保密★启用前

准考证号________________________姓名____________

（在此卷上答题无效）

名校联盟全国优质校2025届高三大联考

数 学 试 题

2025.2

本试卷共4页，19小题，满分150分，考试用时120分钟。

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。厦门中学生助手微信公众号

3.考试结束后，将答题卡交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若$z=-1+\mathrm{i}$，则$|\bar{z}|=$

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

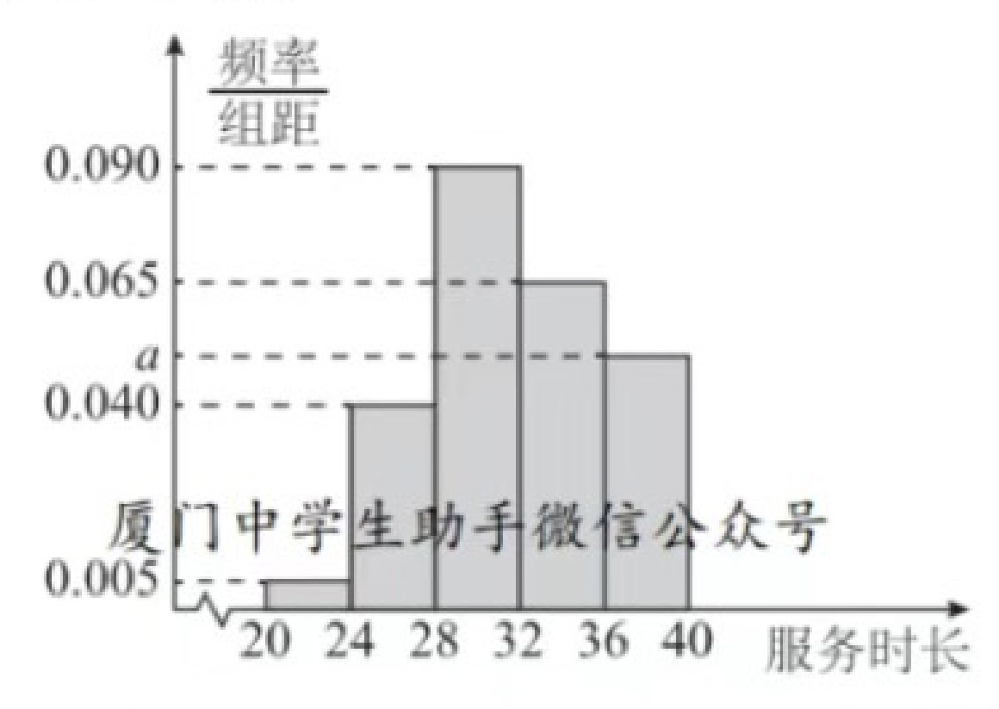
2．已知集合$A=\{x\mid \ln x>0\}$，$B=\{x\mid y=\sqrt{4-x^2}\}$，则$A\cap B=$

A．$(1,2]$　　B．$(0,2]$　　C．$[0,+\infty)$　　D．$(1,+\infty)$

3．记等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1a_6=8a_3$，$a_5=16$，则$S_5=$

A．16　　B．31　　C．32　　D．63

4．市环保局开展了环境治理专项活动，活动结束后对志愿者做了一次随机抽样调查，统计整理了部分志愿者的服务时长（单位:小时），得到如图所示的频率分布直方图，据此估计志愿者服务时长的第90百分位数为



厦门中学生助手微信公众号

A．36　　B．37　　C．38　　D．39

5．已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，准线为l，点A在C上，过A作l的垂线，垂足为A_1，若$|AF|=|A_1F|$，则$|AF|=$

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

6．存在函数$f(x)$满足：对任意$x\in\mathbf{R}$都有　　厦门中学生助手微信公众号

A．$f(x^2)=x$　　B．$f(\sin x)=x$

C．$f(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})=x$　　D．$f(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})=x$

7．已知$\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，若$\tan(\frac{\pi}{3}-\alpha)\cos2\alpha+1=\sin2\alpha$，则$\tan2\alpha=$

A．$-2-\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{3}-2$　　C．$-2\sqrt{3}$　　D．$-\sqrt{3}$

8．若斜率为-1的直线l交曲线$y=\ln x$于点A，交曲线$y=\ln(\mathrm{e}x+\mathrm{e})$于点$B$，则$|AB|=$

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．1　　D．2

二、多项选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9．已知$x=\frac{\pi}{3}$为函数$f(x)=\cos(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$图象的一条对称轴，则

A．$f(x)$的最小正周期为π　　B．$f(x)$的图象关于点$(\frac{\pi}{6},0)$对称

C．$f(x)$在区间$(0,\frac{\pi}{3})$上单调递减　　D．函数$y=f(x-\frac{\pi}{3})$为偶函数

10．已知某工人需至少使用甲、乙两种仪器中的一种对某产品进行质量检测，记事件A=“该工人在检测过程中使用过甲仪器”，事件B=“该工人在检测过程中使用过乙仪器”，事件C=“该工人在检测过程中使用过甲、乙两种仪器”，事件D=“该工人在检测过程中仅使用过甲、乙两种仪器中的一种”，已知$P(A)=0.6$，$P(B)=0.5$，则

A．A与B相互独立　　B．C与D互为对立

C．$P(\bar{B}\mid A)=\frac{5}{6}$　　D．$P(A\mid D)+P(B\mid D)=1$

11．已知函数$f(x)=(x-a)(x^2-b)$，其中$a>0$，且当$x>0$时，$f(x)\geqslant0$，则
厦门中学生助手微信公众号

A．$b=a^2$

B．$x=a$为$f(x)$的极大值点

C．若关于x的方程$f(x)=a$有3个不同的实数根，则$a>\frac{3\sqrt{6}}{8}$

D．若对任意x都有$f(x)\leqslant f(x+m)$，则$m\geqslant\frac{4\sqrt{3}a}{3}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．厦门中学生助手微信公众号

12．已知$\overrightarrow{OA}=(1,2)$，$\overrightarrow{AB}=(4,-2)$，则$\triangle OAB$的面积为________．

13．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_2$的直线与$C$的左、右两支分别交于$A$，$B$两点，若$|AF_1|=|BF_1|$，$|AB|=8$，则$|F_1F_2|=$\________．

14．已知某圆锥侧面展开后的扇形面积为定值，设扇形的圆心角为α，则当圆锥的内切球体积最大时，$\alpha=$________．

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（13分）

记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$c(1-2\cos B)=b(2\cos C-1)$．

（1）证明：b，a，c成等差数列；

（2）若$\triangle ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，求A．

16．（15分）

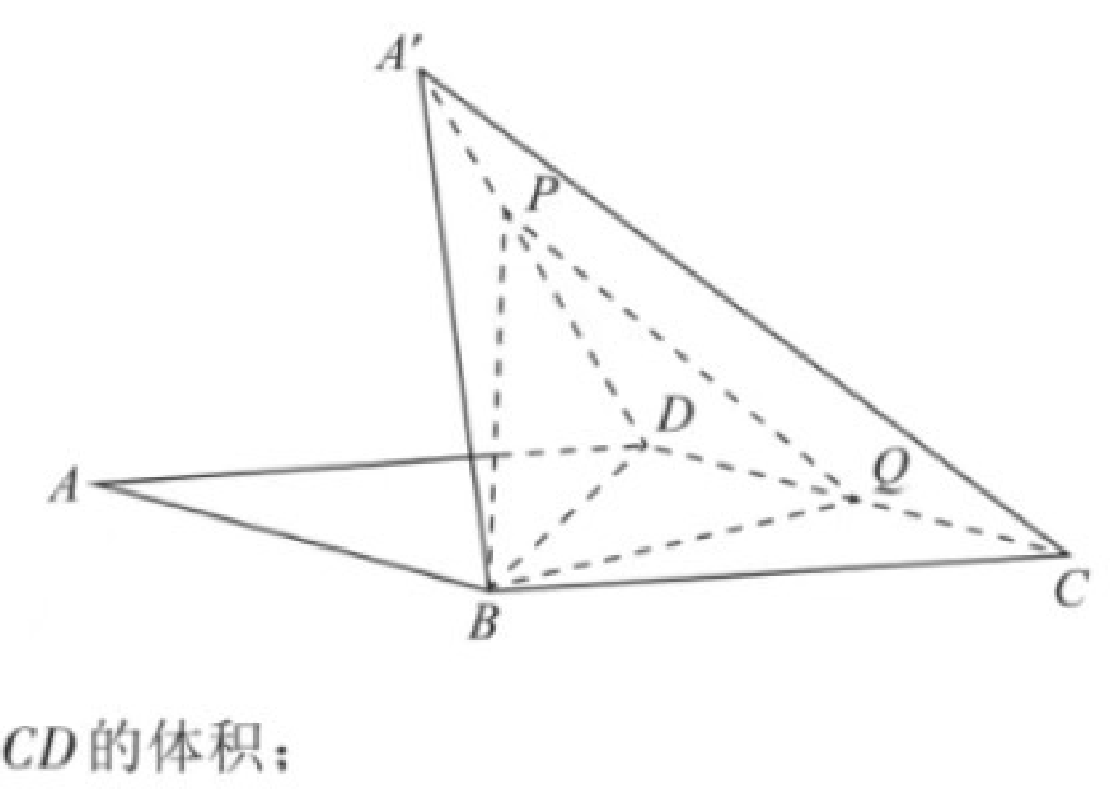
设函数$f(x)=(\mathrm{e}^x+a)(x-2a)$．

（1）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

（2）已知$a\in\mathbf{Z}$，若$f(x)$为增函数，求a．

17．（15分）

如图，在菱形$ABCD$中，$AB=2\sqrt{3}$，$A=60°$，将$\triangle ABD$沿BD翻折至$\triangle A'BD$，使得三棱锥$A'-BCD$的表面积最大．厦门中学生助手微信公众号



（1）求三棱锥$A'-BCD$的体积；

（2）设Q为棱CD的中点，P在棱$A'D$上，若二面角$P\text{-}BQ\text{-}D$的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$，求$\frac{DP}{DA'}$．

18．（17分）

已知椭圆$C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$的左顶点为$A$，过点$(1,0)$的直线$l$交$C$于$P$，$Q$两点，记$\triangle APQ$的外接圆为圆$N$．

（1）当l与x轴垂直时，求圆N的方程；

（2）求圆N面积的最大值．

19．（17分）厦门中学生助手微信公众号

设正整数$n\geqslant3$，集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=\{1,2,\cdots,n\}$，已知有穷数列$A_0$：$a_1$，$a_2$，…，$a_n$经过一次$M$变换后得到数列$A_1$：$\max\{a_1,a_2\}$，$\max\{a_2,a_3\}$，…，$\max\{a_{n-1},a_n\}$，$\max\{a_n,a_1\}$，其中$\max\{a,b\}$表示$a$，$b$中的最大者．记数列$A$的所有项之和为$S(A)$．

（1）若A_0：1，3，2，4，求$S(A_1)$；

（2）当$n=5$时，求$S(A_1)$的最大值；

（3）若A_1经过一次M变换后得到数列A_2，求$S(A_2)$的最大值．

名校联盟全国优质校2025届高三大联考

数学试题参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C	A	B	C	B	D	A	B	AC	BCD	AC

一、选择题：厦门中学生助手微信公众号，本题共8小题，每小题5分，共40分．每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 答案：C

解析：$|\bar{z}|=|-1-i|=\sqrt{2}$．故选C．

2. 答案：A

解析：易知$A=(1,+\infty)$，$B=[-2,2]$，$\therefore A\cap B=(1,2]$，故选A．

3. 答案：B

解析：$a_1a_6=a_3a_4=8a_3$，$\therefore a_4=8$，$\because a_5=16$，$\therefore$等比数列$\{a_n\}$的公比为2，$a_1=1$

$\therefore S_5=\dfrac{1-2^5}{1-2}=31$，故选B．

4. 答案：C

解析：$4\times(0.005+0.065+0.040+0.090)=0.8$，则$[36,40]$组的频率为0.2，

$\therefore$第90百分位数为$\dfrac{36+40}{2}=38$，故选C．

5. 答案：B

解析：记坐标原点为O，过点A作$AB\perp OF$，垂足为B．由已知及抛物线定义可得，$|AF|=|A_1F|=|AA_1|$，$\therefore\triangle AA_1F$为等边三角形，$\angle AA_1F=\angle AFA_1=60^\circ$，又$\because AA_1/\!/OF$，$\therefore\angle A_1FO=\angle AA_1F=60^\circ$，则$\angle AFB=60^\circ$．$\therefore|AF|\cos60^\circ+2=|AF|$，解得$|AF|=4$，故选B．

6. 答案：D

解析：对于选项A，取$x=1$代入得$f(1)=1$，取$x=-1$代入得$f(1)=-1$，矛盾，故不存在函数$f(x)$满足；同理，不存在函数$f(x)$满足B，C；厦门中学生助手微信公众号

对于选项D，$t=e^x-e^{-x}$为增函数，$\therefore$对任意$x_0\in\mathbf{R}$都有唯一的$t_0=e^{x_0}-e^{-x_0}$满足，则$f(x_0)=t_0$即可，故选D．

7. 答案：A

解析：$\tan(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)=\dfrac{\sin2\alpha-1}{\cos2\alpha}=\dfrac{-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}=-\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=\tan(\alpha-\dfrac{\pi}{4})$，

故$\dfrac{\pi}{3}-\alpha=\alpha-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore2\alpha=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}+k\pi$，

又$\alpha\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$，则$2\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，$\therefore\tan2\alpha=\tan(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4})=-(2+\sqrt{3})$，故选A．

8. 答案：B

解析：方法1：设$l:y=-x+a$，$A(x_1,\ln x_1)$，$B(x_2,\ln(ex_2+e))$．

则x_1是方程$\ln x+x=a$的解，x_2是方程$\ln(ex+e)+x=a$的解．

$\because$函数$f(x)=\ln x+x$，$g(x)=\ln(ex+e)+x$均为增函数，

且$\ln(ex+e)+x=\ln(x+1)+x+1$，故$g(x)=f(x+1)$，$\therefore x_1=x_2+1$．

$\therefore|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}$，故选B．

方法2：$\because\ln(ex+e)-\ln x=\ln(e+\dfrac{e}{x})>0$，直线$AB$斜率为$-1$，设$A(x,\ln x)$，$|AB|=d$，则$B(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}d,\ln x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}d)$，$\therefore$对任意$x>0$有：$\ln x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}d=\ln(e(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}d)+e)=\ln(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}d+1)+1$，

$\therefore\dfrac{\sqrt{2}}{2}d=1$，即$d=\sqrt{2}$，故选B．

方法3：$\because\ln(ex+e)=\ln(x+1)+1$，

$\therefore$将点$A(x,\ln x)$，向左平移1个单位，再向上平移单位，得到点$A'(x-1,\ln x+1)$，

点A'在函数$y=\ln(ex+e)$图象上，且直线AA'的斜率为-1，易得斜率为-1的直线与函数$y=\ln(ex+e)$图象只有一个交点，$\therefore$点A'与点B重合，$\therefore|AB|=|AA'|=\sqrt{2}$，故选B．

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．厦门中学生助手微信公众号

9. 答案：AC

解析：$\because f(\dfrac{\pi}{3})=\cos(\dfrac{2\pi}{3}+\varphi)=\pm1$，$\therefore\dfrac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi$，又$\because0<\varphi<\pi$，$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore f(x)=\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})$，周期$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故选项A正确；$f(\dfrac{\pi}{6})=\cos(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3})\neq0$，故选项B错误；

$\because x\in(0,\dfrac{\pi}{3})$，$\therefore2x+\dfrac{\pi}{3}\in(\dfrac{\pi}{3},\pi)\subseteq(0,\pi)$，故选项C正确；

$f(x-\dfrac{\pi}{3})=\cos(2(x-\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{\pi}{3})=\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})$不为偶函数，故选项D错误．故选AC．

10. 答案：BCD

解析：$\because P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=1$，$\therefore P(AB)=0.6+0.5-1=0.1\neq P(AB)$，

故选项A错误；厦门中学生助手微信公众号

$\because C=AB$，$D=A\bar{B}+\bar{A}B$，$\therefore CD=\varnothing$，$C+D=\Omega$，故$C$，$D$互为对立，故选项B正确；

$P(\bar{B}|A)=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(A)}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{P(A)}=\dfrac{5}{6}$，故选项C正确；

$P(A|D)+P(B|D)=\dfrac{P(AD)}{P(D)}+\dfrac{P(BD)}{P(D)}=\dfrac{P(AD+BD)}{P(D)}=\dfrac{P(D)}{P(D)}=1$，故选项D正确．故选BCD．

11. 答案：AC

解析：$x=a$为函数$f(x)$的零点，

若$a>0$，当$0<x<a$时，$x-a<0$，则$x^2+b<0$；当$x>a$时，$x-a>0$，则$x^2+b>0$．所以$x=a$时，$x^2+b=0$，即$a^2+b=0$，$b=-a^2<0$，故选项A正确；

由A可知$f(x)=(x-a)(x^2-a^2)$，$f'(x)=3x^2-2ax-a^2=(3x+a)(x-a)$，$\therefore f(x)$在区间$(-\infty,-\dfrac{a}{3})$和$(a,+\infty)$递增，在区间$(-\dfrac{a}{3},a)$递减，$x=a$为$f(x)$的极小值点，故选项B错误；

对于选项C：由B可知，$x=-\dfrac{a}{3}$为$f(x)$的极大值点，要使方程$f(x)=a$有3个不同的实数根，

则$f(a)<a<f(-\dfrac{a}{3})$，解得$a>\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$，故选项C正确；厦门中学生助手微信公众号

对于选项D：

$f(x)=x^3-ax^2-a^2x+a^3$，$f(x+m)=(x+m)^3-a(x+m)^2-a^2(x+m)+a^3$，

$\therefore f(x+m)-f(x)=m[mx^2+(3m-2a)x+m^2-am-a^2]\geq0$恒成立，

显然当$m=0$时，成立；

显然当$m<0$时，不恒成立；

$\therefore$当$m>0$时，即$y=mx^2+(3m-2a)x+m^2-am-a^2\geq0$恒成立，

$\therefore\Delta=(3m^2-2am)^2-12m(m^3-am^2-a^2m)=-3m^4+16a^2m^2\leq0$恒成立，

$\therefore m\geq\dfrac{4\sqrt{3}}{3}a$或$m=0$，故选项D错误，故选AC．

三、填空题：厦门中学生助手微信公众号，本题共3小题，每小题5分，共15分．

12. 答案：5

解析：方法1：易知$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，$\because|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{5}$，$\therefore\triangle OAB$的面积为$\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}=5$．

方法2：当点O为坐标原点时，$A(1,2)$，$\therefore B(5,0)$，$\triangle OAB$的面积为$\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot2=5$，故填5．

13. 答案：$2\sqrt{5}$

解析：由双曲线定义：$|AF_2|-|AF_1|=2a=|BF_1|-|BF_2|$，即$|AF_2|=2a+|AF_1|$，$|BF_2|=|BF_1|-2a$

又$\because|AF_1|=|BF_1|$，$|AB|=|AF_2|-|BF_2|=4a=8$，$\therefore a=2$，$|F_1F_2|=2\sqrt{a^2+1}=2\sqrt{5}$，故填$2\sqrt{5}$．

14. 答案：$2(\sqrt{2}-1)\pi$

解析：设扇形面积为S，圆锥的底面半径为r，母线长为l，

则由等面积法，该圆锥的内切球半径$R=\dfrac{r\sqrt{l^2-r^2}}{l+r}$，

易知，$S=\dfrac{1}{2}\times2\pi r\times l$，即$rl=\dfrac{S}{\pi}$，记$\dfrac{S}{\pi}=p$为定值，

方法1：$\because R^2=\dfrac{r^2(l^2-r^2)}{(l+r)^2}=\dfrac{r^2(l-r)}{l+r}=\dfrac{r(p-r^2)}{\dfrac{p}{r}+r}=\dfrac{r^2(p-r^2)}{p+r^2}=3p-(p+r^2+\dfrac{2p^2}{p+r^2})$

$\leq3p-2\sqrt{(p+r^2)\times\dfrac{2p^2}{p+r^2}}=3p-2\sqrt{2}p$，即$R^2\leq(\sqrt{2}-1)^2p$，

当且仅当，$p+r^2=\dfrac{2p^2}{p+r^2}$，即$p+r^2=\sqrt{2}p$时等号成立，

当圆锥的内切球体积最大时，即圆锥的内切球半径R最大时，　厦门中学生助手微信公众号

易知当R最大时，$\alpha=\dfrac{2\pi r}{l}=\dfrac{2\pi r}{\dfrac{p}{r}}=\dfrac{2\pi r^2}{p}=2(\sqrt{2}-1)\pi$，故填$2(\sqrt{2}-1)\pi$．

方法2：$\because R^2=\dfrac{r^2(l^2-r^2)}{(l+r)^2}=\dfrac{r^2(l-r)}{l+r}=\dfrac{r(p-r^2)}{\dfrac{p}{r}+r}=\dfrac{r^2(p-r^2)}{p+r^2}$，

令$f(r)=\dfrac{r^2(p-r^2)}{p+r^2}$，则$f'(r)=\dfrac{(2pr-4r^3)\cdot(p+r^2)-r^2(p-r^2)\cdot2r}{(p+r^2)^2}=\dfrac{-2r\cdot(r^4+2pr^2-p^2)}{(p+r^2)^2}$，

令$f'(r)=0$，即$r^4+2pr^2-p^2=0$，解得$r^2=(\sqrt{2}-1)p$，

$\therefore r^2=(\sqrt{2}-1)lr$，即$r=(\sqrt{2}-1)l$，

$\therefore$易知当$f'(r)=0$时，即$r=(\sqrt{2}-1)l$时，$f(r)$取得最大值，

$\therefore$当R最大时，即$f(r)$最大时，$\alpha=\dfrac{2\pi r}{l}=\dfrac{2\pi(\sqrt{2}-1)l}{l}=2(\sqrt{2}-1)\pi$，故填$2(\sqrt{2}-1)\pi$．

四、解答题：共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 解：（1）方法1：由正弦定理得，$\sin C(1-2\cos B)=\sin B(2\cos C-1)$，

$\therefore\sin C+\sin B=2(\sin C\cos B+\sin B\cos C)=2\sin(B+C)$，……2分

又$A+B+C=\pi$，$\therefore\sin(C+B)=\sin A$，

$\therefore\sin C+\sin B=2\sin A$，……4分

由正弦定理得，$c+b=2a$，$\therefore b$，a，c成等差数列．……5分

正弦定理，正弦和角公式化解2分，化解得$\sin C+\sin B=2\sin A$ 2分，结论1分

方法2：由余弦定理，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

$\therefore c(1-\dfrac{a^2+c^2-b^2}{ac})=b(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{ab}-1)$，……2分

$\therefore a(b+c)-2a^2=0$．……4分

$\because a\neq0$，$\therefore b+c=2a$，即b，a，c成等差数列．……5分

余弦定理角化边2分，化解得$a(b+c)-2a^2=0$ 2分，结论1分

（2）$\because S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$\therefore bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$；……6分

由余弦定理得：$b^2+c^2-2bc\cos A=a^2$，

$\therefore2bc\cos A=b^2+c^2-a^2=(b+c)^2-2bc-a^2=3a^2-2bc$．

$\therefore2bc\cos A=2\sqrt{3}bc\sin A-2bc$．

化简得$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，……11分

即$\sin(A-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$，

$\because A\in(0,\pi)$，故$A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$．……13分

代入面积公式1分，余弦定理化解得到$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$ 5分，具体过程酌情给分，

求值以及结论2分.厦门中学生助手微信公众号

直接用海伦公式，秦九韶面积公式酌情给分．

将A视为B，C为焦点的椭圆上一点，根据几何意义求解，酌情给分．

16. 解：（1）当$a=1$时，$f(x)=(e^x+1)(x-2)$，则$f'(x)=(x-1)e^x+1$，……2分

$\therefore f(1)=-e-1$，切点为$(1,-e-1)$，切线斜率为$f'(1)=1$，

$\therefore$切线方程为$y-f(1)=f'(1)(x-1)$，整理得，$y=x-e-2$．……5分

求导2分，整理得到切线方程3分（其中切点1分，切线斜率1分）

（2）$f'(x)=(x-2a+1)e^x+a$，$\because f(x)$为增函数，$\therefore f'(x)=(x-2a+1)e^x+a\geq0$恒成立，……6分

翻译条件为$f'(x)=(x-2a+1)e^x+a\geq0$恒成立1分

方法1：令$g(x)=(x-2a+1)e^x+a$，$a\in\mathbf{Z}$，则$g'(x)=(x-2a+2)e^x=0$，

当$x\in(-\infty,2a-2)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

当$x\in(2a-2,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

当$x=2a-2$时，$g(x)$取得极小值，也是最小值，$\therefore g(2a-2)=-e^{2a-2}+a\geq0$，……10分

令$h(x)=-e^{2x-2}+x$，令$h'(x)=-2e^{2x-2}+1=0$，解得$x=1-\dfrac{1}{2}\ln2$，

当$x\in(-\infty,1-\dfrac{1}{2}\ln2)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

当$x\in(1-\dfrac{1}{2}\ln2,+\infty)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，

又$h(1-\dfrac{1}{2}\ln2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln2>0$，$h(1)=0$，$h(0)=-e^{-2}<0$，$h(2)=2-e^2<0$，……14分

$\therefore a=1$．……15分

$g(x)$单调性，极小值分析4分，$h(x)$单调性分析4分，结论1分．

方法2：$\therefore f'(0)=1-2a+a=1-a\geq0$，$f'(-1)=\dfrac{-2a}{e}+a\geq0$，解得$0\leq a\leq1$，……8分

$\because a\in\mathbf{Z}$，$\therefore a=0$，或$a=1$，……10分

当$a=0$时，$f'(x)=(x+1)e^x$，易知$f'(-2)=-e^{-2}<0$，不符题意；……12分

当$a=1$时，$f'(x)=(x-1)e^x+1$，设$g(x)=(x-1)e^x+1$，则$g'(x)=xe^x$，

当$x\in(-\infty,0)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

当$x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

当$x=0$时，$g(x)$取得极小值，也是最小值，$\therefore g(x)\geq g(0)=0$，符合题意；……14分

$\therefore a=1$．……15分

必要性探路得$0\leq a\leq1$ 2分，分析判断得$a=0$，或$a=1$ 2分，验证$a=0$ 2分，

验证$a=1$ 2分，结论1分．

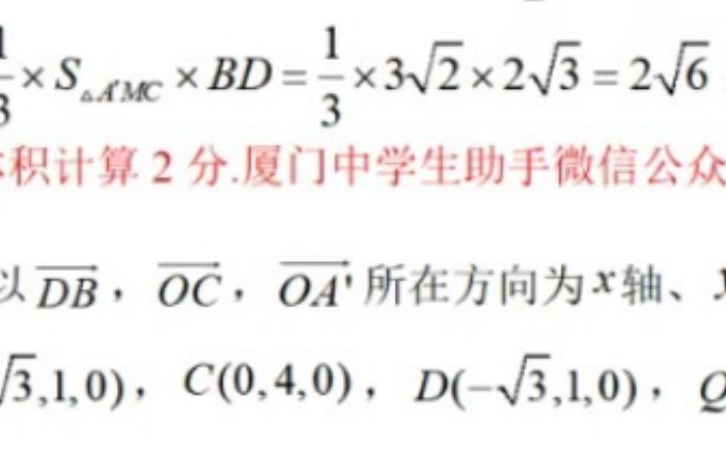
若由$f'(0)\geq0$，$f'(-2)\geq0$，$a\in\mathbf{Z}$直接得$a=1$，再去验证$a=1$，酌情给分．

17. 解：（1）易知三棱锥$A'-BCD$的表面积为$S_{A'-BCD}=2(S_{\triangle A'BD}+S_{\triangle A'BC})$，

$\because S_{\triangle A'BD}=3\sqrt{3}$，$\therefore$当$S_{\triangle A'BC}$的面积最大时，三棱锥$A'-BCD$的表面积最大，

此时，由$S_{\triangle A'BC}=\dfrac{1}{2}A'B\cdot BC\cdot\sin\angle A'BC$可知$\sin\angle A'BC=1$，即$A'B\perp BC$，同理$A'D\perp DC$…2分

分析推理得到$A'B\perp BC$，$A'D\perp DC$ 2分，具体过程酌情给分。厦门中学生助手微信公众号



方法1：设O为A'在底面$ABCD$的射影，M为BD中点，连接OB，OD，

$\because A'O\perp$平面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$，

$\therefore A'O\perp BC$，又$\because A'B\perp BC$，$A'B\subset$平面$A'OB$，$A'O\subset$平面$A'OB$，

$\therefore BC\perp$平面$A'OB$，又$\because OB\subset$平面$A'OB$，$\therefore BC\perp OB$，……4分

又$\because\angle CBD=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore\angle DBO=\dfrac{\pi}{6}$，即$O$在$\angle ABD$的角平分线上，

同理，O在$\angle ADB$的角平分线上，$\therefore O$为等边$\triangle ABD$的重心．……5分

$\therefore OM=1$，$AM=CM=3$，$A'O=2\sqrt{2}$，

$\therefore$三棱锥$A'-BCD$的体积为$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times BD\times CM\times A'O=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3\times2\sqrt{2}=2\sqrt{6}$．……7分

确定O的位置3分（其中证明$BC\perp OB$ 2分），具体过程酌情给分；体积计算2分

方法2：设M为BD中点，$\because\triangle CBD$，$\triangle A'BD$均为等边三角形，

$\therefore BD\perp CM$，$BD\perp A'M$，$\because A'M\cap CM=M$，$\therefore BD\perp$平面$A'MC$，……5分

在$\mathrm{Rt}\triangle A'BC$中，$A'C=\sqrt{A'B^2+BC^2}=2\sqrt{6}$，则$A'M=CM=3$，

$\therefore\triangle A'MC$底边$A'C$上的高为$\sqrt{3}$，$\therefore\triangle A'MC$的面积为$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{3}=3\sqrt{2}$，

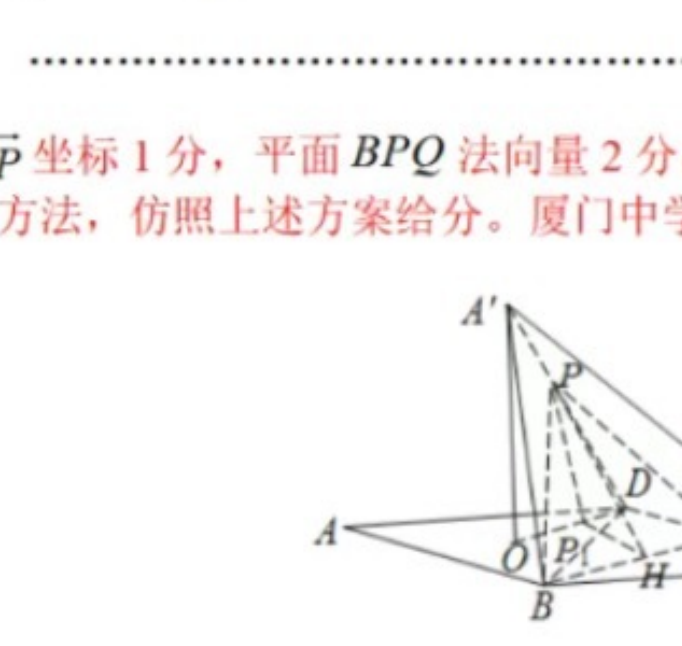
$\therefore V_{A'-BCD}=V_{B-A'MC}+V_{D-A'MC}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle A'MC}\times BD=\dfrac{1}{3}\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=2\sqrt{6}$，……7分

证明$BD\perp$平面$A'MC$ 3分，体积计算2分.厦门中学生助手微信公众号

（2）方法1：

如图所示，以O为原点，分别以$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OA'}$所在方向为x轴、y轴、z轴正方向，建立空间直角坐标系，则$A'(0,0,2\sqrt{2})$，$B(\sqrt{3},1,0)$，$C(0,4,0)$，$D(-\sqrt{3},1,0)$，$Q(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{5}{2},0)$，

$\therefore\overrightarrow{BQ}=(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0)$，$\overrightarrow{DA'}=(\sqrt{3},-1,2\sqrt{2})$，……9分



建系正确给1分，点和向量1分

设$\dfrac{DP}{DA'}=\lambda$（$0<\lambda\leq1$），设$P(x,y,z)$，则$(x+\sqrt{3},y-1,z)=\lambda(\sqrt{3},-1,2\sqrt{2})$，

$\therefore P(\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3},1-\lambda,2\sqrt{2}\lambda)$，$\overrightarrow{BP}=(\sqrt{3}\lambda-2\sqrt{3},-\lambda,2\sqrt{2}\lambda)$，……10分

设平面BPQ的一个法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则有$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BQ}=0,\\\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BP}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x_1+\dfrac{3}{2}y_1=0,\\\sqrt{3}(\lambda-2)x_1-\lambda y_1+2\sqrt{2}\lambda z_1=0,\end{cases}$

令$x_1=1$，则$y_1=\sqrt{3}$，$z_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2\lambda}$，$\therefore\boldsymbol{n}_1=(1,\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{6}}{2\lambda})$，……12分

易知平面BCD的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$，……13分

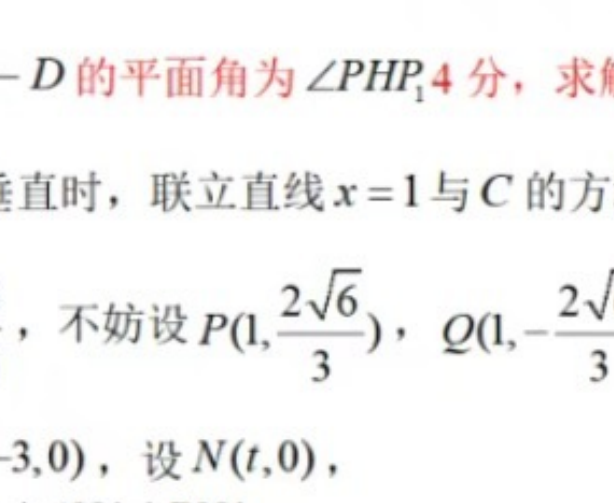
$\therefore\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{6}}{2\lambda}}{\sqrt{1+3+(\dfrac{\sqrt{6}}{2\lambda})^2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，解得$\lambda=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\dfrac{DP}{DA'}=\dfrac{1}{2}$．……15分

写出P点和$\overrightarrow{BP}$坐标1分，平面BPQ法向量2分，平面BCD法向量1分，求解以及结论2分

若有其他建系方法，仿照上述方案给分。厦门中学生助手微信公众号

方法2：



如图，过P作PP_1垂直OD于P_1，$\therefore PP_1/\!/A'O$，$PP_1\perp$平面BCD，

过P_1作P_1H垂直BQ于H，则$P_1H\perp BQ$，$P_1P\perp BQ$，$P_1H\cap P_1P=P_1$，

$\therefore BQ\perp$平面P_1PH，$\because PH\subset$平面P_1PH，$\therefore BQ\perp PH$，

$\therefore\angle PHP_1$为二面角$P-BQ-D$的平面角，……11分

$\therefore\cos\angle PHP_1=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，$\tan\angle PHP_1=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，……12分

不妨设$\dfrac{DP}{DA'}=\lambda$（$0<\lambda\leq1$），则$P_1P=2\sqrt{2}\lambda$，

$\because OD/\!/BQ$，$\therefore P_1H=\sqrt{3}$，$\therefore\tan\angle PHP_1=\dfrac{PP_1}{P_1H}=\dfrac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，解得$\lambda=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\dfrac{DP}{DA'}=\dfrac{1}{2}$．……15分

几何法说明二面角$P-BQ-D$的平面角为$\angle PHP_1$ 4分，求解以及结论4分，具体过程酌情给分．

18. 解：（1）当直线l与x轴垂直时，联立直线$x=1$与C的方程，

即$\begin{cases}x=1,\\\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$解得$y^2=\dfrac{8}{3}$，不妨设$P(1,\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$，$Q(1,-\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$．……2分

易知圆心N在x轴上，$A(-3,0)$，设$N(t,0)$，

$\therefore\triangle APQ$的外接圆半径$R=|AN|=|PN|$．

$\therefore t+3=\sqrt{(t-1)^2+(\dfrac{2\sqrt{6}}{3})^2}$，解得$t=-\dfrac{2}{3}$，$\therefore R=\dfrac{7}{3}$，……4分

$\therefore$圆N的方程为$(x+\dfrac{2}{3})^2+y^2=\dfrac{49}{9}$．……5分

联立直线$x=1$与C的方程2分，由$R=|AN|=|PN|$解得N坐标和圆N半径2分，结论1分

（2）当直线l与x轴重合时无法构成三角形；

设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，$l_{PQ}:x=my+1(m\neq0)$，

联立l与C的方程$\begin{cases}C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1\\l_{PQ}:x=my+1\end{cases}\Rightarrow(m^2+3)y^2+2my-8=0$，

$\therefore\Delta>0,y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+3},y_1y_2=\dfrac{-8}{m^2+3}$，……7分

联立l与椭圆方程，写出韦达定理2分.厦门中学生助手微信公众号

方法1：

则AP的中垂线$l_1:y=-\dfrac{x_1+3}{y_1}(x-\dfrac{x_1-3}{2})+\dfrac{y_1}{2}\Rightarrow y=-\dfrac{x_1+3}{y_1}x-y_1$，

又$\because x_1=my_1+1$，得$l_1:y=-mx-\dfrac{4}{y_1}x-y_1$，

同理，AQ的中垂线$l_2:y=-mx-\dfrac{4}{y_2}x-y_2$．……9分

联立直线l_1，$l_2$$\begin{cases}y=-mx-\dfrac{4}{y_1}x-y_1①\\y=-mx-\dfrac{4}{y_2}x-y_2②\end{cases}$，

由①－②可得，$x_N=\dfrac{-2}{m^2+3}$，……11分

将$x_N=\dfrac{-2}{m^2+3}$代入①＋②可得，$y_N=\dfrac{4m}{m^2+3}$，

$\therefore N(\dfrac{-2}{m^2+3},\dfrac{4m}{m^2+3})$，……13分

$\therefore R^2=|AN|^2=(3-\dfrac{2}{m^2+3})^2+(\dfrac{4m}{m^2+3})^2$，

令$m^2+3=t\in[3,+\infty)$，

$\therefore R^2=(3-\dfrac{2}{t})^2+\dfrac{16(t-3)}{t^2}=-44\times(\dfrac{1}{t})^2+4\times\dfrac{1}{t}+9=-44(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{22})^2+\dfrac{100}{11}$，……16分

当$t=22$，即$m=\pm\sqrt{19}$时，$\triangle APQ$的外接圆半径最大，为$\sqrt{\dfrac{100}{11}}$．

此时，$\triangle APQ$的外接圆面积最大，为$\dfrac{100\pi}{11}$．……17分

求出AP，AQ的中垂线方程l_1，l_2 2分，联立l_1，l_2解得N坐标4分（其中横坐标、纵坐标各2分），化解求出R^2的表达式3分，结论1分。厦门中学生助手微信公众号

方法2：$|PQ|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{3m^2+8}}{m^2+3}$，……9分

$k_{PA}=\dfrac{y_1}{x_1+3}$，$k_{QA}=\dfrac{y_2}{x_2+3}$，

$\tan\angle PAQ=\dfrac{|k_{PA}-k_{QA}|}{1+k_{PA}k_{QA}}=\dfrac{\left|\dfrac{y_2}{x_2+3}-\dfrac{y_1}{x_1+3}\right|}{1+\dfrac{y_2}{x_2+3}\cdot\dfrac{y_1}{x_1+3}}=\dfrac{4|y_1-y_2|}{(m^2+1)y_1y_2+4m(y_1+y_2)+16}$，

$=\dfrac{8\sqrt{3}\sqrt{3m^2+8}}{(m^2+1)(-8)+4m(-2m)+16(m^2+3)}=\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{3m^2+8}}{5}$，……13分

$\therefore\sin\angle PAQ=\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{3m^2+8}}{\sqrt{9m^2+49}}$，

由正弦定理得：$2R=\dfrac{|PQ|}{\sin\angle PAQ}=\dfrac{2\sqrt{(1+m^2)(9m^2+49)}}{m^2+3}$，

令$t=m^2+3\geq3$，则$R=\dfrac{\sqrt{(t-2)(9t+22)}}{t}=\sqrt{9+4\cdot\dfrac{1}{t}-44\dfrac{1}{t^2}}=\sqrt{-44(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{22})^2+\dfrac{100}{11}}$，……16分

$\therefore R=\sqrt{-44(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{22})^2+\dfrac{100}{11}}\leq\sqrt{\dfrac{100}{11}}$，当$t=22$时等号成立，

$\therefore$外接圆的面积的最大值为$\dfrac{100\pi}{11}$．……17分

写出$|PQ|$的表达式2分，写出$\tan\angle PAQ$的表达式4分，化解求出R的表达式3分，结论1分

方法3：厦门中学生助手微信公众号

设圆$N:x^2+y^2+Dx+Ey+3D-9=0$

联立$\begin{cases}C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1\\l_{PQ}:x=my+1\\\odot N:x^2+y^2+Dx+Ey+3D-9=0\end{cases}\Rightarrow-2y^2+(mD+E)y+4D=0$，……9分

$y_1+y_2=\dfrac{mD+E}{2},y_1y_2=-2D$，

所以$-\dfrac{2m}{m^2+3}=\dfrac{mD+E}{2},\dfrac{-8}{m^2+3}=-2D$，

解得$D=\dfrac{4}{m^2+3},E=\dfrac{-8m}{m^2+3}$，即$N(\dfrac{-2}{m^2+3},\dfrac{4m}{m^2+3})$，……13分

设$N(x,y)$，则有$\begin{cases}x=\dfrac{-2}{m^2+3}\\y=\dfrac{4m}{m^2+3}\end{cases}$，即$\begin{cases}x=\dfrac{-2}{m^2+3}\\\dfrac{y}{x}=-2m\end{cases}$，消去$m$得$12x^2+8x+y^2=0$

所以$R^2=|AN|^2=(x+3)^2+y^2=(x+3)^2-12x^2-8x=-11x^2-2x+9$，……16分

当$x=-\dfrac{1}{11}$，即$m^2=19$时，$(R^2)_{\max}=\dfrac{100}{11}$，此时，$\triangle APQ$的外接圆面积最大，为$\dfrac{100\pi}{11}$．…17分

联立直线PQ与圆N的一般式2分，写出N坐标4分，化解求出R的表达式3分，结论1分

19. 解：（1）由题意，A_1：$\max\{1,3\}$，$\max\{3,2\}$，$\max\{2,4\}$，$\max\{4,2\}$，

即3，3，4，4．……2分

$\therefore S(A_1)=3+3+4+4=14$．……3分

写出A_1 2分，求$S(A_1)$ 1分

（2）由题意，由于A_0中元素两两互异，故A_0中的任一元素，如a_k，在A_1中至多在$\max\{a_{k-1},a_k\}$和$\max\{a_k,a_{k+1}\}$中出现两次（规定$a_0=a_n$，$a_{n+1}=a_1$），且若出现两次则这两个数处于邻位（a_1和a_n也视为邻位）．……5分

$\therefore A_1$的所有项中至多有两个5和两个4．……6分

$\therefore S(A_1)\leq5\times2+4\times2+3=21$，……7分

当A_0满足$\{a_1,a_3,a_5\}=\{3,4,5\}$时等号能取到，

$\therefore S(A_1)$的最大值为21．（给出任意一种排列即可）……9分

说明A_0中元素在A_1中至多出现两次2分，求出$S(A_1)$的最大值2分，厦门中学生助手微信公众号

给出取得最大值的一种排列2分．

（3）同（2）可知，A_0中的任一元素若在A_1中仅出现一次，则在A_2中至多出现两次；若在A_1中出现两次，由于这两个数相邻，故在A_2中至多出现三次．……10分

（i）若$n=3k$，则$S(A_2)\leq3\times[n+(n-1)+\cdots+(\dfrac{2}{3}n+1)]=\dfrac{5n^2+3n}{6}$，……11分

当A_0满足$\{a_1,a_4,\cdots,a_{3k-2}\}=\{\dfrac{2}{3}n+1,\dfrac{2}{3}n+2,\cdots,n\}$时等号能取到．……12分

（或$\{a_2,a_5,\cdots,a_{3k-1}\}=\{\dfrac{2}{3}n+1,\dfrac{2}{3}n+2,\cdots,n\}$，或$\{a_3,a_6,\cdots,a_{3k}\}=\{\dfrac{2}{3}n+1,\dfrac{2}{3}n+2,\cdots,n\}$）

（ii）若$n=3k+1$，则$S(A_2)\leq3\times[n+(n-1)+\cdots+\dfrac{2n+4}{3}]+\dfrac{2n+1}{3}=\dfrac{5n^2+3n-2}{6}$．……13分

当A_0满足$\{a_1,a_4,\cdots,a_{3k+1}\}=\{\dfrac{2n+1}{3},\dfrac{2n+4}{3},\cdots,n\}$时等号能取到．……14分

（iii）若$n=3k+2$，则$S(A_2)\leq3\times[n+(n-1)+\cdots+\dfrac{2n+5}{3}]+2\times\dfrac{2n+2}{3}=\dfrac{5n^2+3n-2}{6}$．……15分

当A_0满足$\{a_1,a_4,\cdots,a_{3k+1}\}=\{\dfrac{2n+2}{3},\dfrac{2n+5}{3},\cdots,n\}$时等号能取到．……16分

（或$\{a_2,a_5,\cdots,a_{3k+2}\}=\{\dfrac{2n+1}{3},\dfrac{2n+4}{3},\cdots,n\}$）

综上，$S(A_2)$的最大值为$\begin{cases}\dfrac{5n^2+3n}{6}, & n=3k\\\dfrac{5n^2+3n-2}{6}, & n=3k+1\text{或}n=3k+2\end{cases}$．……17分

说明A_0中的任一元素在A_2中至多出现三次1分，$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$每种情况2分，结论1分.厦门中学生助手微信公众号