（在此卷上答题无效）

2024-2025 学年福州市高三年级第四次质量检测

数学试题

（完卷时间：120 分钟；满分：150 分）

友情提示:请将所有答案填写到答题卡上！请不要错位、越界答题！

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内，复数 z 对应的点为$(1,1)$，则$\mathrm{i}\cdot z=$

A. $-1+\mathrm{i}$　　B. $-1-\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

2. 曲线 $f(x)=x^3+3x$ 在点$(-1,f(-1))$处的切线方程为

A. $y+4=0$　　B. $2x-y-2=0$

C. $6x-y=0$　　D. $6x-y+2=0$

3. 已知集合 $A=\{x|\cos x>0\}$，$B=\{1,3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\varnothing$　　B. $\{1\}$　　C. $\{3\}$　　D. $\{1,3\}$

4. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$展开式中常数项是

A. 20　　B. 15　　C. -15　　D. -20

5. 已知 a,b,c 分别为$\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 的对边，若 $\dfrac{\sin C-\sin B}{\sin A}=\dfrac{a-b}{c+b}$，则 $C=$

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{12}$

6. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，点 P 为 C 上一点，过点 P 作 l 的垂线，垂足为 A，若 $\overrightarrow{FA}=2\overrightarrow{FB}$，且点$(-3,0)$在直线 PB 上，则直线 PB 的斜率为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$或$-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$或$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. 1 或-1　　D. $\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$

7. 若 x_0 为函数 $f(x)=\begin{cases}x-\ln x, & 0<x<\mathrm{e},\\ \mathrm{e}^x x-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^2 x-\mathrm{e}^2 x^2, & x\geqslant \mathrm{e}\end{cases}$ 的零点，则 $x_0-\ln x_0=$

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. e^2

高考直通车

8. 在平面四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形，$\triangle ACD$ 是以点 D 为直角顶点的等腰直角三角形，将该四边形沿对角线 AC 折成四面体 $B-ACD$，在折起的过程中，四面体的外接球体积最小值为

A. $\dfrac{32\pi}{3}$　　B. 4π　　C. $\dfrac{4\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 的图象关于点 $\left(-\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 中心对称，则

A. $f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 上单调递增

B. $f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right)$ 上的最大值为 1

C. 直线 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

D. 当 $x\leqslant 0$ 时，函数 $y=-\dfrac{2}{\pi}x+1$ 的图象恒在函数 $f(x)$ 的图象上方

10. 有一组成对样本数据 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n)，设 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$\bar{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$. 由这组数据得到新成对样本数据 $(x_1+\bar{x},y_1+\bar{y})$，$(x_2+\bar{x},y_2+\bar{y})$，…，$(x_n+\bar{x},y_n+\bar{y})$. 利用一元线性回归模型，根据最小二乘法，下列结论一定正确的是

A. 两条经验回归直线都过点 $(\bar{x},\bar{y})$　　B. 两条经验回归直线的截距相同

C. 两组数据的相关系数相同　　D. 两组数据的决定系数相同

附：经验回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，决定系数 $R^2=1-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$（其中 $\hat{y}_i=\hat{b}x_i+\hat{a}$）.

高考直通车

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(x,y)$ 是曲线 $|x|+|y|=1$ 上的动点，点 A 坐标为 $(1,0)$，射线 OA 从 x 轴的非负半轴开始，绕点 O 按逆时针方向旋转角 θ，终止位置为 OP. 定义：$C(\theta)=x$，$S(\theta)=y$，则

A. $C\left(\frac{\pi}{4}\right)+S\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$　　B. $C\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+S(\theta)=0$

C. $\forall\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$C(\theta)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta$　　D. $\forall\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$2S(\theta)\leqslant S(2\theta)$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(k-1,1)$，若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $k=$ ________.

13. 《九章算术》中，称底面为矩形而有一侧棱垂直于底面的四棱锥为阳马. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，若阳马以该长方体的顶点为顶点，则这样的阳马的个数是 ________（用数字作答）.

14. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，其左、右顶点分别为 A，B，过 F 且与 x 轴垂直的直线交 C 于 M，N 两点，直线 BN 与 AM 交于点 Q，若 $\triangle MQB$ 与 $\triangle MFB$ 的面积相等，则 C 的离心率为 ________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. （13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，满足 $a_{2n}=2a_n+1\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_n<3a_n$，求 n 的最大值.

16. （15 分）

某校组织学生参观中国船政文化博物馆，并抽取 20 个学生进行船政文化知识竞赛，成绩如下：

53，79，76，92，63，63，65，77，66，68，
72，67，73，57，66，85，87，79，90，61.

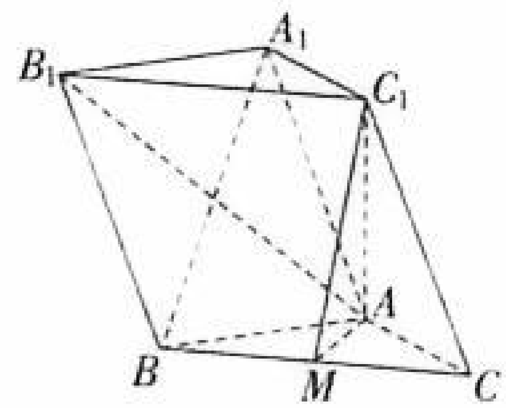
（1）根据以上数据，求成绩的上四分位数（说明：上四分位数即第 75 百分位数）；

（2）在大于 70 分的成绩中随机抽取 2 个，设 X 表示抽取的 2 个成绩中大于上四分位数的个数，求 X 的分布列和数学期望.

高考直通车

17. （15分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC_1\perp$ 平面 ABC，BC 的中点为 M，$AC\perp AB$，$AB=AC=AC_1=2$.



（1）证明：A_1B// 平面 AC_1M；

（2）在平面 ABC 内，动点 Q 在以 A 为圆心，AB 为半径的劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上（不含端点 B，C）. 若直线 B_1Q 与平面 AC_1B_1 所成的角为 $\dfrac{\pi}{6}$，证明：A，M，Q 三点共线.

18. （17分）

已知椭圆 C 的两个焦点分别是 $F_1\left(-\sqrt{6},0\right)$，$F_2\left(\sqrt{6},0\right)$，长轴长是短轴长的 $\sqrt{2}$ 倍.

（1）求 C 的方程；

（2）过点 $\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ 的直线与 C 交于 D，E 两点，以 DE 为直径的圆记为 $\odot I$.

（i）当直线 DE 过原点时，求 $\odot I$ 与 C 的交点坐标；

（ii）$\odot I$ 是否过定点？若是，请求出定点坐标；若不是，请说明理由.

19. （17分）

已知函数 $y=h(x)$，记 $A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，$B=\{y\mid y=h(x),x\in A\}$，若 $h(x)$ 满足 $B\subseteq A$，则称 $y=h(x)$ 是 A 上的“可控函数”. 由“可控函数”的定义可得：若函数 $h(x)$ 是 A 上的“可控函数”，则函数 $h^n(x)$ 也是 A 上的“可控函数”，其中 $h^n(x)=\underbrace{h\left(h\left(\cdots h\left(h(x)\right)\cdots\right)\right)}_{n个h}$，例如 $h^2(x)=h\left(h(x)\right)$，$h^3(x)=h\left(h\left(h(x)\right)\right)$.

（1）判断函数 $f(x)=x^2-2x+2$ 是否为 $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$ 上的“可控函数”，并说明理由；

（2）已知函数 $g(x)=\dfrac{x^2-2px+p^2}{2p-x}\ (p>0)$ 是 $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant t\}$ 上的“可控函数”，且 t 的最大值为 $\sqrt{2}+1$.

（i）求函数 $g(x)$ 的解析式；

（ii）若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$a_{n+1}=g(a_n)\ (n\in\mathbf{N}^*)$，$S_n$ 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 求证：$(\sqrt{2}-1)n<S_n<(\sqrt{2}+1)n$.

高考直通车

2024—2025学年第二学期福州市高三年级5月份质量检测

数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. A　2. D　3. B　4. D　5. C　6. B　7. C　8. C

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0分。

9. BD　　10. CD　　11. ABC

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. −1　　13. 24　　14. 2

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.【考查意图】本小题主要等差数列的通项公式与前n项和公式、一元二次不等式的解法等基础知识，考查转化化归能力、运算求解能力等，考查化归与转化思想、特殊与一般思想等，考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性．满分13分．

解法一：（1）因为数列$\{a_n\}$是公差为2的等差数列，所以$a_n=a_1+2(n-1)$．

由$a_{2n}=2a_n+1$可得$a_1+2(2n-1)=2[a_1+2(n-1)]+1$，解得$a_1=1$，

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$．

（2）由（1）得$S_n=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$．

由$S_n<3a_n$得$n^2<3(2n-1)$，即$n^2-6n+3<0$，解得$3-\sqrt{6}<n<3+\sqrt{6}$，

由于$2<\sqrt{6}<3$，所以$5<3+\sqrt{6}<6$，所以n的最大值为5．

解法二：（1）令$n=1$，由$a_{2n}=2a_n+1$可得$a_2=2a_1+1$，又由条件得$a_2=a_1+2$，

所以$2a_1+1=a_1+2$，解得$a_1=1$，所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$．

（2）同解法一

16.【考查意图】本小题主要考查上四分位数、超几何分布、分布列、数学期望等基础知识，考查数学建模能力、运算求解能力、逻辑推理能力等，考查统计与概率思想、化归与转化思想等，考查数学抽象、数学建模、逻辑推理和数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．满分15分

【解析】

高考直通车

（1）把 20 个成绩按从小到大排序，可得

53，57，61，63，63，65，66，66，67，68，

72，73，76，77，79，79，85，87，90，92.

由 $75\% \times 20 = 15$，

可知成绩的上四分位数为第 15 个成绩与第 16 个成绩的平均数，即 $\frac{79+79}{2}=79$.

（2）由数据可知，成绩大于70分的有10个，大于上四分位数79的成绩有4个，

根据题意，X 的所有可能取值为0，1，2.

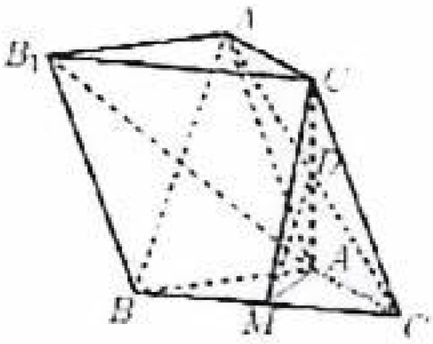
$P(X=0)=\frac{C_4^0C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3}$，$P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^0}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$，

则 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

所以 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{15}=\frac{4}{5}$

17.【考查意图】本小题主要考查直线与平面平行的判定、直线与平面所成的角、空间向量等基础知识，考查直观想象能力、逻辑推理能力、运算求解能力等，考查数形结合思想、化归与转化思想等，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．满分 15 分



解法一：（1）连结 A_1C 与 AC_1 交于点 D，连结 DM

因为点 D 为 AC_1 与 A_1C 的交点，所以点 D 为 AC_1 中点，

又因为 M 为 BC 中点，所以 $DM \parallel A_1B$.

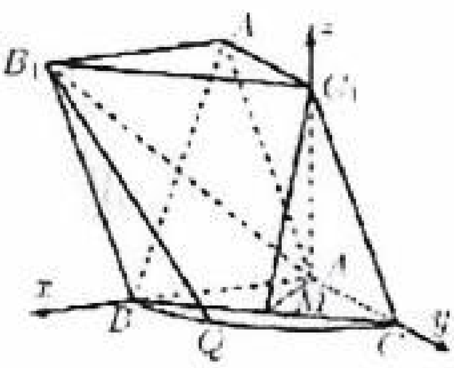
因为 $A_1B \not\subset$ 平面 AC_1M，$DM \subset$ 平面 AC_1M，

所以 $A_1B \parallel$ 平面 AC_1M

（2）以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$ 的方向为 x 轴正向，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.

则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$C_1(0,0,2)$，$A_1(0,-2,2)$，$B_1(2,-2,2)$，$M(1,1,0)$，

$\overrightarrow{AC_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{AM}=(1,1,0)$.



设平面 AC_1B_1 的法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{AC_1}\cdot\vec{m}=0,\\ \overrightarrow{C_1B_1}\cdot\vec{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2c=0,\\ 2a-2b=0,\end{cases}$ 可取 $\vec{m}=(1,1,0)$.

因为动点 Q 在以 A 为圆心，AB 为半径的劣弧 BC 上

（不含端点 B，C），所以可设 $Q(x,y,0)(x>0,y>0)$，

则 $x^2+y^2=4$，$\overrightarrow{B_1Q}=(x-2,y+2,-2)$，

由于 B_1Q 与平面 AC_1B_1 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$．所以 $\left|\cos\left\langle\overrightarrow{B_1Q},\vec{m}\right\rangle\right|=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

高考直通车

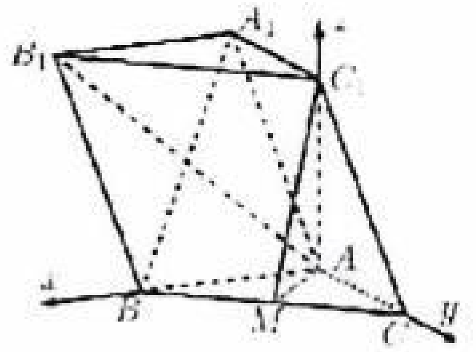
所以

$$\frac{|\overrightarrow{B_1Q}\cdot\overrightarrow{m}|}{|\overrightarrow{B_1Q}||\overrightarrow{m}|}=\frac{|x+y|}{\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2+(-2)^2}\times\sqrt{2}}$$

$$=\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2-4x+4y+12}\times\sqrt{2}}=\frac{|x+y|}{\sqrt{4-x+y}\times 2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

所以 $|x+y|=\sqrt{2}\times\sqrt{4-x+y}$，即 $y-x=xy-2$，$(y-x)^2=(xy-2)^2$，解得 $xy=2$，所以 $x=y=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{AQ}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)=\sqrt{2}\overrightarrow{AM}$，故 A，M，Q 三点共线.

解法二：（1）以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$ 的方向为 x 轴正向，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.



则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$C_1(0,0,2)$，

$A_1(0,-2,2)$，$B_1(2,-2,2)$，$M(1,1,0)$，

$\overrightarrow{AC_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{AM}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(2,2,-2)$.

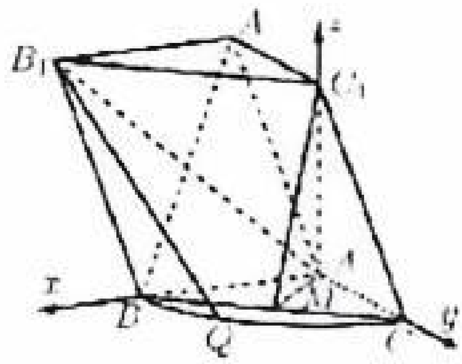
设平面 AC_1M 的法向量为 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{n}=0,\\ \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2z=0,\\ x+y=0,\end{cases}$ 可取 $\overrightarrow{n}=(1,-1,0)$.

因为 $\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{n}=2-2+0=0$，$A_1B\not\subset$ 平面 AC_1M，所以 $A_1B//$ 平面 AC_1M.

（2）$\overrightarrow{C_1B_1}=(2,-2,0)$.

设平面 AC_1B_1 的法向量为 $\overrightarrow{m}=(a,b,c)$，



则 $\begin{cases}\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{m}=0,\\ \overrightarrow{C_1B_1}\cdot\overrightarrow{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2c=0,\\ 2a-2b=0,\end{cases}$ 可取 $\overrightarrow{m}=(1,1,0)$.

因为动点 Q 在以 A 为圆心，AB 为半径的劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上（不含端点 B，C），所以可设 $Q(2\cos\theta,2\sin\theta,0)$ $(\theta\in(0,\frac{\pi}{2}))$，

则 $\overrightarrow{B_1Q}=(2\cos\theta-2,2\sin\theta+2,-2)$，

因为 B_1Q 与平面 AC_1B_1 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$，所以 $\left|\cos\left\langle\overrightarrow{B_1Q},\overrightarrow{m}\right\rangle\right|=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

所以

$$\frac{|\overrightarrow{B_1Q}\cdot\overrightarrow{m}|}{|\overrightarrow{B_1Q}||\overrightarrow{m}|}=\frac{|2\sin\theta+2\cos\theta|}{\sqrt{(2\cos\theta-2)^2+(2\sin\theta+2)^2+(-2)^2}\times\sqrt{2}}$$

$$=\frac{|\sin\theta+\cos\theta|}{\sqrt{2+\sin\theta-\cos\theta}\times 2}=\frac{1}{2}.$$

化简得 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=2+\sin\theta-\cos\theta$，即

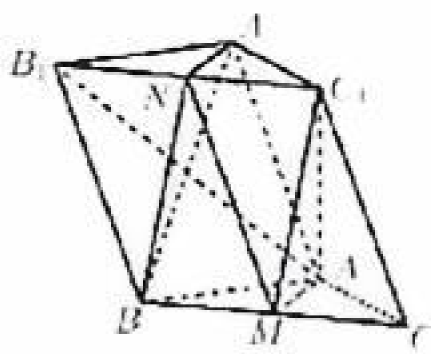
$\cos\theta-\sin\theta=1-2\sin\theta\cos\theta=(\cos\theta-\sin\theta)^2$，得 $\cos\theta-\sin\theta=0$ 或 $\cos\theta-\sin\theta=1$.

高考直通车

因为$\theta \in (0,\frac{\pi}{2})$，$\cos\theta-\sin\theta=1$不成立.由$\cos\theta-\sin\theta=0$可得$\tan\theta=1$，从而

$\sin\theta=\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$\overrightarrow{AQ}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，所以$\overrightarrow{AQ}=\sqrt{2}\overrightarrow{AM}$，故$A$，$M$，$Q$三点共线.

解法三：（1）设B_1C_1中点为N，连结BN、A_1N、MN，则



$MN//CC_1$且$MN=CC_1$.

因为$AA_1//CC_1$且$AA_1=CC_1$，所以$MN//AA_1$且$MN=AA_1$，

四边形$NMAA_1$是平行四边形，所以$AM//A_1N$.

因为M、N分别为BC、B_1C_1中点，所以$BM=NC_1$，

又因为$BM//NC_1$，所以四边形BMC_1N是平行四边形，

所以$BN//MC_1$.

因为$AM//A_1N$，$AM\not\subset$平面A_1BN，所以$AM//$平面A_1BN.

同理$C_1M//$平面A_1BN.

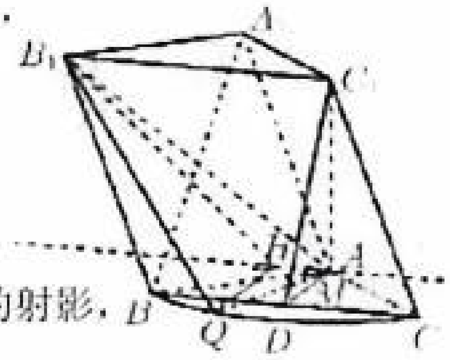
又因为$AM\cap C_1M=M$，所以平面$AC_1M//$平面A_1NB，

因为$A_1B\subset$平面A_1NB，所以$A_1B//$平面AC_1M.

（2）设平面$ABC\cap$平面$AB_1C_1=l$，则$A\in l$.

过点Q作$QH\perp l$，垂足为H，连结B_1H.

因为$BC//B_1C_1$，$BC\not\subset$平面AB_1C_1，所以$BC//$平面AB_1C_1，



又因为平面$ABC\cap$平面$AB_1C_1=l$，$BC\subset$平面ABC，

所以$BC//l$.

因为$AC_1\perp$平面ABC，所以$AC_1\perp QH$.

又因为$QH\perp l$，$l\cap AC_1=A$，

所以$QH\perp$平面AC_1B_1，B_1H为斜线B_1Q在平面AC_1B_1上的射影，

$\angle HB_1Q$为B_1Q与平面AC_1B_1所成角，则$\angle HB_1Q=\frac{\pi}{6}$

在$Rt\triangle HB_1Q$中，$\tan\angle HB_1Q=\frac{QH}{B_1H}$，所以$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{QH}{B_1H}$

因为$AC\perp AB$，$AB=AC=2$，所以$B_1C_1=BC=2\sqrt{2}$，

设$AH=x(0\le x<\sqrt{2})$，则$QH=\sqrt{AQ^2-AH^2}=\sqrt{4-x^2}$

设劣弧$\overset{\frown}{BC}$的中点为D.

当点Q在$\overset{\frown}{BD}$上（不含端点B）时，$0\le x<\sqrt{2}$，

$B_1H=\sqrt{(B_1C_1-AH)^2+AC_1^2}=\sqrt{(2\sqrt{2}-x)^2+4}$，所以$\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(2\sqrt{2}-x)^2+4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

化简得$x^2-\sqrt{2}x=0$，解得$x=0$或$x=\sqrt{2}$（舍去）

当点Q在$\overset{\frown}{CD}$上（不含端点C，D）时，$0<x<\sqrt{2}$，

$B_1H=\sqrt{(B_1C_1+AH)^2+AC_1^2}=\sqrt{(2\sqrt{2}+x)^2+4}$，所以$\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{(2\sqrt{2}+x)^2+4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

化简得$x^2+\sqrt{2}x=0$，解得$x=0$或$x=-\sqrt{2}$，均舍去.

综上，得$x=0$，此时点Q与点D重合，

又因为BC的中点为M，故A，M，Q三点共线.

高考直通车

18.【考查意图】本小题主要考查椭圆的标准方程与简单几何性质、直线与椭圆的位置关系、圆与椭圆的位置关系等基础知识，考查逻辑推理能力、直观想象能力、运算求解能力和创新能力等，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、数形结合思想和特殊与一般思想等，考查逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性．满分 17 分

解法一：（1）由于椭圆C的焦点在x轴上，设其标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

由条件得$\begin{cases}a^2-b^2=6,\\ a=\sqrt{2}b\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\sqrt{3},\\ b=\sqrt{6}\end{cases}$，

所以C的方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$．

（2）（i）当直线DE过原点时，直线DE的方程为$y=-x$．

将其与C方程联立，可求两交点坐标分别为$(-2,2)$，$(2,-2)$，

从而e I 方程为$x^2+y^2=8$．

联立$x^2+y^2=8$与$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$，得$\begin{cases}x=2,\\ y=2\end{cases}$，$\begin{cases}x=-2,\\ y=2\end{cases}$，$\begin{cases}x=-2,\\ y=-2\end{cases}$，$\begin{cases}x=2,\\ y=-2\end{cases}$，

故e I 与C的交点坐标为$(2,2)$，$(-2,2)$，$(-2,-2)$，$(2,-2)$．

（2）（ii）当直线DE垂直x轴时，将$x=\frac{2}{3}$代入$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$中，得$y^2=\frac{52}{9}$，

从而e I 方程为$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{52}{9}$．

当直线DE过原点时，e I 方程为$x^2+y^2=8$．联立$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{52}{9}$与$x^2+y^2=8$方程，

解得$\begin{cases}x=2,\\ y=-2\end{cases}$，或$\begin{cases}x=2,\\ y=2\end{cases}$，故e I 若过定点，则定点只能为$Q_1(2,-2)$或$Q_2(2,2)$．

当直线DE斜率存在时，设其方程为$y=kx+m$，由于$\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$在直线$y=kx+m$上，可得$m=-\frac{2}{3}(k+1)$．

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1.\end{cases}$得$\left(2k^2+1\right)x^2+4kmx+2m^2-12=0$，

设$D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-12}{2k^2+1}$

若$Q_1(2,-2)$为所求定点，则必有$\overrightarrow{Q_1D}\cdot\overrightarrow{Q_1E}=0$，由于

$\overrightarrow{Q_1D}\cdot\overrightarrow{Q_1E}=(x_1-2)(x_2-2)+(y_1+2)(y_2+2)=(x_1-2)(x_2-2)+(kx_1+m+2)(kx_2+m+2)$

$=\left(k^2+1\right)x_1x_2+\left[k(m+2)-2\right](x_1+x_2)+4+(m+2)^2$

高考直通车

$=\left(k^2+1\right)\cdot\dfrac{2m^2-12}{2k^2+1}+\left[k(m+2)-2\right]\left(-\dfrac{4km}{2k^2+1}\right)+4+(m+2)^2$

$=\dfrac{4k^2+8km+3m^2-4+4m}{2k^2+1}$.

将 $m=-\dfrac{2}{3}(k+1)$ 代入，得 $4k^2+8km+3m^2-4+4m=-\dfrac{16}{3}(k+1)$ 不恒为零，

故定点不为 $Q_1(2,-2)$.

若 $Q_2(2,2)$ 为所求定点，则必有 $\overrightarrow{Q_2D}\cdot\overrightarrow{Q_2E}=0$，由于

$\overrightarrow{Q_2D}\cdot\overrightarrow{Q_2E}=(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-2)(y_2-2)=(x_1-2)(x_2-2)+(kx_1+m-2)(kx_2+m-2)$

$=\left(k^2+1\right)x_1x_2+\left[k(m-2)-2\right](x_1+x_2)+4+(m-2)^2$

$=\left(k^2+1\right)\cdot\dfrac{2m^2-12}{2k^2+1}+\left[k(m-2)-2\right]\left(-\dfrac{4km}{2k^2+1}\right)+4+(m-2)^2$

$=\dfrac{4k^2+8km+3m^2-4-4m}{2k^2+1}$.

将 $m=-\dfrac{2}{3}(k+1)$ 代入，得 $4k^2+8km+3m^2-4-4m=0$，故定点为 $Q_2(2,2)$.

综上，e I 过定点，定点坐标为 $(2,2)$.

解法二：（1）同解法一

（2）（i）同解法

（2）（ii）当直线 DE 垂直 x 轴时，将 $x=\dfrac{2}{3}$ 代入 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 中，得 $y^2=\dfrac{52}{9}$，

从而 e I 方程为 $\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{52}{9}$

当直线 DE 过原点时，e I 方程为 $x^2+y^2=8$.联立 $\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{52}{9}$ 与 $x^2+y^2=8$ 方程，

解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=-2\end{cases}$，或 $\begin{cases}x=2,\\ y=2\end{cases}$，故 e I 若过定点，则定点只能为 $Q_1(2,-2)$ 或 $Q_2(2,2)$. ……12 分

当直线 DE 斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$，由于 $\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ 在直线 $y=kx+m$ 上，可

得 $m=-\dfrac{2}{3}(k+1)$.

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{6}=1,\end{cases}$ 得 $\left(2k^2+1\right)x^2+4kmx+2m^2-12=0$，

设 $D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-12}{2k^2+1}$

由 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2+1}$ 得 I 的横坐标为 $-\dfrac{2km}{2k^2+1}$，将其代入 $y=kx+m$ 中，得 $y=\dfrac{m}{2k^2+1}$，

高考直通车

所以 I 的坐标为 $\left(-\dfrac{2km}{2k^2+1},\dfrac{m}{2k^2+1}\right)$.

又 $|DE|^2=\left(1+k^2\right)\left[\left(-\dfrac{4km}{2k^2+1}\right)^2-4\cdot\dfrac{2m^2-12}{2k^2+1}\right]=\dfrac{8\left(1+k^2\right)\left(-m^2+12k^2+6\right)}{\left(2k^2+1\right)^2}$.

若 $Q_1(2,-2)$ 为所求定点，则必有 $4|Q_1I|^2-|DE|^2=0$，由于

$$4|Q_1I|^2-|DE|^2=4\left(2+\frac{2km}{2k^2+1}\right)^2+4\left(-2-\frac{m}{2k^2+1}\right)^2-\frac{8\left(1+k^2\right)\left(-m^2+12k^2+6\right)}{\left(2k^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{4(4k^2+8km+3m^2-4+4m)}{2k^2+1}.$$

将 $m=-\dfrac{2}{3}(k+1)$ 代入，得 $4k^2+8km+3m^2-4+4m=-\dfrac{16}{3}(k+1)$ 不恒为零，

故定点不为 $Q_1(2,-2)$.

若 $Q_2(2,2)$ 为所求定点，则必有 $4|Q_2I|^2-|DE|^2=0$，由于

$$4|Q_2I|^2-|DE|^2=4\left(2+\frac{2km}{2k^2+1}\right)^2+4\left(2-\frac{m}{2k^2+1}\right)^2-\frac{8\left(1+k^2\right)\left(-m^2+12k^2+6\right)}{\left(2k^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{4(4k^2+8km+3m^2-4-4m)}{2k^2+1}.$$

将 $m=-\dfrac{2}{3}(k+1)$ 代入，得 $4k^2+8km+3m^2-4-4m=0$，故定点为 $Q_2(2,2)$.

综上，e I 过定点，定点坐标为 $(2,2)$.

解法三：（1）同解法一

（2）（i）同解法一

（2）（ii）当直线 DE 斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$，由于 $\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ 在直线 $y=kx+m$ 上，可得 $m=-\dfrac{2}{3}(k+1)$.

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{6}=1,\end{cases}$ 得 $\left(2k^2+1\right)x^2+4kmx+2m^2-12=0$．设 $D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，则

$x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-12}{2k^2+1}$

由 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2+1}$ 得 I 的横坐标为 $-\dfrac{2km}{2k^2+1}$，将其代入 $y=kx+m$ 中，得 $y=\dfrac{m}{2k^2+1}$.

所以 I 的坐标为 $\left(-\dfrac{2km}{2k^2+1},\dfrac{m}{2k^2+1}\right)$.

又 $|DE|^2=\left(1+k^2\right)\left[\left(-\dfrac{4km}{2k^2+1}\right)^2-4\cdot\dfrac{2m^2-12}{2k^2+1}\right]=\dfrac{8\left(1+k^2\right)\left(-m^2+12k^2+6\right)}{\left(2k^2+1\right)^2}$.

高考直通车

所以e I 的方程为$\left(x+\dfrac{2km}{2k^2+1}\right)^2+\left(y-\dfrac{m}{2k^2+1}\right)^2=\dfrac{2\left(1+k^2\right)\left(-m^2+12k^2+6\right)}{\left(2k^2+1\right)^2}$.

即$\left[\left(2k^2+1\right)x+2km\right]^2+\left[\left(2k^2+1\right)y-m\right]^2=2\left(1+k^2\right)\left(-m^2+12k^2+6\right)$.

由于

$2\left(1+k^2\right)\left(-m^2+12k^2+6\right)-(2km)^2-m^2=3\left[8k^4+(-2m^2+12)k^2-m^2+4\right]$

$=3\left(2k^2+1\right)\left(4k^2-m^2+4\right)$,

所以由e I 的方程得

$\left(2k^2+1\right)\left[\left(2k^2+1\right)x^2+4kmx+\left(2k^2+1\right)y^2-2my\right]=3\left(2k^2+1\right)\left(4k^2-m^2+4\right)$,

即$\left(2k^2+1\right)\left(x^2+y^2\right)+4kmx-2my=3\left(4k^2-m^2+4\right)$.

又因为$m=-\dfrac{2}{3}(k+1)$，将其代入上式，并整理化简得

$2(3x^2+3y^2-4x-16)k^2-4(2x-y-2)k+3x^2+3y^2+4y-32=0$,

解方程组$\begin{cases}3x^2+3y^2-4x-16=0,\\2x-y-2=0,\\3x^2+3y^2+4y-32=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=2,\\y=2\end{cases}$，故此时e I 过定点$(2,2)$.

当直线 DE 垂直 x 轴时，将 $x=\dfrac{2}{3}$ 代入 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 中，得 $y^2=\dfrac{52}{9}$，从而e I 方程为 $(x-\dfrac{2}{3})^2+y^2=\dfrac{52}{9}$，令 $x=2,y=2$ 得 $(x-\dfrac{2}{3})^2+y^2=\dfrac{52}{9}$ 成立，故此时e I 同样过点$(2,2)$.

综上，e I 过定点，定点坐标为$(2,2)$.

19.【考查意图】本小题主要考查函数的单调性、最值、数列的递推关系及前 n 项和等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力、数学建模能力和创新能力等，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、数形结合思想等，考查数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性．满分 17 分

【解析】

（1）$f(x)$ 是$\{x|0\quad x\quad 2\}$ 上的“可控函数”

因为$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$，由$0\quad x\quad 2$得$1\quad (x-1)^2+1\quad 2$，

所以$1\quad f(x)\quad 2$，

因为$[1,2]\subseteq[0,2]$，故函数$f(x)$是$\{x|0\quad x\quad 2\}$ 上的“可控函数”

（2）（i）由函数$g(x)$的定义域为$\{x\,|\,x\neq 2p\}$，

高考直通车

可得$0<t<2p$，

由于$g'(x)=-\dfrac{(x-3p)(x-p)}{(x-2p)^2}$，

又因为$x\in[0,2p)$，

当$0\quad x<p$时，$g'(x)<0$，则$g(x)$在区间$[0,p)$上单调递减，

当$p<x<2p$时，$g'(x)>0$，则$g(x)$在区间$[p,2p)$上单调递增，

而$g(0)=\dfrac{p}{2},g(p)=0$，

所以当$0\quad x\quad p$时，$g(x)$的取值范围为$\left[0,\dfrac{p}{2}\right]$，

因为$\left[0,\dfrac{p}{2}\right]\subseteq[0,p]$，

所以由“可控函数”定义可得函数$g(x)$是$\{x|0\quad x\quad p\}$上的“可控函数”

所以t的最大值不小于p．

若$p\quad t<2p$，由“可控函数”定义可知p满足的条件为$\begin{cases}g(p)\quad 0,\\ g(0)\quad t,\\ g(t)\quad t\end{cases}$，

可得$\begin{cases}t\quad \dfrac{p}{2},\\ \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}p\quad t\quad \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}p\end{cases}$，

所以$p\quad t\quad \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}p<2p$．

又因为$g\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}p\right)=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}p>\dfrac{p}{2}=g(0)$，由$g(x)$的单调性可得，

当$0\quad x\quad \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}p$时，$g(x)$的取值范围为$\left[0,\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}p\right]$，

显然$\left[0,\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}p\right]\subseteq\left[0,\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}p\right]$，

所以函数$g(x)$是$\left\{x|0\quad x\quad \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}p\right\}$上的“可控函数”．

所以t的最大值为$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}p$，得$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}p=\sqrt{2}+1$，则$p=\sqrt{2}$．

所以函数$g(x)$的解析式为$g(x)=\dfrac{x^2-2\sqrt{2}x+2}{2\sqrt{2}-x}$

高考直通车

（2）（ii）先证明$S_n<(\sqrt{2}+1)n$．

由（i）可知函数$g(x)$是$\{x|0\le x\le\sqrt{2}+1\}$上的“可控函数”．由“可控函数”性质可知函数$g^i(x)$也是$\{x|0\le x\le\sqrt{2}+1\}$上的“可控函数”．

所以$g^i(x)\in\left[0,\sqrt{2}+1\right],i=1,2,3,\cdots,n$．

因为$a_i=g(a_{i-1})=g(g(a_{i-2}))=\cdots=\underbrace{g\left(g\left(\cdots g\left(g\left(g(a_1)\right)\right)\cdots\right)\right)}_{i-1个g}=g^{i-1}(a_1),i=2,3,\cdots,n$，

且$a_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in[0,\sqrt{2}+1]$，所以$a_i\in\left[0,\sqrt{2}+1\right],i=2,3,\cdots,n$，

所以$S_n=a_1+(a_2+a_3+\cdots+a_n)\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\left(\sqrt{2}+1\right)(n-1)<\left(\sqrt{2}+1\right)n$．

再证$S_n>(\sqrt{2}-1)n$．

由（i）可得$g(x)$在区间$[0,\sqrt{2})$上单调递减，且$g\left(\sqrt{2}-1\right)=\sqrt{2}-1$，

所以若$a_n>\sqrt{2}-1$，则$a_{n+1}=g(a_n)<g\left(\sqrt{2}-1\right)=\sqrt{2}-1$，

若$a_n<\sqrt{2}-1$，则$a_{n+1}=g(a_n)>g\left(\sqrt{2}-1\right)=\sqrt{2}-1$．

又因为$a_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}>\sqrt{2}-1$，所以$k\in\mathbf{N}^*$时，

$a_1,a_3,a_5,\cdots,a_{2k-1}$均大于$\sqrt{2}-1$，$a_2,a_4,a_6,\cdots,a_{2k}$均小于$\sqrt{2}-1$．

因为$a_{i+1}=g(a_i)=\dfrac{a_i^2-2\sqrt{2}a_i+2}{2\sqrt{2}-a_i}=-a_i+\dfrac{2}{2\sqrt{2}-a_i}$．

所以当i为奇数时，$a_i+a_{i+1}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}-a_i}>\dfrac{2}{2\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}=2(\sqrt{2}-1)$．

若$n=2k$，可得

$S_n=(a_1+a_2)+\cdots+(a_{2k-1}+a_{2k})>2k(\sqrt{2}-1)=n(\sqrt{2}-1)$．

若$n=2k-1$，可得

$S_n=(a_1+a_2)+\cdots+(a_{2k-3}+a_{2k-2})+a_{2k-1}>2(k-1)(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}-1$

$=(2k-1)(\sqrt{2}-1)=n(\sqrt{2}-1)$，

所以对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>n(\sqrt{2}-1)$．

综上所述$(\sqrt{2}-1)n<S_n<(\sqrt{2}+1)n$．

高考直通车