座号________ 线

姓名________

班级________ 封

学校________ 密

龙岩市2025年高中毕业班三月教学质量检测

数学试题

（满分：150分　考试时间：120分钟）

注意事项:

1. 考生将自己的姓名、准考证号及所有的答案均填写在答题卡上.
2. 答题要求见答题卡上的“填涂样例”和“注意事项”.

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数z满足$(1-i)z=2i$，则$|z|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

2. $x\in A$是$x\in A\cup B$的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知向量$\boldsymbol{a}=(1,3),\boldsymbol{b}=(-2,4)$，且$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\mu\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

4. 某医学院计划从4名男生和3名女生中选派2人分别到甲、乙两地参加义诊活动，则在派往甲地是男生的条件下，派往乙地是女生的概率是

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{4}{7}$　　D. $\frac{2}{3}$

5. 设S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_3=15, S_8-S_5=18$，则$S_8=$

A. 132　　B. 88　　C. 44　　D. 33

6. 设函数$f(x)=\begin{cases}(3-a)x-2, x\le 1\\ a^x-1, x>1\end{cases}$ $(a>0$且$a\ne 1)$，则下列说法正确的是

A. $f(x)$为$\mathbf{R}$上的奇函数

B. 若$a=2$，则$f(\log_2 3)=\log_2 3-2$

C. 若$f(0)=-2$，则$a=3$

D. 若$f(x)$为$\mathbf{R}$上的增函数，则$1<a<3$

7. 已知 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 是圆 $x^2+y^2=9$ 上的两个相异的动点，动点 M 满足 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$，且 $2x_1x_2+2y_1y_2=-9$，则动点 M 的轨迹方程为

A. $x^2+y^2=\sqrt{3}$　　B. $x^2+y^2=\sqrt{6}$

C. $x^2+y^2=3$　　D. $x^2+y^2=6$

8. 已知正三棱锥 $S-ABC$ 的棱长均为 2，点 P 在以 SA 为直径的球上运动，且 $PA=PS$，则三棱锥 $P-ABC$ 的体积的最大值为

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$

二、多项选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 随机变量 X,Y 分别服从正态分布和二项分布，且 $X\sim N(3,1),Y\sim B(6,\frac{1}{2})$，则

A. $E(X)=E(Y)$　　B. $D(X)=D(Y)$

C. $P(X\le1)=P(X\ge5)$　　D. $P(Y\le1)=P(Y\ge5)$

10. 已知函数 $f(x)=x^3-6x^2+ax+b$，若函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴的三个交点依次为 $A(x_1,0),B(x_2,0),C(x_3,0)$，且 $x_1<x_2<x_3$，则

A. $a>12$

B. 若 $a=9$，则 $-4<b<0$

C. 若 $a=9$，则 $f(0.8)+f(3.2)=4+2b$

D. 若 x_1,x_2,x_3 成等差数列，则 $2a+b=16$

11. 已知曲线 $\Gamma:y|y|=\frac{4}{5}x|x|-4$，点 $A(0,3),B(0,-3)$，则

A. 曲线 Γ 关于直线 $y=-x$ 对称

B. 曲线 Γ 上存在点 P，使得 $|PA|-|PB|=4$

C. 曲线 Γ 上第一象限内的点到直线 $y=\frac{2\sqrt{5}}{5}x$ 与 $y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}x$ 的距离之积为定值

D. 直线 $y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$ 与曲线 Γ 只有一个交点

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. 在 $(2x-\frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式中，常数项为________.

13. 若函数 $f(x)=\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0,x\in\mathbf{R})$ 在 $[0,\pi]$ 内有且仅有两条对称轴，则 ω 的取值范围是________.

14. 设满足方程 $(2mae^a-b)^2+(c-me^c-d)^2=0$ 的点 $(a,b),(c,d)$ 的运动轨迹分别为曲线 C_1,C_2，若曲线 C_1,C_2 有两个交点（其中 $m\in\mathbf{R}$，$e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数），则实数 m 的取值范围为________.

四、解答题：本大题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本题满分13分）

已知函数 $f(x)=\cos^4 x-\sin^4 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x\ (x\in\mathbf{R})$．

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期；

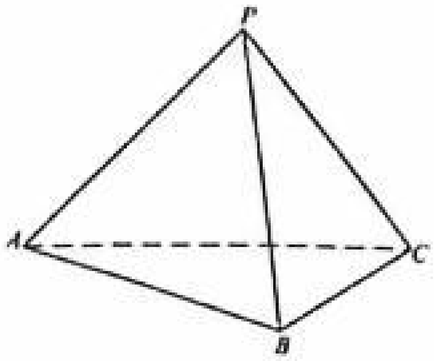
（2）将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 得到函数 $g(x)$ 的图象．记 ΔABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $g(\dfrac{A}{2})=1, c=1, S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求 a 的值．

16．（本题满分15分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，ΔPAC 是等腰直角三角形，且 $PC=PA=4\sqrt{2}, \angle ACB=60^\circ, BC=2$．

（1）证明：$PB\perp BC$；

（2）求直线 AC 与平面 PBC 所成角的正弦值．



17.（本题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-a\ln x\ (a>0)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，记过两点 $A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(x_2))$ 的直线斜率为 k．是否存在实数 a，使得 $k+a=2$．若存在，求出 a 的值；若不存在，试说明理由.

18.（本题满分 17 分）

已知椭圆$M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点$F$为抛物线$N:y^2=4x$的焦点，过点$F$的直线交椭圆$M$于$A,B$两点，当直线$AB$垂直于$x$轴时，$|AB|=3$.

（1）求椭圆M的方程；

（2）当直线AB不垂直于x轴时，过A,B分别作x轴的垂线，垂足分别为C,D，记直线AD与BC的交点为P.

(i)证明：点P在定直线l上，并求出l的方程；

(ii)若ΔPAB的面积为$\frac{18}{13}$，设直线AB与抛物线$N:y^2=4x$交于Q、T两点，求$|QF|\cdot|TF|$.

19.（本题满分 17 分）

对$n\in\mathbf{N}$，通过抛掷一枚均匀硬币n次后生成有序数对(a_n,b_n)，具体生成规则如下：①规定$(a_0,b_0)=(0,0)$；②当第n $(n\geq 1)$次抛掷硬币时：如果出现硬币正面朝上，若$a_{n-1}<b_{n-1}$，则$(a_n,b_n)=(a_{n-1}-1,b_{n-1}-1)$，否则$(a_n,b_n)=(a_{n-1}-1,b_{n-1})$；如果出现硬币反面朝上，若$b_{n-1}<a_{n-1}$，则$(a_n,b_n)=(a_{n-1}-1,b_{n-1}-1)$，否则$(a_n,b_n)=(a_{n-1},b_{n-1}-1)$．抛掷$n$次硬币后，记$a_n=b_n$的概率为$P_n$．

（1）写出(a_2,b_2)的所有可能结果，并求P_1,P_2；

（2）证明：数列$\{P_n-\frac{1}{3}\}$ $(n\geq 1,n\in\mathrm{N})$是等比数列，并求P_n；

（3）若$n>1$，则抛掷几次硬币后使得$a_n=b_n$的概率最大？请给出证明过程．

龙岩市2025年高中毕业班三月数学质量检测

数学试题参考答案

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
选项	B	A	C	B	C	D	C	B

二、多项选择题：本大题共3小题，每小题6分，共18分.

题号	9	10	11
选项	ACD	BCD	BC

三、填空题：本大题共3小题，每小题5分，共15分.

12．60　　13．$[\frac{2}{3},\frac{7}{6})$　　14．$(0,\frac{\sqrt{e}}{4e})\cup(e,+\infty)$.

8．解：如下图，设M为SA的中点，设BC中点为E，连接ME, AE，

由$PA=PS$得P在AS的中垂面上且在以M为圆心，

1为半径的圆上，连接MB, MC

$\because S-ABC$为正三棱锥 $\therefore AS\perp MB, AS\perp MC$

$MB, MC\subset$平面MBC

$MB\cap MC=M$

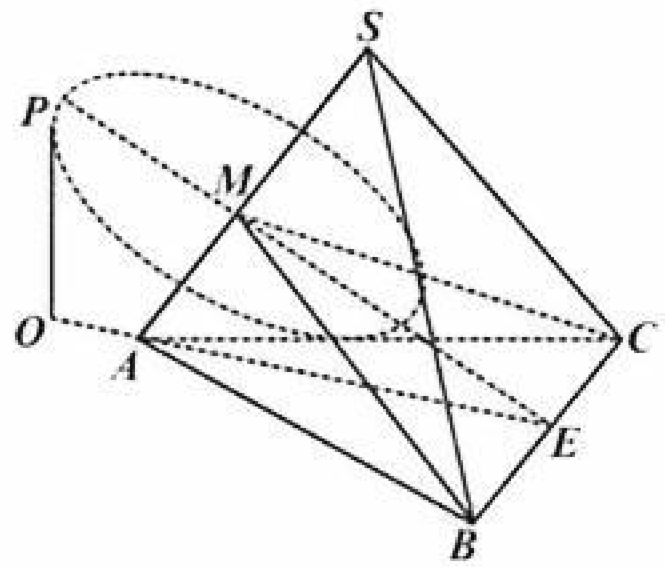
$\therefore AS\perp$平面MBC，

$\therefore$平面MBC与圆面M重合，

又$\because$正三棱锥$S-ABC$的棱长为2,

$\therefore AE=\sqrt{3}$

$\therefore ME=\sqrt{AE^2-AM^2}=\sqrt{2}$



当点P、M、E三点共线时，

三棱锥$P-ABC$体积最大，作$PO\perp$平面ABC，点$O\in AE$

易知$\mathrm{Rt}\Delta POE\sim\mathrm{Rt}\Delta AME\therefore\frac{PO}{AM}=\frac{PE}{AE}\therefore PO=\frac{PE\cdot AM}{AE}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$

$\therefore V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot PO=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}+1}{3}$

11. 解：讨论如下：当$x\geq 0, y\geq 0$时，曲线$\Gamma:\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$；

当$x\geq 0, y<0$时，曲线$\Gamma:\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$；

当$x<0, y\geq 0$时，曲线Γ不存在；

当$x<0, y<0$时，曲线$\Gamma:\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$；作出曲线$C$（略）

可知选项A不成立,（另解，将解析式中的x替换为$-y$, y替换为x，得到的解析式不相同，故A不成立）

选项B: $y\geq 0$时点$A(0,3), B(0,-3)$为双曲线$\Gamma:\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$的上、下焦点，当点$P$在第三象限，由双曲线的定义知B正确

选项C：设曲线Γ上第一象限内的点为$Q(x_0, y_0)(x_0>0, y_0>0)$，

则$\frac{x_0{}^2}{5}-\frac{y_0{}^2}{4}=1$

所以点Q到直线$y=\frac{2\sqrt{5}}{5}x$的距离为$d_1=\frac{\left|y_0-\frac{2\sqrt{5}}{5}x_0\right|}{\sqrt{1^2+(-\frac{2\sqrt{5}}{5})^2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}\left|y_0-\frac{2\sqrt{5}}{5}x_0\right|$，

所以点Q到直线$y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}x$的距离为$d_2=\frac{\left|y_0+\frac{2\sqrt{5}}{5}x_0\right|}{\sqrt{1^2+(\frac{2\sqrt{5}}{5})^2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}\left|y_0+\frac{2\sqrt{5}}{5}x_0\right|$，

所以$d_1d_2=\frac{5}{9}\left|y_0{}^2-\frac{4}{5}x_0{}^2\right|=\frac{20}{9}$，$C$正确

选项D：易知直线$y=\frac{2\sqrt{5}}{5}x$为双曲线$\Gamma:\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$与双曲线$\Gamma:\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$

的一条共同渐近线，由$\begin{cases} y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3} \\ \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1 \end{cases}\Rightarrow 4x^2+20x+25=0\Rightarrow x=-\frac{5}{2}, y=-3$,

所以直线$y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$与曲线在第三象限仅有一个交点，

显然在第一象限也仅有一个交点，故有两个交点，D错.

14. 【答案】$(0,\frac{\sqrt{e}}{4e})\cup(e,+\infty)$.

解法一：因为$(2ma\mathrm{e}^{a}-b)^{2}+(c-m\mathrm{e}^{c}-d)^{2}=0$，

$\therefore 2ma\mathrm{e}^{a}-b=0$，$c-m\mathrm{e}^{c}-d=0$，

依题意，曲线$C_1: y=2mx\mathrm{e}^{x}$，曲线$C_2: y=x-m\mathrm{e}^{x}$，

且曲线C_1, C_2有两个交点，

$\therefore$方程$2mx\mathrm{e}^{x}=x-m\mathrm{e}^{x}$在$x\in\mathbf{R}$上有两解，

即方程$m(2x+1)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}$在$x\in\mathbf{R}$上有两解，

令$g(x)=m(2x+1)$，$h(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}$，

所以方程有两解等价于函数$g(x)$的图象与$h(x)$的图象有两个交点.

易知直线$g(x)=m(2x+1)$恒过定点$(-\dfrac{1}{2},0)$，斜率为$k=2m$

又由$h(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}$得$h'(x)=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^{x}}$，令$h'(x)=0$，则$x=1$，

当$x\in(-\infty,1)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

当$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，

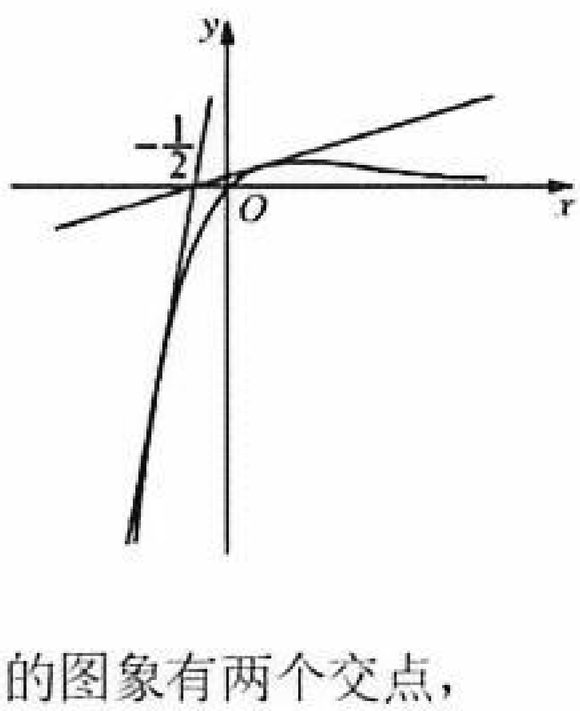
所以$h(x)$的图象如图所示；

设直线l是$h(x)$的图象的切线，设切点为$(x_0,\dfrac{x_0}{\mathrm{e}^{x_0}})$，

则切线斜率为$k=h'(x_0)=\dfrac{1-x_0}{\mathrm{e}^{x_0}}$，

所以切线l的方程为$y-\dfrac{x_0}{\mathrm{e}^{x_0}}=\dfrac{1-x_0}{\mathrm{e}^{x_0}}(x-x_0)$，又直线$l$经过点$(-\dfrac{1}{2},0)$，

所以$-\dfrac{x_0}{\mathrm{e}^{x_0}}=\dfrac{1-x_0}{\mathrm{e}^{x_0}}(-\dfrac{1}{2}-x_0)$，



即$2{x_0}^{2}+x_0-1=0$，解得$x_0=-1$或$x_0=\dfrac{1}{2}$，

所以$k=h'(-1)=2\mathrm{e}$或$k=h'(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2\mathrm{e}}$，

所以由图知，当$0<2m<\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2\mathrm{e}}$或$2m>2\mathrm{e}$，

即$0<m<\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{4\mathrm{e}}$或$m>\mathrm{e}$时，函数$g(x)$的图象与$h(x)$的图象有两个交点，

即曲线C_1，C_2有两个交点，

故实数m的取值范围是$(0,\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{4\mathrm{e}})\cup(\mathrm{e},+\infty)$.

法二：因为$(2ma\mathrm{e}^{a}-b)^{2}+(c-m\mathrm{e}^{c}-d)^{2}=0$，$\therefore 2ma\mathrm{e}^{a}-b=0$，$c-m\mathrm{e}^{c}-d=0$，

依题意，曲线$C_1: y=2mxe^x$，曲线$C_2: y=x-me^x$，
且曲线C_1，C_2有两个交点，

$\therefore$方程$2mxe^x=x-me^x$在$x\in\mathbf{R}$上有两解，

方程$m(2x+1)=\dfrac{x}{e^x}$在$x\in\mathbf{R}$上有两解，

当$2x+1=0$时，$x=-\dfrac{1}{2}$，此时$m(2x+1)\neq\dfrac{x}{e^x}$

$\therefore$当$2x+1\neq0$时，即方程$m=\dfrac{x}{(2x+1)e^x}$

在$x\in(-\infty,-\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{1}{2},+\infty)$上有两解，

令$h(x)=\dfrac{x}{(2x+1)e^x}$ $(x\neq-\dfrac{1}{2})$，

则$y=m$的图象与$y=h(x)$的图象有两个交点.

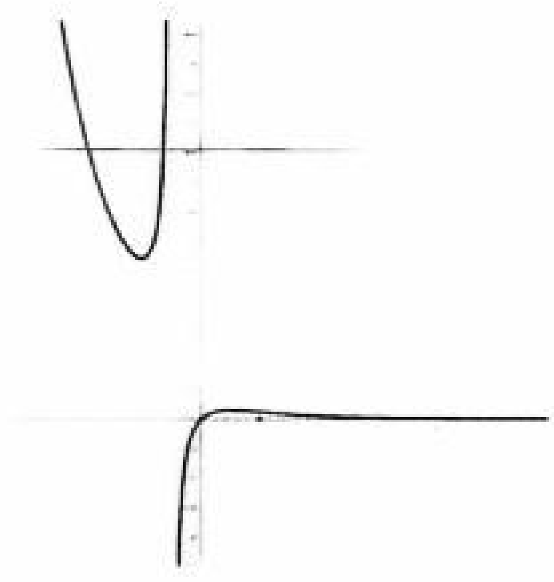
又$h'(x)=\dfrac{(2x+1)e^x-x[(2e^x+(2x+1)e^x]}{[(2x+1)e^x]^2}=\dfrac{-2x^2-x+1}{(2x+1)^2e^x}=\dfrac{-(2x-1)(x+1)}{(2x+1)^2e^x}$

令$h'(x)=0$，则$x=-1$或$x=\dfrac{1}{2}$ $(x\neq-\dfrac{1}{2})$

$\therefore$当$x<-1$或$x>\dfrac{1}{2}$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，

当$-1<x<-\dfrac{1}{2}$或$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

又$h(-1)=e$，$h(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\frac{1}{2}}{2e^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\sqrt{e}}{4e}$，



且当$x\to(-\dfrac{1}{2})^-$时，$h(x)\to+\infty$，

当$x\to(-\dfrac{1}{2})^+$时，$h(x)\to-\infty$，

当$x\to+\infty$时，$h(x)\to0$，

所以$h(x)$的大致图象如图所示，

要使$y=m$的图象与$y=h(x)$的图象有两个交点，

则$0<m<\dfrac{\sqrt{e}}{4e}$或$m>e$，

所以实数m的取值范围是$(0,\dfrac{\sqrt{e}}{4e})\cup(e,+\infty)$.

四、解答题：本大题共5小题，共77分.

15.（本题满分13分）

解：（1）$\because f(x)=\cos^4 x-\sin^4 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x$

$=(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)-2\sqrt{3}\sin x\cos x$

$=\cos^2 x-\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x$ ……………………………………2 分

$=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x$

$=2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ ……………………………………5 分

$\therefore f(x)$ 的最小正周期为 π. ……………………………………6 分

（2）$\because$ 函数 $g(x)$ 的图象是由函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 得到，

$\therefore g(x)=2\cos 2x$ ……………………………………7 分

$\therefore g(\frac{A}{2})=2\cos A=1, \therefore \cos A=\frac{1}{2}$. ……………………………………8 分

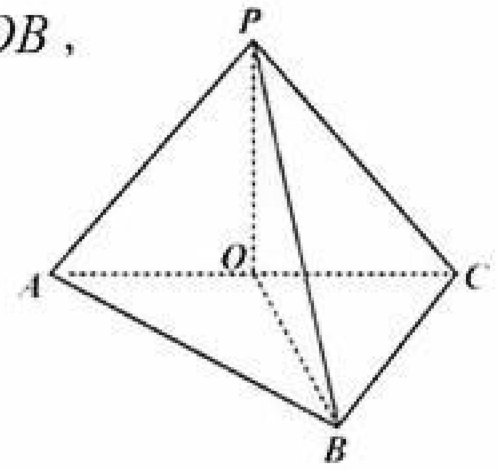
又 $\because 0<A<\pi, \therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由 $S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 得，

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \therefore b=2.$ ……………………………………11 分

由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2^2+1^2-2\times2\times1\times\frac{1}{2}=3$

$\therefore a=\sqrt{3}$ ……………………………………13 分

16. 解：（1）证明：作 $PO\perp AC$，且交 AC 于点 O，连接 OB，



$\because$ ΔPAC 是等腰直角三角形且 $PC=PA=4\sqrt{2}$

$\therefore AO=OC=4$ 又 $\because$ 平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，

平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=AC$，$PO\subset$ 平面 PAC

$\therefore PO\perp$ 平面 ABC ……………………………………2 分

又 $\because BC\subset$ 平面 ABC

$\therefore PO\perp BC$ ……………………………………3 分

$\because \angle ACB=60^\circ$，$BC=2$.

根据余弦定理得 $OB^2=OC^2+BC^2-2OC\cdot BC\cos\angle ACB=16+4-8=12$

……………………………………4 分

$\therefore OB^2+BC^2=12+4=16=OC^2$

$\therefore OB\perp BC$ ……………………………………5 分

又 $\because OB\cap PO=O, OB, OP\subset$ 平面 POB

$\therefore BC\perp$ 平面 POB ……………………………………6 分

又 $\because PB\subset$ 平面 POB，$\therefore PB\perp BC$ ……………………………………7 分

（2）方法一：过点 O 在平面 ABC 内作 $ON\perp AC$ 交 AB 于 N，

则 ON, OC, OP 两两垂直，以 O 点为原点，

分别以 ON、OC、OP 为 x 、 y 、 z 轴建立空间直角坐标系(如图). ....8 分

$\because \Delta PAC$ 是等腰直角三角形且 $PC = PA = 4\sqrt{2}$，$\angle ACB = 60^\circ$， $BC = 2$.

$\therefore B(\sqrt{3},3,0)$， $C(0,4,0)$， $P(0,0,4)$

$\therefore \overrightarrow{CB} = (\sqrt{3},-1,0), \overrightarrow{CP} = (0,-4,4)$ ....10 分

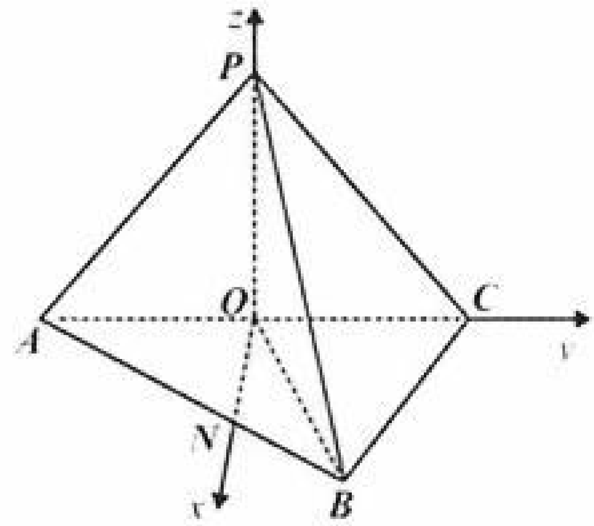
设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，则

$\therefore \overrightarrow{CB} \cdot \vec{n} = \sqrt{3}x - y = 0, \overrightarrow{CP} \cdot \vec{n} = -4y + 4z = 0$

取 $x = 1$ $\therefore \vec{n} = (1,\sqrt{3},\sqrt{3})$ ....12 分

又 $\because \overrightarrow{OC} = (0,4,0)$，

设直线 AC 与平面 PBC 所成角为 θ



$$\therefore \sin\theta = \left|\cos\left\langle \overrightarrow{OC}, \vec{n} \right\rangle\right| = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \vec{n}}{\left|\overrightarrow{OC}\right|\left|\vec{n}\right|} = \frac{4\sqrt{3}}{4 \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$\therefore$ 直线 AC 与平面 PBC 所成角的正弦值是 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. .... 15 分

方法二：

过点 O 作 $OH \perp PB$ 于 H，连接 HC，由（1）知， $BC \perp$ 平面 POB

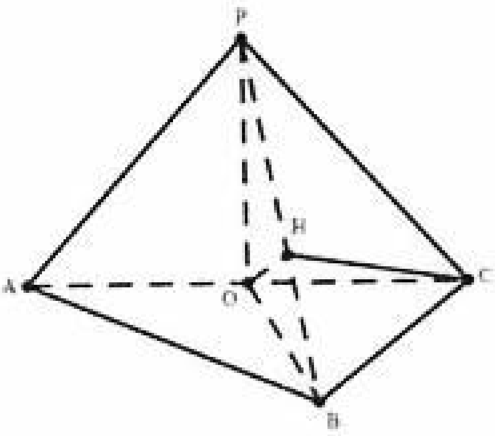
$\therefore$ 平面 $PBC \perp$ 面 POB $\quad\therefore OH \perp$ 平面 PBC

$\therefore \angle HCO$ 是直线 AC 与平面 PBC 所成的角 .... 10 分

由（1）知 $OP = 4$，$OB = 2\sqrt{3}, PB = 2\sqrt{7}$

$$\therefore OH = \frac{OP \cdot OB}{PB} = \frac{4\sqrt{21}}{7}$$ .... 12 分

$$\therefore \sin\angle OCH = \frac{OH}{OC} = \frac{\frac{4\sqrt{21}}{7}}{4} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$



$\therefore$ 直线 AC 与平面 PBC 所成角的正弦值是 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

.... 15 分

17.（本题满分 15 分）

解：（1）易知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，......................1 分

且 $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{a}{x} = \dfrac{x^2 - ax + 1}{x^2}$，......................2 分

记 $h(x) = x^2 - ax + 1$, $\Delta = a^2 - 4$

当 $0 < a < 2$ 时， $\Delta < 0$， 此时 $h(x) = x^2 - ax + 1 > 0$ 恒成立，

则 $f'(x) > 0$ 恒成立，

当 $a = 2$ 时， $\Delta = 0$， 此时 $h(x) = x^2 - ax + 1 \geq 0$ 恒成立，

则 $f'(x)\geq 0$ 恒成立，当且仅当 $x=1$ 时取等号.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；……………………3 分

当 $a>2$ 时，$\Delta=a^2-4>0$，此时 $h(x)=x^2-ax+1=0$ 有两个正根：

$x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ 或 $x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

当 $x\in(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})\cup(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 时，$f'(x)<0$；

所以 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}),(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 上单调递增，

在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 上单调递减. ……………………5 分

综上所述：当 $0<a\leq 2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}),(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 上单调递增，

在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 上单调递减. ……………………6 分

（2）因为 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，由（1）知仅在 $a>2$ 时满足条件

设 x_1,x_2 是方程 $x^2-ax+1=0$ 的两个不等正实根，

则满足 $\begin{cases}\Delta=a^2-4>0\\ x_1+x_2=a\\ x_1\cdot x_2=1\end{cases}$，不妨设 $x_1<x_2$，

则 $0<x_1<1<x_2$，……………8 分

由于 $k=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{(x_1-\frac{1}{x_1}-a\ln x_1)-(x_2-\frac{1}{x_2}-a\ln x_2)}{x_1-x_2}$

$=\dfrac{(x_1-x_2)(1+\frac{1}{x_1x_2})-a(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}=1+\dfrac{1}{x_1x_2}-\dfrac{a(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}$

$=2-\dfrac{a}{x_1-x_2}(\ln x_1-\ln x_2)$ ……………………11 分

依题意，假设存在 a 的值，使得 $k+a=2$，

则$2-\frac{a}{x_1-x_2}(\ln x_1-\ln x_2)+a=2$，又$a>2$，即$\frac{1}{x_1-x_2}(\ln x_1-\ln x_2)=1$

又$x_1\cdot x_2=1$，把$x_1=\frac{1}{x_2}$代入整理得$x_2-\frac{1}{x_2}-2\ln x_2=0\quad(x_2>1)$（*）

…………………………13 分

令$\varphi(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x\ (x>1)$，则$\varphi'(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}>0$

所以$\varphi(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，从而$\varphi(x)>\varphi(1)=0$，

所以当$x_2>1$时，$x_2-\frac{1}{x_2}-2\ln x_2>0$恒成立

因此(*)无解，即不存在实数a使得$k+a=2$．…………………………15 分

18. 解：（1）设$F(c,0)$，依题意得$c=1$

当$x=c$时，$|y|=\frac{b^2}{a}=\frac{3}{2}$

又$a^2=b^2+c^2$，所以$a=2,b=\sqrt{3}$，……………………………………………3 分

故椭圆M的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$……………………………………… 4 分

（2）（i）因为直线AB与坐标轴不垂直，设直线AB的方程为$x=my+1(m\neq0)$

设　$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(x_0,y_0)$，　由　$\begin{cases}x=my+1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$　，　得

$(4+3m^2)y^2+6my-9=0$，

则$y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4},y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$，可得$\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{3}{2m}$，……………6 分

又由条件知直线AD，BC的斜率均存在，

则直线AD的方程为$y=\frac{y_1}{x_1-x_2}(x-x_2)$，

直线BC的方程为$y=\frac{y_2}{x_2-x_1}(x-x_1)$，……………………………………… 7 分

联立直线AD和BC的方程，消去y，得交点P的横坐标为

$$x_0=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{(my_1+1)y_2+(my_2+1)y_1}{y_1+y_2}=\frac{2my_1y_2}{y_1+y_2}+1=4,$$

同理，消去x，得交点P的纵坐标为$y_0=\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{3}{2m}$ $(y_0\neq 0)$,

所以P的坐标为$(4,\frac{3}{2m})$ $(m\neq 0)$.

所以点P在定直线l上，且定直线l的方程为$x=4$ $(y\neq 0)$. ...10 分

（ii）（法一）依题意不妨令$m>0$, A在x轴上方，

则$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}|BD||x_0-x_1|=\frac{1}{2}|y_2||4-(my_1+1)|$

$\frac{1}{2}|3y_2-my_1y_2|=\frac{1}{2}\left|3y_2-\frac{3}{2}(y_1+y_2)\right|=\frac{3}{4}|y_2-y_1|$

$=\frac{3}{4}\sqrt{(\frac{-6m}{3m^2+4})^2+4\times\frac{9}{3m^2+4}}=9\sqrt{\frac{m^2+1}{(3m^2+4)^2}}$. ....12 分

由$9\sqrt{\frac{m^2+1}{(3m^2+4)^2}}=\frac{18}{13}$，得$36m^4-73m^2-105=0$，

解得$m^2=3, m^2=-\frac{35}{36}$（舍去）

所以$m=\sqrt{3}$, 得直线AB的方程为$x=\sqrt{3}y+1$，

同理当$m<0$时，直线AB的方程为$x=-\sqrt{3}y+1$，..........................14 分

联立$\begin{cases}x=\sqrt{3}y+1\\ y^2=4x\end{cases}$，消去$y$得$x^2-14x+1=0$, 设$Q(x_3,y_3)$, $T(x_4,y_4)$

得$|QF|\cdot|TF|=(x_3+1)(x_4+1)=x_3x_4+(x_3+x_4)+1=1+14+1=16$，..... 16 分

根据对称性得，当直线AB的方程为$x=-\sqrt{3}y+1$时，也有$|QF|\cdot|TF|=16$

综上所述$|QF|\cdot|TF|=16$ ....17 分

（法二）$|AB|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{12(1+m^2)}{3m^2+4}$

又因为$P(4,\frac{3}{2m})$到$AB: x=my+1$的距离为$d=\frac{3}{2\sqrt{1+m^2}}$ .... 12 分

所以$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\times\frac{12(1+m^2)}{3m^2+4}\cdot\frac{3}{2\sqrt{1+m^2}}=\frac{9\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}=\frac{18}{13}$ ....13 分

得$36m^4-73m^2-105=0$, 解得$m^2=3, m^2=-\frac{35}{36}$（舍去）

所以$m=\pm\sqrt{3}$，得直线AB的方程为$x=\sqrt{3}y+1$或$x=-\sqrt{3}y+1$，... 14 分

联立$\begin{cases}x=\sqrt{3}y+1\\y^2=4x\end{cases}$，消去$y$得到$x^2-14x+1=0$，设$Q(x_3,y_3),T(x_4,y_4)$

得$|QF|\cdot|TF|=(x_3+1)(x_4+1)=x_3x_4+(x_3+x_4)+1=1+14+1=16$，……16 分

根据对称性得，当直线AB的方程为$x=-\sqrt{3}y+1$时，也有$|QF|\cdot|TF|=16$

综上所述$|QF|\cdot|TF|=16$. ……………………………………………17 分

19. 解：（1）当第 1 次抛掷硬币时，

若正面朝上，由$(a_0,b_0)=(0,0)$知$a_0=b_0=0$，

则$(a_1,b_1)=(a_0-1,b_0)=(-1,0)$；

若反面朝上，由$(a_0,b_0)=(0,0)$知$a_0=b_0=0$，

则$(a_1,b_1)=(a_0,b_0-1)=(0,-1)$；……………………………………………1 分

当第 2 次抛掷硬币时，如果正面朝上，

此时若第 1 次正面朝上，由$(a_1,b_1)=(-1,0)$知$a_1<b_1$，

则$(a_2,b_2)=(a_1-1,b_1-1)=(-2,-1)$

此时若第 1 次反面朝上，由$(a_1,b_1)=(0,-1)$知$a_1>b_1$，

则$(a_2,b_2)=(a_1-1,b_1)=(-1,-1)$

当第 2 次抛掷硬币时，如果反面朝上，

此时若第 1 次正面朝上，由$(a_1,b_1)=(-1,0)$知$a_1<b_1$，

则$(a_2,b_2)=(a_1,b_1-1)=(-1,-1)$

此时若第 1 次反面朝上，由$(a_1,b_1)=(0,-1)$知$a_1>b_1$，

则$(a_2,b_2)=(a_1-1,b_1-1)=(-1,-2)$ ……………………………………4 分

所以(a_2,b_2)的所有可能结果共 4 个，所以$P_1=0, P_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. ……5 分

（2）由题知，$|a_n-b_n|\le 1$，…………………6 分

当$a_{n-1}>b_{n-1}$，且第n $(n\ge 1)$次掷出正面时，

有$(a_n,b_n)=(a_{n-1}-1,b_{n-1})$，此时$a_n=b_n$，

当$a_{n-1}<b_{n-1}$，且第n $(n\ge 1)$次掷出反面时，

有$(a_n,b_n)=(a_{n-1},b_{n-1}-1)$，此时$a_n=b_n$，

所以

$$P_n=\frac{1}{2}P(a_{n-1}>b_{n-1})+\frac{1}{2}P(a_{n-1}<b_{n-1})=\frac{1}{2}[P(a_{n-1}>b_{n-1})+P(a_{n-1}<b_{n-1})]=\frac{1}{2}(1-P_{n-1}),$$

即$P_n=-\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{2}$，所以$P_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-\frac{1}{3})$ $(n\ge 1)$

所以$\left\{P_n-\frac{1}{3}\right\}$是以$P_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$为首项，$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列，

所以$P_n-\frac{1}{3}=(-\frac{1}{3})\times(-\frac{1}{2})^{n-1}$，所以$P_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})^{n-1}$. ……………11 分

（3）由（2）知$P_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}\ (n\geq 1,n\in N)$，

当$n>1$且n为奇数时，$P_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}<\frac{1}{3}$，…………………13 分

当$n>1$且n为偶数时，$P_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$，

且$P_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$随着$n$的增大而减小，

所以$P_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\leq P_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 2}=\frac{1}{2}$ ……………………………………16 分

综上：抛掷 2 次硬币后使得$a_n=b_n$的概率最大. ……………………………17 分