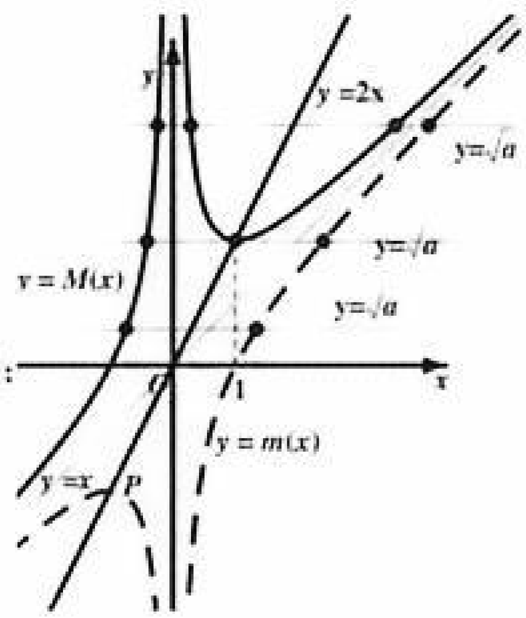
一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.

1~4：$DBAC$　　5~8：$CBAA$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9．AD　　10．BCD　　11．ACD

11．解析：$f(x)>g(x)$ 得 $x>0$，



所以 $m(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{x},x<0\\ x-\dfrac{1}{x},x>0\end{cases}$，$M(x)=\begin{cases}x-\dfrac{1}{x},x<0\\ x+\dfrac{1}{x},x>0\end{cases}$.

所以 $m(1)+M(-1)=0+0=0$，故选项A正确；

$m(x)-2x=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-x,x<0\\ -x-\dfrac{1}{x},x>0\end{cases}$，所以 $m(x)-2x=0$ 得 $x=-1$，故选项B错误；

$y=m(x)M(x)=x^2-\dfrac{1}{x^2}$，显然为偶函数，故选项C正确；

$\left(m(x)-\sqrt{a}\right)\left(M(x)-\sqrt{a}\right)=0$ 等价于 $m(x)=\sqrt{a}$ 或 $M(x)=\sqrt{a}$．

因为 $\sqrt{a}\geqslant 0$，所以 $m(x)=\sqrt{a}\Leftrightarrow x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{a}(x>0)$，即 $x^2-\sqrt{a}x-1=0$，

显然该方程有且仅有一个正解 x_1，

$M(x)=\sqrt{a}\Leftrightarrow x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{a}(x<0)$ 或 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{a}(x>0)$，

$x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{a}(x<0)\Leftrightarrow x^2-\sqrt{a}x-1=0(x<0)$ 显然该方程有且仅有一个负解 x_2，且满足 $x_1x_2=-1$，

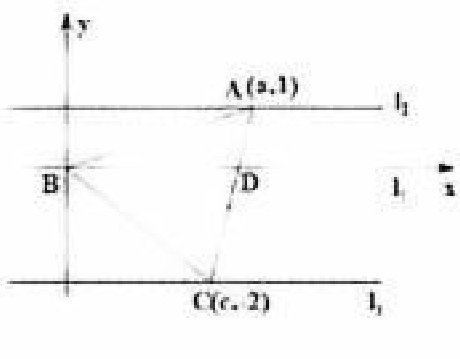
$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{a}(x>0)\Leftrightarrow x^2-\sqrt{a}x+1=0$，方程要么无解，要么一解 $x_0=1$，要么两个正解 x_3,x_4，且 $x_3x_4=1$．

所以关于 x 的方程 $\left(m(x)-\sqrt{a}\right)\left(M(x)-\sqrt{a}\right)=0$ 的所有解的乘积为 -1，故选项D正确．

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．

12．$\sqrt{2}$　　13．80　　14．$\dfrac{3}{2}$

14．解法1：如图，以 B 为坐标原点，建立平面直角坐标系，据题意，设 $A(a,1)$，$C(c,-2)$，



∵ $AB=BC$，∴ $a^2+1=c^2+4$，即 $a^2-c^2=3$，

∵直线 AC 的方程为 $y+2=\dfrac{3}{a-c}(x-c)$，

∴直线 AC 与 x 轴的交点 $D(\dfrac{2a+c}{3},0)$，

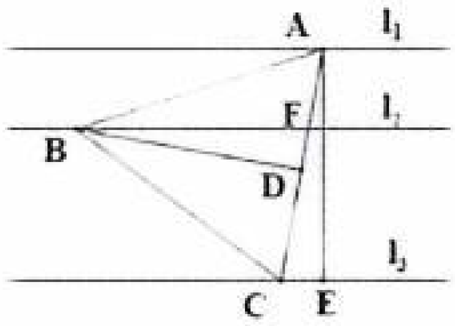
∴ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 3\times|BD|=\dfrac{|2a+c|}{2}$，令 $t=2a+c$，则有 $c=t-2a$，

又∵ $a^2-c^2=3$，∴方程 $a^2-(t-2a)^2=3$ 有解，即 $3a^2-4at+t^2+3=0$ 有解，

∴ $\Delta=16t^2-12(t^2+3)\geqslant 0$，得到 $t\geqslant 3$ 或 $t\leqslant -3$，所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{|t|}{2}\geqslant\dfrac{3}{2}$，当且仅当 $a=2$，$c=-1$ 或 $a=-2$，$c=1$ 时取得最小值．

（也可 $a^2-c^2=(a-c)(a+c)=3$，$|2a+c|=\left|\dfrac{3}{2}(a+c)+\dfrac{1}{2}(a-c)\right|\geqslant 2\sqrt{\dfrac{3}{2}(a+c)\cdot\dfrac{1}{2}(a-c)}=\dfrac{3}{2}$）

解法2：如图，过 A 点作 $AE\perp l_2$ 于 E，过 B 点作 $BD\perp AC$ 于 D，



∵ $AB=BC$，∴ D 是 AC 的中点，易得 $AF=\frac{1}{3}AC$，则 $DF=\frac{1}{6}AC$．

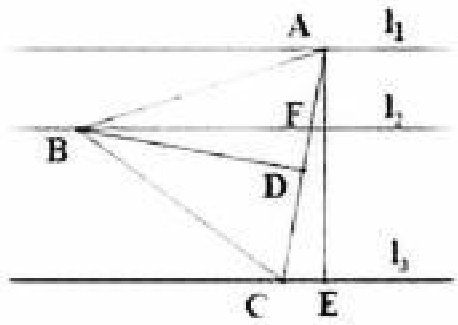
设 $\angle ACE=\angle BFD=\alpha$，则 $AC=\frac{3}{\sin\alpha}$，

$BF=\frac{DF}{\cos\alpha}=\frac{AC}{6\cos\alpha}=\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin 2\alpha}\geqslant 1$，

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BF\cdot AE\geqslant\frac{3}{2}$，

∵ $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，∴当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 取得最小值 $\frac{3}{2}$．

解法3：过 B 点作 $BD\perp AC$ 于 D．



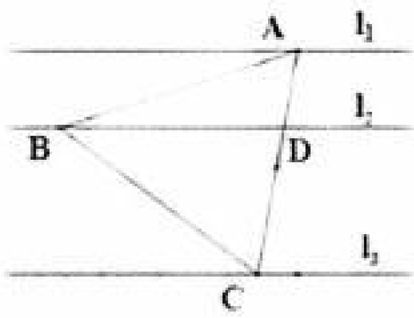
∵ $AB=BC$，∴ D 是 AC 的中点，易得 $AF=\frac{1}{3}AC$，则 $DF=\frac{1}{6}AC$．

所以 $BF^2=BD^2+DF^2\geqslant 2BD\cdot DF=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$．

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{3}{2}BF$，则 $S^2_{\triangle ABC}=\frac{9}{4}BF^2\geqslant\frac{9}{4}\times\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{3}{2}S_{\triangle ABC}$，

当且仅当 $BD=DF$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$．

解法4：设直线 AC 与 l_2 交于 D，$\angle ABD=\alpha$，$\angle DBC=\beta$，



据题意可得，$AB=\frac{1}{\sin\alpha}$，$BC=\frac{2}{\sin\beta}$，

∵ $AB=BC$，∴ $\sin\beta=2\sin\alpha$．

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin^2\alpha}=\frac{\cos\beta+2\cos\alpha}{2\sin\alpha}$，

令 $t=\frac{\cos\beta+2\cos\alpha}{2\sin\alpha}$，则有 $\cos\beta=2t\sin\alpha-2\cos\alpha$，又∵ $\sin\beta=2\sin\alpha$，

∴ $1=\cos^2\beta+\sin^2\beta=(2t\sin\alpha-2\cos\alpha)^2+4\sin^2\alpha$，

化简可得：$4t^2\sin^2\alpha-8t\sin\alpha\cos\alpha+3=0$，即 $2t^2\cos 2\alpha+4t\sin 2\alpha=2t^2+3$，

即 $\sqrt{4t^4+16t^2}\sin(2\alpha+\varphi)=2t^2+3$（其中 $\tan\varphi=\frac{t}{2}$）．

∴ $2t^2+3\leqslant\sqrt{4t^4+16t^2}$，解得 $t^2\geqslant\frac{9}{4}$，即 $t\geqslant\frac{3}{2}$ 或 $t\leqslant-\frac{3}{2}$，

∵当 $t=\frac{3}{2}$ 时，$\tan\varphi=\frac{3}{4}$，∴ $\cos 2\alpha=\sin\varphi=\frac{3}{5}$，即 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

∴当 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，$\triangle ABC$ 的面积取得最小值 $\frac{3}{2}$．

四、解答题：共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．解：（1）当 $n=1$ 时，$S_1+a_1=4$，则 $a_1=2$，……………………………………………… 1分

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n+a_n=n+3$①，$S_{n-1}+a_{n-1}=n+2$②，

作差得 $a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2}$，…………………………………………………………… 3分

所以 $a_n-1=\frac{1}{2}a_{n-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(a_{n-1}-1)$，…………………………………………… 4分

又 $a_1-1=1$，则 $\frac{a_n-1}{a_{n-1}-1}=\frac{1}{2}$，所以 $\{a_n-1\}$ 是以1为首项，$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列．…………… 6分

（2）由（1）得 $a_n-1=\frac{1}{2^{n-1}}$，所以 $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}+1$，所以 $\frac{a_n}{a_n-1}=2^{n-1}+1$，…………………… 8分

$T_n=(2^0+1)+(2^1+1)+\cdots+(2^{n-1}+1)$

$=\left(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1}\right)+n$

$=\dfrac{1\times\left(1-2^n\right)}{1-2}+n$

$=2^n+n-1$， ………………………………………………………………………………………… 10 分

因为 $\dfrac{a_n}{a_n-1}=2^{n-1}+1>0$，所以 $\{T_n\}$ 是递增数列.

又 $T_{10}=1033<2025$，$T_{11}=2058>2025$，所以满足 $T_n>2025$ 的最小正整数 n 为 11. ……………… 13 分

16. （1）依题意可得列联表为：

	不合格品件数	合格品件数	合计
升级前	20	80	100
升级后	10	90	100
合计	30	170	200

……………………………………………………………………………………………………… 2 分

零假设为 H_0：产品合格与设备升级没有关联. ……………………………………………… 3 分

由列联表可计算 $\chi^2=\dfrac{200\times(80\times10-90\times20)^2}{170\times30\times100\times100}\approx3.922>2.706$， ……………………… 6 分

依据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，我们可以推断 H_0 不成立，因此可以认为产品合格与设备升级有关联. 该推断犯错误的概率不超过 0.1. …………………………………………………………… 7 分

（2）①根据题意，设备升级后的优质品率为 0.4. ……………………………………………… 9 分

可以认为从生产线中抽出的 10 件产品是否为优质品是相互独立的，则 $X\sim B(10,0.4)$，

$P(X\leqslant1)=C_{10}^0\times0.6^{10}+C_{10}^1\times0.4\times0.6^9=0.6^{10}+4\times0.6^9\approx0.006+4\times0.0101\approx0.046$.

所以 $P(X\leqslant1)\approx0.046$. …………………………………………………………………… 13 分

②如果设备运转正常，一天内抽取的 10 件产品中，优质品件数少于 2 个的概率只有 0.046，发生的概率很小. 因此一旦发生这种情况，就有理由认为设备运转异常，需对设备进行检修，可见上述规定是合理的. …………………………………………………………………………………………… 15 分

17. 解：（1）取 AC 中点 O，连接 BO，A_1O，C_1O.

因为 $BA=BC$，O 为 AC 中点，所以 $BO\perp AC$， ………………………………………… 1 分

又因为平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 ABC，平面 $A_1ACC_1\cap$ 平面 $ABC=AC$，$BO\subset$ 平面 ABC，

所以 $BO\perp$ 平面 A_1ACC_1. ………………………………………………………………… 2 分

又因为 $AC_1\subset$ 平面 A_1ACC_1，所以 $AC_1\perp BO$. ………………………………………… 3 分

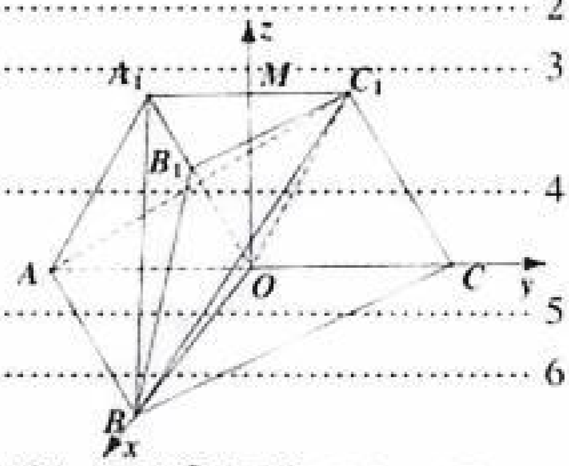
因为 $A_1C_1//AO$，$A_1C_1=AO=AA_1$，

所以四边形 A_1AOC_1 为菱形，$AC_1\perp A_1O$. ………………………………………………… 4 分

又因为 $A_1O\cap BO=O$，$A_1O\subset$ 平面 A_1OB，$BO\subset$ 平面 A_1OB，

所以 $AC_1\perp$ 平面 A_1OB. ……………………………………………………………………… 5 分

因为 $A_1B\subset$ 平面 A_1OB，所以 $A_1B\perp AC_1$. ……………………………………………… 6 分



（2）解法 1：

取 A_1C_1 中点 M，则有 $OM\perp AC$，又平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 ABC，平面 $A_1ACC_1\cap$ 平面 $ABC=AC$，$OM\subset$ 平面 A_1C_1CA，则 $OM\perp$ 平面ABC，则 OM,OB,OC 两两垂直.

依题可建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$，

设 $OB=a,a>0$，则 $A_1\left(0,-1,\sqrt3\right)$，$C_1\left(0,1,\sqrt3\right)$，$B(a,0,0)$，$A(0,-2,0)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(0,2,0)$，

$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{BA_1}+\dfrac12\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac a2,0,\sqrt3\right)$， ……………………………………… 8 分

设平面 A_1BC_1 的法向量为 $n=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1C_1}\cdot n=2y=0\\ \overrightarrow{A_1B}\cdot n=ax+y-\sqrt3z=0\end{cases}$，取 $x=\sqrt3$，得 $n=\left(\sqrt3,0,a\right)$. ………………………… 10 分

设直线 BB_1 与平面 BA_1C_1 所成的角为 θ，

$$\sin\theta=\left|\cos\left\langle \overrightarrow{BB_1},\vec{n}\right\rangle\right|=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}a}{2}\right|}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+3}\cdot\sqrt{3+a^2}}=\frac{\left|\sqrt{3}a\right|}{\sqrt{(a^2+12)\cdot(a^2+3)}}$$ ……………………………………………… 11 分

$$=\frac{\left|\sqrt{3}a\right|}{\sqrt{a^4+15a^2+36}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+\frac{36}{a^2}+15}}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{a^2\cdot\frac{36}{a^2}}+15}}=\frac{1}{3},$$

当且仅当 $a^2=\frac{36}{a^2}$，即 $a=\sqrt{6}$ 时等号成立. ……………………………………………………………… 13 分

所以三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 的体积为 $V=\frac{1}{3}\left(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A_1B_1C_1}+\sqrt{S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}}\right)h$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{6}+\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{6}\times\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{6}}{2}}\right)\times\sqrt{3}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$$ ……………………………………… 15 分

解法2：取 A_1C_1 中点 M，连接 B_1M，BM，OM．则 $B_1M\,/\!/\,BO$，作 $B_1H\perp BM$，垂足为 H．

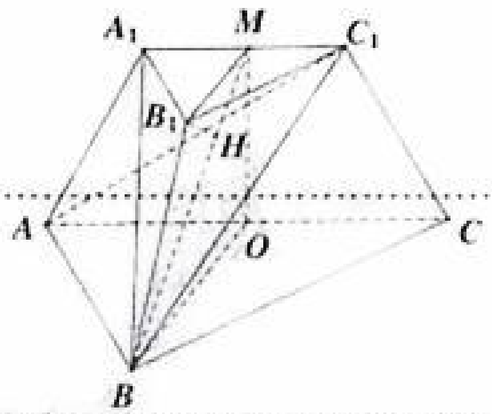
因为 $A_1C_1\perp B_1M$，$A_1C_1\perp OM$，$B_1M\cap OM=M$，$B_1M\subset$ 平面 $BOMB_1$，$MO\subset$ 平面 $BOMB_1$，

所以 $A_1C_1\perp$ 平面 $BOMB_1$．因为 $B_1H\subset$ 平面 BA_1C_1，$A_1C_1\perp B_1H$．

又 $BM\cap A_1C_1=M$，$BM\subset$ 平面 BA_1C_1，$A_1C_1\subset$ 平面 BA_1C_1，

所以 $B_1H\perp$ 平面 BA_1C_1．

所以 $\angle B_1BM$ 即为直线 BB_1 与平面 BA_1C_1 所成的角. ……………………………………………………… 9 分



设 $OB=a, a>0$，则 $B_1B=\sqrt{\frac{a^2}{4}+3}$，$BM=\sqrt{a^2+3}$，$B_1M=\frac{a}{2}$，

$$\cos\angle B_1BM=\frac{B_1B^2+BM^2-B_1M^2}{2B_1B\cdot BM}=\frac{a^2+6}{\sqrt{(a^2+12)(a^2+3)}},$$ ……………………………………… 11 分

令 $t=a^2+6\geqslant6$，则 $\cos\angle B_1BM=\frac{t}{\sqrt{(t+6)(t-3)}}=\sqrt{\frac{1}{-18\left(\frac{1}{t}\right)^2+3\left(\frac{1}{t}\right)+1}}$.

当 $\frac{1}{t}=\frac{1}{12}$，即 $a=\sqrt{6}$ 时 $\cos\angle B_1BM$ 取得最小值，$\angle B_1BM$ 取得最大值. …………………………… 13 分

延长三条侧棱交于 P，则有 $\frac{PA_1}{PA}=\frac{PB_1}{PB}=\frac{PC_1}{PC}=\frac{1}{2}$，则 $V_{P-A_1B_1C_1}=\frac{1}{8}V_{P-ABC}$，

所以三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $V=\frac{7}{8}V_{P-ABC}$，

$$V=\frac{7}{8}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{6}\times2\sqrt{3}=\frac{7\sqrt{2}}{2}.$$ ……………………………………………………………… 15 分

18. 解：（1）当 l 与 x 轴垂直时，$|PF|=\frac{b^2}{a}$，……………………………………………………………………………… 1 分

又 $|A_1F|=a+c$，所以 $a+c=\frac{b^2}{a}=\frac{c^2-a^2}{a}$，即 $c=2a$，……………………………………………………… 2 分

又 $F(2,0)$，则 $c=2$，…… 3 分

所以 $a=1, b=\sqrt{3}, c=2$，所以 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………… 4 分

（2）（i）①$l: y=0$ 不符合题意舍去；

②设 $l: x=ty+2$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

联立方程$\begin{cases} x=ty+2 \\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$得：$(3t^2-1)y^2+12ty+9=0$，

$3t^2-1\neq 0$，$\triangle=144t^2-36(3t^2-1)>0$，$y_1+y_2=\dfrac{-12t}{3t^2-1}, y_1y_2=\dfrac{9}{3t^2-1}<0$，解得$t^2<\dfrac{1}{3}$，…………6分

直线A_1P的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1)$，所以$M\left(1,\dfrac{2y_1}{x_1+1}\right)$，…………7分

同理$N\left(1,\dfrac{2y_2}{x_2+1}\right)$，

所以$|MN|=\left|\dfrac{2y_2}{x_2+1}-\dfrac{2y_1}{x_1+1}\right|=\left|\dfrac{2y_2}{ty_2+3}-\dfrac{2y_1}{ty_1+3}\right|=\left|\dfrac{6(y_2-y_1)}{t^2y_1y_2+3t(y_1+y_2)+9}\right|$…………9分

$=\left|\dfrac{6\sqrt{(y_2+y_1)^2-4y_1y_2}}{t^2y_1y_2+3t(y_1+y_2)+9}\right|=\left|\dfrac{6\sqrt{36(t^2+1)}}{9t^2-36t^2+9(3t^2-1)}\right|=4\sqrt{t^2+1}\geqslant 4$，

所以$|MN|_{min}=4$，当且仅当$t=0$时取等；…………11分

（也可先证明$y_M y_N=\dfrac{2y_2}{x_2+1}\cdot\dfrac{2y_1}{x_1+1}=-4$，所以$|MN|=|y_M-y_N|\geqslant 2\sqrt{|y_M y_N|}=4$）

（注意：也可这样设直线方程，但计算量较大

①$l: x=2$时，$P(2,3), Q(2,-3), M(1,2), N(1,-2), |MN|=4$；

②设$l: y=k(x-2)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

联立方程$\begin{cases} y=k(x-2) \\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$得：$(3-k^2)x^2+4k^2x-4k^2-3=0$，

$|MN|=\left|\dfrac{2y_2}{x_2+1}-\dfrac{2y_1}{x_1+1}\right|=\left|\dfrac{2k(x_2-x_1)}{x_1x_2+(x_1+x_2)+1}\right|=4\sqrt{\dfrac{1}{k^2}+1}>4$，

综上，$|MN|_{min}=4$，当且仅当$l: x=2$时取等；）

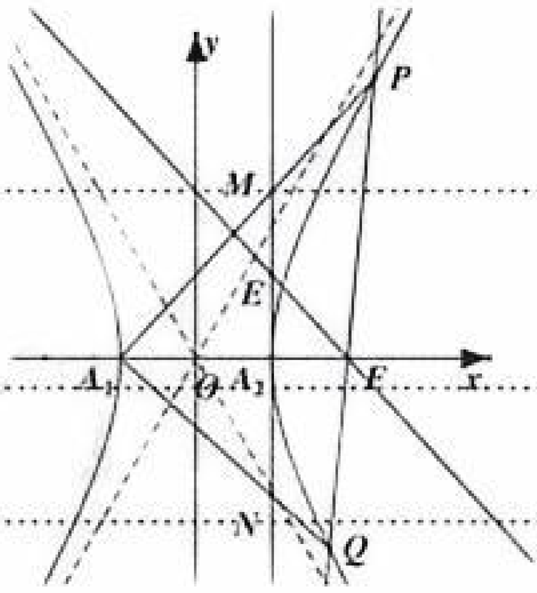
（ii）解法1：$E\left(1,\dfrac{y_1}{x_1+1}\right)$，则直线$FE$的方程为：$y=-\dfrac{y_1}{x_1+1}(x-2)$，…………12分

设$A_2(1,0)$关于直线FE的对称点为$G(m,n)$，

则有$\begin{cases} \dfrac{n}{2}=-\dfrac{y_1}{x_1+1}\left(\dfrac{m+1}{2}-2\right) \\ \dfrac{n}{m-1}\cdot\left(-\dfrac{y_1}{x_1+1}\right)=-1 \end{cases}$，…………13分

解得$m=1+\dfrac{2y_1^2}{(x_1+1)^2+y_1^2}=1+\dfrac{6(x_1^2-1)}{(x_1+1)^2+3(x_1^2-1)}=\dfrac{5x_1-4}{2x_1-1}$，…………14分

$n=\dfrac{y_1}{2x_1-1}$，即$G\left(\dfrac{5x_1-4}{2x_1-1},\dfrac{y_1}{2x_1-1}\right)$，…………15分



下证G在直线l上，

$m-tn-2=\dfrac{5x_1-4}{2x_1-1}-t\dfrac{y_1}{2x_1-1}-2=\dfrac{x_1-2-ty_1}{2x_1-1}=0$，所以$G$在直线$l$上，

所以点A_2关于直线EF对称的点在l上．…………17分

解法2：要证点A_2关于直线EF对称的点在l上，即证FE是$\angle A_2FP$的角平分线，…………12分

由对称性，不妨假设P在第一象限，

①当$\angle PFA_2=90°$，则直线A_1P的方程为$y=x+1$，即$M(1,2)$，$E(1,1)$，

此时$\angle EFA_2=45^\circ$，即FE是$\angle A_2FP$的角平分线；……………………………………………………13分

②当$\angle PFA_2\neq 90^\circ$时，设$\angle A_2FP=\alpha$，$\angle A_2FE=\beta$，即证$\alpha=2\beta$，

$\tan\alpha=-k_{PF}=\dfrac{y_1}{2-x_1}$，$\tan\beta=-k_{EF}=\dfrac{y_1}{x_1+1}$，……………………………………………………14分

则$\tan 2\beta=\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\dfrac{\dfrac{2y_1}{x_1+1}}{1-\left(\dfrac{y_1}{x_1+1}\right)^2}=\dfrac{2y_1(x_1+1)}{(x_1+1)^2-y_1^2}=\dfrac{2y_1(x_1+1)}{(x_1+1)^2-3(x_1^2-1)}=\dfrac{y_1}{2-x_1}=\tan\alpha$，所以$\alpha=2\beta$．

综上，FE是$\angle A_2FP$的角平分线，即点A_2关于直线EF对称的点在l上．……………………………17分

解法3：要证点A_2关于直线EF对称的点在l上，即证FE是$\angle A_2FP$的角平分线，……………………12分

即证$\angle A_2FE=\angle PFE$，即证$\cos\angle A_2FE=\cos\angle PFE$，

$E\left(1,\dfrac{y_1}{x_1+1}\right)$，则$\overrightarrow{FE}=\left(-1,\dfrac{y_1}{x_1+1}\right)$，$\overrightarrow{FA_2}=(-1,0)$，

$\overrightarrow{FP}=(x_1-2,y_1)$，$\left|\overrightarrow{FP}\right|=\sqrt{(x_1-2)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-2)^2+3(x_1^2-1)}=2x_1-1$．……………………………13分

所以$\dfrac{\cos\angle PFE}{\cos\angle A_2FE}=\dfrac{\dfrac{\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FP}}{\left|\overrightarrow{FE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FP}\right|}}{\dfrac{\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FA_2}}{\left|\overrightarrow{FE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FA_2}\right|}}=\dfrac{2-x_1+\dfrac{y_1^2}{x_1+1}}{2x_1-1}=\dfrac{2-x_1+\dfrac{3(x_1^2-1)}{x_1+1}}{2x_1-1}=1$．

即$\cos\angle A_2FE=\cos\angle PFE$，即点$A_2$关于直线$EF$对称的点在$l$上．……………………………17分

解法4：要证点A_2关于直线EF对称的点在l上，即证FE是$\angle A_2FP$的角平分线，……………………12分

即证明点E到x轴的距离$d_{E-x轴}$和到l的距离d_{E-l}相等，即证明$d_{E-x轴}=d_{E-l}$，

又$E\left(1,\dfrac{y_1}{x_1+1}\right)$，所以$d_{E-x轴}=\left|\dfrac{y_1}{x_1+1}\right|$，$d_{E-l}=\dfrac{\left|\dfrac{ty_1}{x_1+1}+1\right|}{\sqrt{1+t^2}}$，……………………………13分

要证$d_{E-x轴}=d_{E-l}$，

只需证$\left(\dfrac{y_1}{x_1+1}\right)^2=\dfrac{\left(\dfrac{ty_1}{x_1+1}+1\right)^2}{1+t^2}$，

只需证$(1+t^2)y_1^2=(ty_1+x_1+1)^2$，

只需证$(1+t^2)y_1^2=(2ty_1+3)^2$，

只需证$(3t^2-1)y_1^2+12ty_1+9=0$，

由（i）可知，该式显然成立，所以$d_{E-x轴}=d_{E-l}$，

所以点A_2关于直线EF对称的点在l上，……………………………………………………17分

解法5：（i）设$l_{A_1P}:x=t_1y-1$，

联立方程$\begin{cases}x=t_1y-1\\x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$得：$(3t_1^2-1)y^2-6t_1y=0$，所以$P\left(\dfrac{3t_1^2+1}{3t_1^2-1},\dfrac{6t_1}{3t_1^2-1}\right)$，$M\left(1,\dfrac{2}{t_1}\right)$，

同理$Q\left(\dfrac{3t_2^2+1}{3t_2^2-1},\dfrac{6t_2}{3t_2^2-1}\right)$，$N\left(1,\dfrac{2}{t_2}\right)$……………………………………………………7分

因为P,F,Q三点共线，所以$\overrightarrow{FP}/\!/\overrightarrow{FQ}$，

所以$\left(\dfrac{3t_1^2+1}{3t_1^2-1}-2\right)\dfrac{6t_2}{3t_2^2-1}-\left(\dfrac{3t_2^2+1}{3t_2^2-1}-2\right)\dfrac{6t_1}{3t_1^2-1}=0$，

化简可得：$(t_1t_2+1)(t_1-t_2)=0$，显然$t_1\neq t_2$，所以$t_1t_2=-1$，……………………………10分

所以$|MN|=\left|\frac{2}{t_1}-\frac{2}{t_2}\right|\geqslant 4\sqrt{\frac{1}{-t_1t_2}}=4$，当且仅当$t_1+t_2=0$，$t_1t_2=-1$时取等. ………………………… 11分

（ii）要证点A_1关于直线EF对称的点在l上，即证FE是$\angle A_1FP$的角平分线，………………… 12分

由对称性，不妨假设P在第一象限，

①当$\angle PFA_1=90°$，则直线AP的方程为$y=x+1$，即$M(1,2)$，$E(1,1)$，

此时$\angle EFA_1=45°$，即FE是$\angle A_1FP$的角平分线；………………………………………… 13分

②当$\angle PFA_1\neq 90°$时，设$\angle A_1FP=\alpha$，$\angle A_1FE=\beta$，即证$\alpha=2\beta$，

$\tan\alpha=-k_{FP}=\frac{2t_1}{t_1^2-1}$，$\tan\beta=-k_{EF}=\frac{1}{t_1}$，………………………………………………………… 14分

则$\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{\frac{2}{t_1}}{1-\frac{1}{t_1^2}}=\frac{2t_1}{t_1^2-1}=\tan\alpha$，所以$\alpha=2\beta$.

综上，FE是$\angle A_1FP$的角平分线，即点A_1关于直线EF对称的点在l上. ……………………… 17分

19. 解：（1）设$g(x)=\frac{f(x)}{x}=x-\ln x+\frac{a}{x}$，则$g'(x)=1-\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x^2-x-a}{x^2}$ ………………………… 1分

依题意可得$g'(x)\geqslant 0$恒成立，……………………………………………………………………… 2分

所以$x^2-x-a\geqslant 0$，即$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-a\geqslant 0$，

所以$-\frac{1}{4}-a\geqslant 0$，即$a\leqslant -\frac{1}{4}$. ……………………………………………………………………………… 4分

（2）解法1：依题意可知$y=\frac{f(x)}{x}$单调递增，因为$0<x<1$，则$0<x<\frac{1}{x}$，所以$\frac{f(x)}{x}<\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$，…… 5分

即$f(x)<x^2f\left(\frac{1}{x}\right)$，所以$e^{-x}f(x)-e^{-\frac{1}{x}}f\left(\frac{1}{x}\right)<f\left(\frac{1}{x}\right)\left(x^2e^{-x}-e^{-\frac{1}{x}}\right)=e^{-\frac{1}{x}}f\left(\frac{1}{x}\right)\left(x^2e^{\frac{1}{x}-x}-1\right)$…………… 7分

设$m(x)=x^2e^{\frac{1}{x}-x}-1$，$m'(x)=(2x-x^2-1)e^{\frac{1}{x}-x}=-(x-1)^2e^{\frac{1}{x}-x}\leqslant 0$，

所以$m(x)$在$(0,1)$上单调递减，所以当$0<x<1$时，$m(x)>m(1)=0$，即$x^2e^{\frac{1}{x}-x}-1>0$ ………… 9分

所以$e^{-x}f(x)-e^{-\frac{1}{x}}f\left(\frac{1}{x}\right)<f\left(\frac{1}{x}\right)\left(x^2e^{-x}-e^{-\frac{1}{x}}\right)<0$，即$e^{-x}f(x)<e^{-\frac{1}{x}}f\left(\frac{1}{x}\right)$. ………………………… 10分

解法2：依题意可知$y=\frac{f(x)}{x}$单调递增，因为$0<x<1$，则$0<x<\frac{1}{x}$，所以$\frac{f(x)}{x}<\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. ………… 5分

又$f(x)<0$，则有$\frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}>x^2$，所以$\frac{e^{-x}f(x)}{e^{-\frac{1}{x}}f\left(\frac{1}{x}\right)}>x^2\cdot e^{\frac{1}{x}-x}$. ……………………………………………… 7分

$x^2\cdot e^{\frac{1}{x}-x}=e^{\frac{1}{x}-x+2\ln x}$，设$m(x)=\frac{1}{x}-x+2\ln x$，

则$m'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{2}{x}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}\leqslant 0$，

所以$m(x)$在$(0,1)$上单调递减，所以当$0<x<1$时，$m(x)>m(1)=0$. ………………………………… 9分

所以$\frac{e^{-x}f(x)}{e^{-\frac{1}{x}}f\left(\frac{1}{x}\right)}>e^{\frac{1}{x}-x+2\ln x}>1$，即$e^{-x}f(x)<e^{-\frac{1}{x}}f\left(\frac{1}{x}\right)$. ………………………………… 10分

（3）解法1：设$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{2e^{x}-x^{2}\ln x-2}{x}$，

则$g'(x)=\dfrac{(2e^{x}-2x\ln x-x)x-(2e^{x}-x^{2}\ln x-2)}{x^{2}}=\dfrac{2(x-1)e^{x}-x^{2}\ln x-x^{2}+2}{x^{2}}$，……………………11分

令$h(x)=2(x-1)e^{x}-x^{2}\ln x-x^{2}+2$，则$h'(x)=2xe^{x}-2x\ln x-3x=2x\left(e^{x}-\ln x-\dfrac{3}{2}\right)$………………12分

设$\varphi(x)=x-\ln x-1$，则$\varphi'(x)=\dfrac{x-1}{x}$，当$0<x<1$时，$\varphi'(x)<0$，当$x>1$时，$\varphi'(x)>0$，

所以$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=0$，即$\ln x\leqslant x-1$，则$e^{x}\geqslant x+1$，……………………13分

所以$e^{x}-\ln x-\dfrac{3}{2}\geqslant x+1-(x-1)-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}>0$，即$h'(x)>0$，

所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又$x\to0$时，$x^{2}\ln x\to0$，所以$x\to0$时，$h(x)\to0$，所以$h(x)>h(0)=0$，

所以即$g'(x)>0$，即$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递增，……………………14分

所以$g(r+s+t)>g(r)$，即$\dfrac{f(s+t+r)}{s+t+r}>\dfrac{f(r)}{r}$，所以$f(r)<\dfrac{rf(s+t+r)}{s+t+r}$，……………………15分

同理$f(t)<\dfrac{tf(s+t+r)}{s+t+r}$，$f(s)<\dfrac{sf(s+t+r)}{s+t+r}$，

累加可得$f(r)+f(s)+f(t)<\dfrac{rf(r+s+t)}{r+s+t}+\dfrac{sf(r+s+t)}{r+s+t}+\dfrac{tf(r+s+t)}{r+s+t}=f(r+s+t)$，

即$f(r+s+t)>f(r)+f(s)+f(t)$．……………………17分

解法2：$f'(x)=2e^{x}-2x\ln x-x$，

令$h(x)=2e^{x}-2x\ln x-x$，则$h'(x)=2e^{x}-2\ln x-3=2\left(e^{x}-\ln x-\dfrac{3}{2}\right)$，……………………12分

设$\varphi(x)=x-\ln x-1$，则$\varphi'(x)=\dfrac{x-1}{x}$，当$0<x<1$时，$\varphi'(x)<0$，当$x>1$时，$\varphi'(x)>0$，

所以$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=0$，即$\ln x\leqslant x-1$，则$e^{x}\geqslant x+1$，……………………13分

所以$e^{x}-\ln x-\dfrac{3}{2}\geqslant x+1-(x-1)-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}>0$，即$h'(x)>0$，

所以$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，……………………14分

令$F(x)=f(x+t)-f(x)-f(t)$，$t>0$，

则$F'(x)=f'(x+t)-f'(x)$，又$f'(x)$单调递增，

所以$F'(x)>0$，则$F(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，

又$x\to0$时，$x^{2}\ln x\to0$，所以$x\to0$时，$f(x)\to0$，$F(x)\to0$，

所以$F(x)>0$，即$f(x+t)>f(x)+f(t)$，

所以$f(s+t)>f(s)+f(t)$．……………………16分

所以$f(r+s+t)>f(r)+f(s+t)>f(r)+f(s)+f(t)$．……………………17分