龙岩市2026年高中毕业班三月教学质量检测

数 学 试 题

(满分：150分 考试时间:120分钟)

注意事项：

1.考生将自己的姓名、准考证号及所有的答案均填写在答题卡上.

2.答题要求见答题卡上的“填涂样例”和“注意事项”

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.若集合 $A=\left\{y\middle|y=x^2\right\}$，$B=\left\{x\middle|2^x\le 8\right\}$，则 $A\cap B=$

A. $[0,3]$　　B. $(3,+\infty)$　　C. $(0,3]$　　D. $(-\infty,3]$

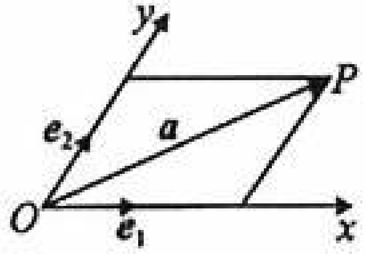
2. 已知复数 $z=2(\cos\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})$，则z的模为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

3. 设 $(x+1)^5=a_0+a_1x+\cdots+a_5x^5$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=$

A. 1　　B. 2　　C. 31　　D. 32

4.如图，设 Ox，Oy是平面内相交成60°角的两条数轴，e_1，e_2分别是与x轴，y轴正方向同向的单位向量.若向量 $\overrightarrow{OP}=xe_1+ye_2$，则有序实数对(x，y)叫做向量 $\overrightarrow{OP}$ 在坐标系xOy中的坐标.若在该坐标系xOy中，$\overrightarrow{OA}=(2,1)$，$\overrightarrow{OB}=(-4,5)$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$



A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

5.某云计算平台处理文件量N(单位：GB)的所需时间T=k $\log_3 N$（单位：min)，其中k为常数.已知处理文件量从9GB 增加到729GB时，处理时间增加12min；当处理文件量从729GB增加到6561GB时，处理时间增加

A. 3min　　B. 6min　　C. 9min　　D. 24min

6. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，且在区间 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上单调递减，则ω的值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C $\frac{7}{6}$　　D. 4

7. 已知线段 AB是圆 $O:x^2+y^2=5$ 的一条动弦，且|AB|=2.若点P为直线 $\sqrt{3}x+y+10=0$上的任意一点，则$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$的最小值为

A. 6　　B. 8　　C. 14　　D. 35

8. 已知定义在R上的函数f(x)满足f(2+x)=f(2-x)，且f(x+1)=-f(x)，则

A. f(x)是偶函数　　B. f(x)的最小正周期是2

C. f(x)关于点(2,0)中心对称　　D. f(x+3)是奇函数

二、多项选择题：本大题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 已知数列{an}的前n项和为 Sn.且 $S_n=n^2+n$，则

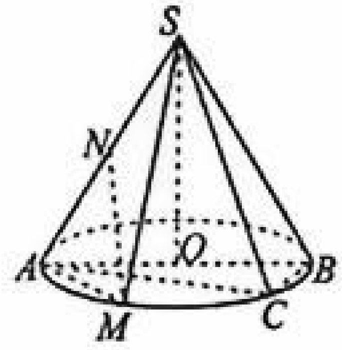
A.数列{an}是等差数列

B.数列$\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$不是单调数列

C.数列{an}中存在不同的两项，使a_3是这两项的等比中项

D.记数列$b_n=a_n\cdot\cos(\frac{\pi}{2}\cdot a_n)$，则数列{bn}的前2026项的和为4052

10.如图，AB为圆锥SO的底面圆的直径，N为母线SA的中点，点C，M为底面圆周上异于A，B的两个动点，且SA=AB=2，则



A. 一定存在点M，使AM⊥平面SBC

B. 不可能存在点M，使MN∥SC

C.过点 N且与母线SA垂直的平面截圆锥所得的截线上任意两点间距离的最大值为$\sqrt{3}$

D. 过点 N与底面垂直的平面截圆锥所得截线的离心率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

11.设抛物线$C:x^2=4y$的焦点为F，准线为m，过点F的直线l与C交于A，B两点(点A在第一象限)，过A作C的切线交y轴于点Q，交m于点G，过A作直线AP⊥m，垂足为P，则

A. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AP}=\left|\overrightarrow{AF}\right|^2$

B. 若l的倾斜角为$\pi/4$，则|AB|=6

C. 四边形AFQP为菱形

D. 四边形AFGP的面积的最小值为$\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$

三、填空题：本大题共3小题，每小题5分，共15分.

12.已知从小到大排列的一组数据1，2，4，x，8，10，若这组数据的第60百分位数与平均数相等，则实数x的值为________.

13. 已知a∈R，对任意t∈R，关于x的方程$x^2-ae^tx+t=0$有实数解，则a^2的最小值为________.

14 某商场组织抽奖活动，在一个不透明的箱子中装有1个红球、1个白球、1个黑球，共3个形状、大小完全相同的小球.活动规则为：每人有放回地先后两次摸球(每次至少摸1个)，摸到红球或白球各计1分，摸到黑球计3分.若两次摸到的小球记录的总得分为5分，则获得一等奖，那么获一等奖的概率为________

四、解答题：本大题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13分）

某会员店的本地会员占$\dfrac{3}{5}$，外地会员占$\dfrac{2}{5}$.现开展商品质量满意度调查，已知本地会员对该店商品质量满意的概率为$\dfrac{2}{3}$，外地会员对该店商品质量满意的概率为$\dfrac{3}{4}$，每个会员对该店商品质量满意与否相互独立.

(1)从该店所有会员中随机抽取1名会员，求其对该店商品质量满意的概率；

(2)从该店所有会员中随机抽取2名会员(其中会员总数远大于2)，记这2名会员中对该店商品质量满意的人数为X，求X的分布列与数学期望.

16. （15分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\sin^2 x+\dfrac{1}{2}$.

(1)求f(x)的单调递增区间；

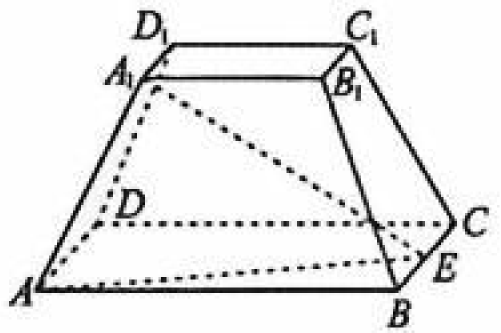
(2)在△ABC中，$f(A)=\dfrac{1}{2}$，$\sin B=2\sin C$，ΔABC的面积为$\sqrt{3}$，求边BC的长.

17. （15分）

如图，在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2A_1B_1=2\sqrt{2}$，E是BC的中点，其外接球的表面积为16π.

(1)求证：A_1E // 平面CC_1D_1D;

(2)若平面AA_1E与B_1C_1交于点F，求直线EF与平面CC_1D_1D所成角的正弦值.



18.（17分）

已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为A，上顶点为B，长轴长为4，且以短轴为直径的圆与直线$y=x+\sqrt{2}$相切.

(1)求E的方程；

(2)过点 P(-2,1)的直线l交E于C，D两点，直线BC，BD分别交x轴于M，N两点，证明：

(i)M，A，N的横坐标成等差数列；

(ii)△ABD与△BMD的面积之比为定值.

19.（17分）

已知函数$f(x)=x^2+b\ln x$.

(1)求f(x)的单调区间；

(2)已知A，B，C为f(x)图象上不同的三点，它们的横坐标分别为x_1,x_2,x_3，且满足$x_1+x_3=2x_2$，记f(x)在点B处的切线斜率为k_B，直线AC的斜率为k_{AC}，证明：当b>0时，$k_B<k_{AC}$；

(3)当b=1时，数列{an}满足$a_{n+1}=f(a_n)-a_n^2+\dfrac{1}{2a_n}+1$，且$a_1=\dfrac{5}{2}$，$S_n$为数列{an}的前n项和，证明：$S_n<2n+1$.

龙岩市2026年高中毕业班三月教学质量检测数学试题参考答案

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
选项	A	D	C	D	B	B	A	A

二、多项选择题：本大题共3小题，每小题6分，共18分．

题号	9	10	11
选项	AC	BCD	ACD

三、填空题：本大题共3小题，每小题5分，共15分．

12、5　　13、$\dfrac{2}{e}$　　14、$\dfrac{10}{49}$

8、解析：由 $f(x+1)=-f(x)$，得 $f(x+2)=-f(x+1)=f(x)$，周期为2

（但最小正周期不能判定，例如常函数的最小正周期不为2），B错误；

由于周期为2，所以 $f(2+x)=f(x)$，$f(2-x)=f(2+(-x))=f(-x)$，

又 $f(2+x)=f(2-x)$，得 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，A正确；

由 $f(2+x)=f(2-x)$ 只能推出对称轴为 $x=2$，无中心对称的推导依据，C错误；

令 $g(x)=f(x+3)$，由 $f(x)$ 是偶函数且 $T=2$，

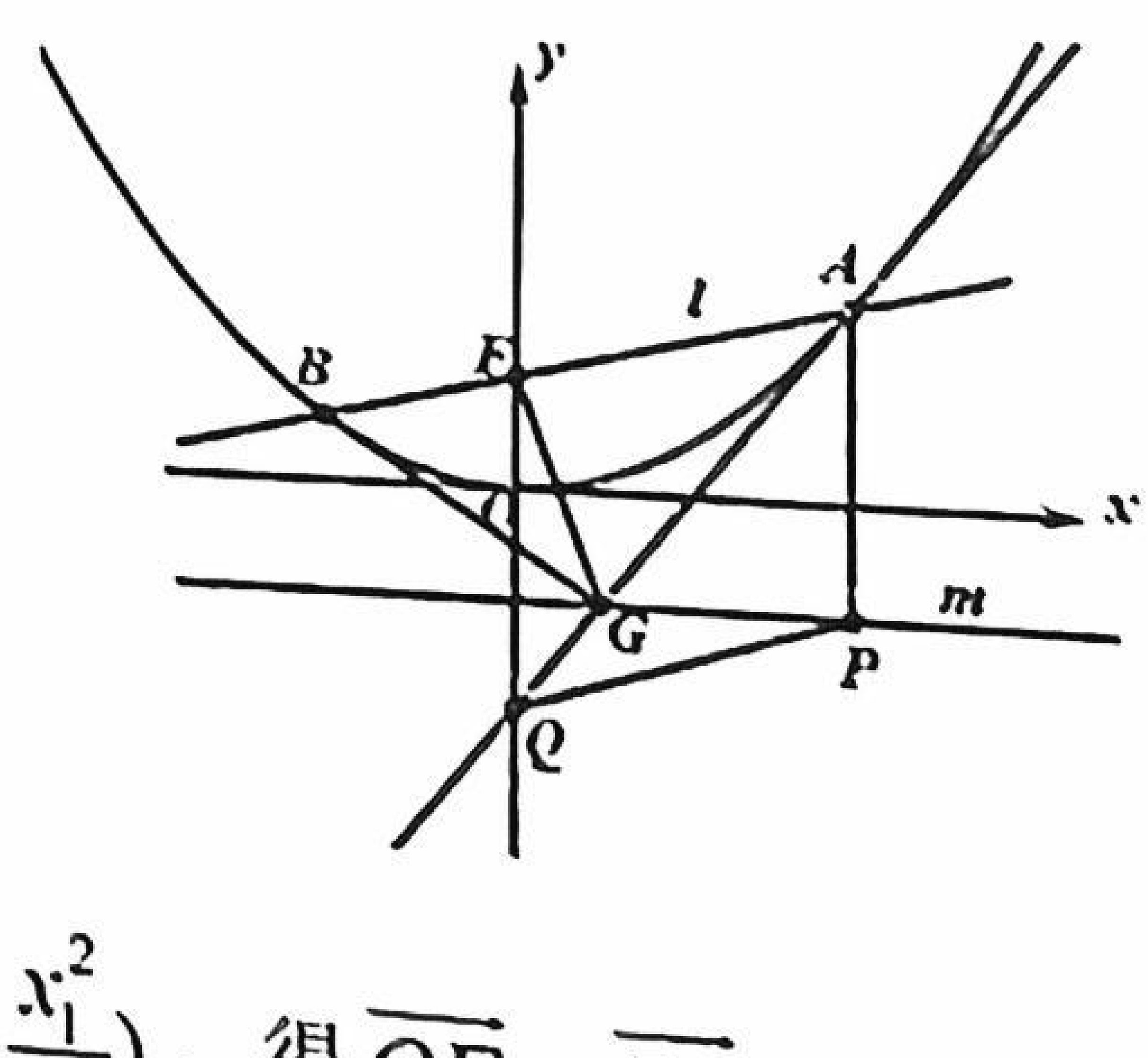
$g(-x)=f(-x+3)=f(x-3)=f(x+1)\neq -g(x)$，D错误

11．解析：对于A：$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AG}|\cdot|\overrightarrow{AP}|\cdot\cos\angle GAP=|\overrightarrow{AP}|^2=|\overrightarrow{AF}|^2$，A正确．

对于B：若 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$，则 l 的方程为 $y=x+1$，

联立 $\begin{cases}y=x+1\\x^2=4y\end{cases}$，$x^2-4x-4=0$

所以 $|AB|=y_A+y_B+2=x_A+x_B+4=4+4=8$，B错误．



对于C：由已知得 $F(0,1)$，$m: y=-1$，

设 $A(x_1,\dfrac{x_1^2}{4})$，$B(x_2,\dfrac{x_2^2}{4})$，则 $P(x_1,-1)$．

由 $C: y=\dfrac{1}{4}x^2$，得 $y'=\dfrac{1}{2}x$，

故 C 在 A 处切线方程为：$y-\dfrac{x_1^2}{4}=\dfrac{1}{2}x_1(x-x_1)$，

得 $Q(0,-\dfrac{x_1^2}{4})$，所以 $\overrightarrow{QF}=(0,1+\dfrac{x_1^2}{4})$，$\overrightarrow{PA}=(0,1+\dfrac{x_1^2}{4})$，得 $\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{PA}$，

又 $|\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{PA}|$，所以四边形 $AFQP$ 为菱形．C正确．

D：由选项C知 $\Delta AFG\cong\Delta APG$，

所以$S_{AFGP}=2S_{\Delta APG}=|AP||PG|=\left|1+\frac{x_1^2}{4}\right|\left|x_1-\frac{x_1^2-4}{2x_1}\right|=\frac{(4+x_1^2)^2}{8x_1}$，

设$f(x)=\frac{(x^2+4)^2}{8x}$，

则$f'(x)=\frac{2(x^2+4)\cdot 2x^2-(x^2+4)^2}{8x^2}=\frac{(x^2+4)(3x^2-4)}{8x^2}(x>0)$，

$f'(x)<0\Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}}<x<\frac{2}{\sqrt{3}}, f'(x)>0\Rightarrow x<-\frac{2}{\sqrt{3}}$或$x>\frac{2}{\sqrt{3}}$，

所以$f(x)$在$(0,\frac{2}{\sqrt{3}})$上单调递减，在$(\frac{2}{\sqrt{3}},+\infty)$上单调递增，

则当$x=\frac{2}{\sqrt{3}}$时，$f(x)$取得最小值为$\frac{16\sqrt{3}}{9}$，D 正确.

14．解析：

每次摸球的情况有$C_3^1+C_3^2+C_3^3=7$种.　　　先后两次摸球共有$7\times7=49$种情况.

两次得分5分的情况有：

第一次1分，第二次4分，共有$C_2^1\cdot C_2^1=4$种，

第一次2分，第二次3分，共有1种；

第一次4分，第二次1分，共有4种；

第一次3分，第二次2分，共有1种；

所以$P=\frac{10}{49}$.

四、解答题：本大题共5小题，共77分.

15.（13分）

解：（1）设事件A:抽取的是本地会员，$P(A)=\frac{3}{5}$，

事件$\overline{A}$:抽取的是外地会员，$P(\overline{A})=\frac{2}{5}$，

事件B:会员对商品质量满意，$P(B|A)=\frac{2}{3}$, $P(B|\overline{A})=\frac{3}{4}$，

所以$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{7}{10}$.

……………………………………………………………5分

（2）由题可知，单次抽取会员满意的概率$p=\frac{7}{10}$，不满意的概率为$1-p=\frac{3}{10}$，

……………………………………6分

X的所有可能取值为$0,1,2$　……………………………………7分

则 $X \sim B(2,\frac{7}{10})$，

$P(X=0)=\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{9}{100}$，……………………………………………8 分

$P(X=1)=C_2^1\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{21}{50}$，……………………………………………9 分

$P(X=2)=\left(\frac{7}{10}\right)^2=\frac{49}{100}$，……………………………………………10 分

X	0	1	2
p	$\frac{9}{100}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{49}{100}$

……………………………………11 分

所以 $E(X)=0\times\frac{9}{100}+1\times\frac{21}{50}+2\times\frac{49}{100}=\frac{7}{5}$ （或 $E(X)=np=2\times\frac{7}{10}=\frac{7}{5}$ ）

……………………………………………13 分

16.（15 分）解：（1）$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{1}{2}\cos2x=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

……………………………………………3 分

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

得 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$．………6 分

（2）因为 $f(A)=\sin(2A+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，

又 A 为 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $2A+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$．…………8 分

设角 A,B,C 所对边分别为 a，b，c，

因为 $\sin B=2\sin C$，由正弦定理得 $b=2c$．①……………………………9 分

因为三角形的面积为 $\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$．②……………………11 分

由①②得：$\begin{cases}b=2\sqrt{2}\\c=\sqrt{2}\end{cases}$，……………………………………………13 分

由余弦定理得 $BC^2=b^2+c^2-2bc\cos A=6$，所以 $BC=\sqrt{6}$．….15 分

17.（15分）

解：法一：（1）在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2A_1B_1$，E 是 BC 的中点，

则 $A_1D_1 // AD // EC$，且 $A_1D_1=EC=\frac{1}{2}AD$，

所以四边形 A_1D_1CE 是平行四边形.

$\therefore A_1E // D_1C$，又 $A_1E \not\subset$ 平面CC_1D_1D，$D_1C \subset$ 平面CC_1D_1D，……………………2分

$\therefore A_1E //$ 平面CC_1D_1D ……………………………………………………5分

（2）延长 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 交于 P，连接 PE 交 B_1C_1 于 F.

由正四棱锥性质，可知直线 EF 即为直线 EP，

连接 AC 交 BD 于 O，

连接 A_1C_1 交 B_1D_1 于 O_1，

因为 $AB=2A_1B_1=2\sqrt{2}$，

所以 $OA=2, O_1A_1=1$.

由外接球的表面积为16π，

得其半径 $R=2$. ……………………………………………………6分

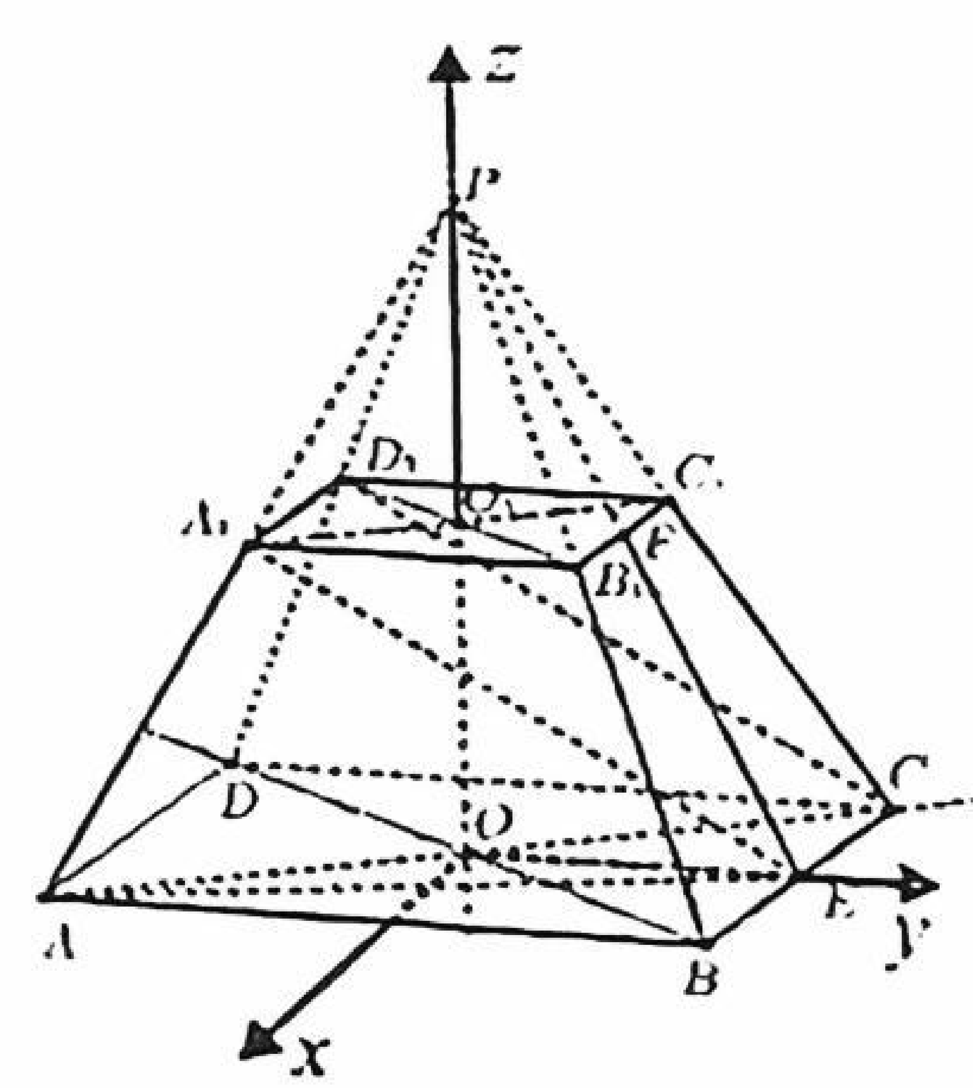
设棱台的高为 $h=OO_1$，球心在直线 OO_1 上.

记球心到点 O 的距离为 d，则球心到点 O_1 的距离为 $|h-d|$.

根据下底面顶点 A 和上底面顶点 A_1 到球心的距离均为 $R=2$，

得到方程组：$\begin{cases} OA^2+d^2=R^2, \\ O_1A_1^2+(h-d)^2=R^2. \end{cases}$

代入 $OA=2$，$O_1A_1=1$，$R=2$，得：$\begin{cases} 4+d^2=4, \\ 1+(h-d)^2=4. \end{cases}$



解得 $d=0, h=\sqrt{3}$. ……………………………8分

因此球心与点 O 重合，棱台高 $OO_1=\sqrt{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\Delta A_1O_1O$ 中，$OO_1=\sqrt{3}$.

由棱锥相似关系可得 $OP=2\sqrt{3}$.

以 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OP}$ 为 y 轴，z 轴的正方向，

建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.

则 $C(-\sqrt{2},\sqrt{2},0), D(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0), E(0,\sqrt{2},0), P(0,0,2\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{EP}=(0,-\sqrt{2},2\sqrt{3}), \overrightarrow{DC}=(0,2\sqrt{2},0), \overrightarrow{CP}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},2\sqrt{3})$.

设平面 CC_1D_1D 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=2\sqrt{2}y=0 \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2\sqrt{3}z=0 \end{cases}$，取 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{6},0,1)$. ……………………11分

设直线 EF 与平面 CC_1D_1D 所成角为 θ.

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{EP},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EP}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{EP}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{6}}{7}$，……………………14分

所以直线 EF 与平面 CC_1D_1D 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{7}$. ……………………15分

法二：（1）连结 AC 交 BD 于 O，连结 A_1C_1 交 B_1D_1 于 O_1，以 O 原点，OA, OB, OO_1

分别为x,y,z轴建立如图空间直角坐标系.

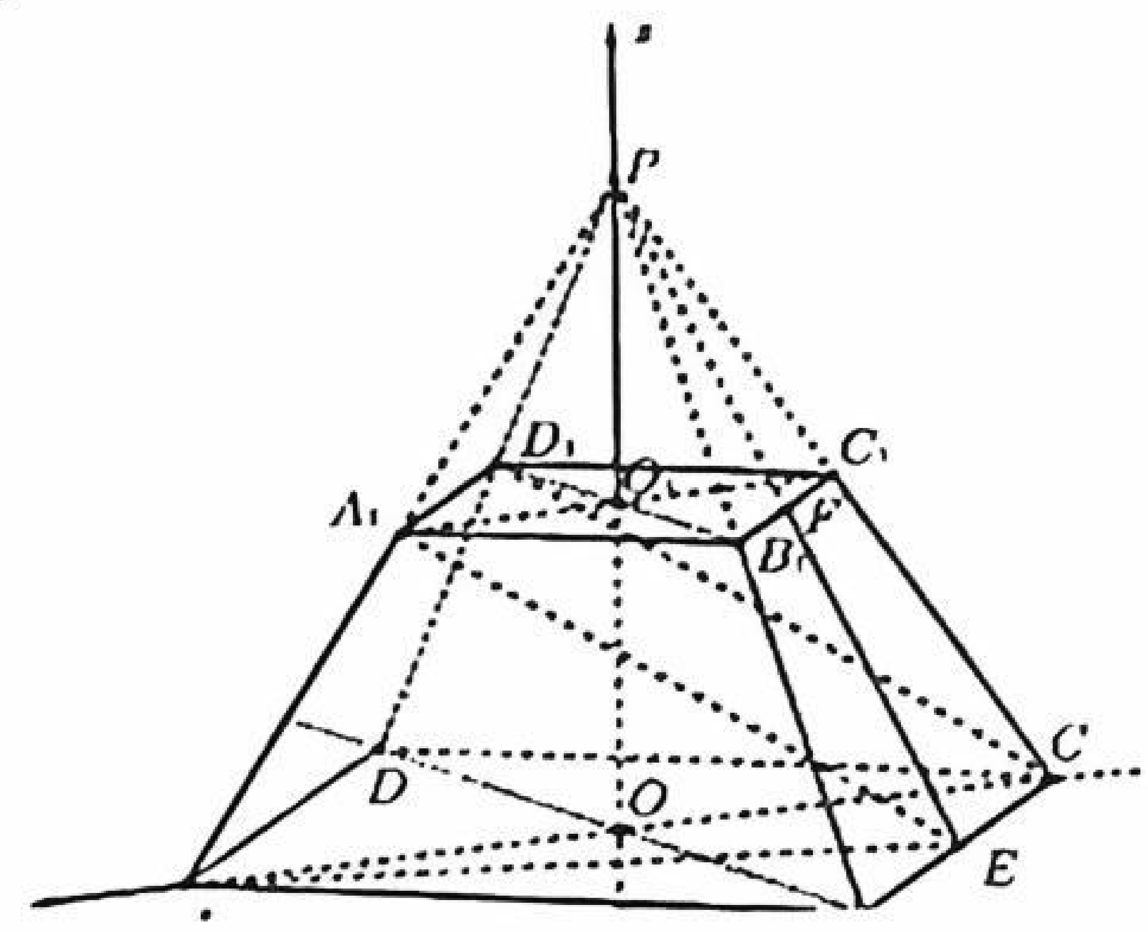
$\because AB=2A_1B_1=2\sqrt{2}$,

$\therefore OA=2, O_1A_1=1$，由正四棱台外接球的表面积为$16\pi$得其半径为2 ……………………………………1分

即O为正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$外接球的球心.

$\therefore OA_1=2$，在$Rt\Delta A_1O_1O$中，$OO_1=\sqrt{OA_1^{\ 2}-A_1O_1^{\ 2}}=\sqrt{3}$， ……………………3分

则$A(2,0,0)$，$A_1(1,0,\sqrt{3})$，$B(0,2,0)$，$C(-2,0,0)$，$C_1(-1,0,\sqrt{3})$，$D(0,-2,0)$，$E(-1,1,0)$，



$\therefore \overrightarrow{A_1E}=(-2,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CC_1}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD}=(2,-2,0)$

设平面CC_1D_1D的法向量$\boldsymbol{n}=(x_0,y_0,z_0)$

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=x_0+\sqrt{3}z_0=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=2x_0-2y_0=0\end{cases}$，取$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$

$\because \overrightarrow{A_1E}\cdot\boldsymbol{n}=-2\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$，

又$A_1E\not\subset$平面CC_1D_1D，

$\therefore A_1E$ // 平面CC_1D_1D ……………………………5分

（2）设$\overrightarrow{B_1F}=\lambda\overrightarrow{B_1C_1}(0\le\lambda\le1)$，则$F(-\lambda,1-\lambda,\sqrt{3})$

$\therefore \overrightarrow{AF}=(-\lambda-2,1-\lambda,\sqrt{3})$，又$\overrightarrow{AA_1}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AE}=(-3,1,0)$

设平面AA_1E的法向量$\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AA_1}=-x_0+\sqrt{3}z_0=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=-3x_0+y_0=0\end{cases}$，取$\boldsymbol{n}_1=(3,9,\sqrt{3})$

则由$\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}=-12\lambda+6=0$得$\lambda=\dfrac{1}{2}$，即$F(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\sqrt{3})$， ……………………………10分

（未证明直接猜F是B_1C_1的中点，直接扣2分）

$\therefore \overrightarrow{EF}=(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\sqrt{3})$，设直线$EF$与平面$CC_1D_1D$所成角为$\theta$，由(1)得平面$CC_1D_1D$的法向量$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$，则$\sin\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{EF}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\dfrac{7}{2}}\cdot\sqrt{7}}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{7}$，

所以直线EF与平面CC_1D_1D所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{7}$. ……………………15分

法三：（1）同法二

（2）延长AA_1,BB_1,CC_1,DD_1交于点P，连结PE交B_1C_1于H，

$\because P\in AA_1$，而$AA_1\subset$平面AA_1E，$\therefore P\in$平面AA_1E

$\because E\in$平面AA_1E，

$\therefore PE\subset$平面AA_1E，则点H即为平面AA_1E与B_1C_1的交点F.

$\because BC=2B_1C_1$，$\therefore F$是B_1C_1的中点．$\therefore F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3})$ ………………………… 10 分

（未证明直接猜 F是B_1C_1的中点，直接扣 2 分）

$\therefore \overrightarrow{EF}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{3})$，设直线 EF 与平面 CC_1D_1D 所成角为 θ，

由（1）得平面 CC_1D_1D 的法向量 $n=(\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$，

则 $\sin\theta=\left|\frac{\overrightarrow{EF}\cdot n}{|\overrightarrow{EF}||n|}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{7}{2}}\cdot\sqrt{7}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{7}$，

所以直线 EF 与平面 CC_1D_1D 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{7}$． ………………………15 分

18．（17 分）

解:（1）由已知得，$2a=4$，$a=2$，

原点 O 到直线 $y=x+\sqrt{2}$ 的距离为 $b=\frac{|0-0+\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=1$，

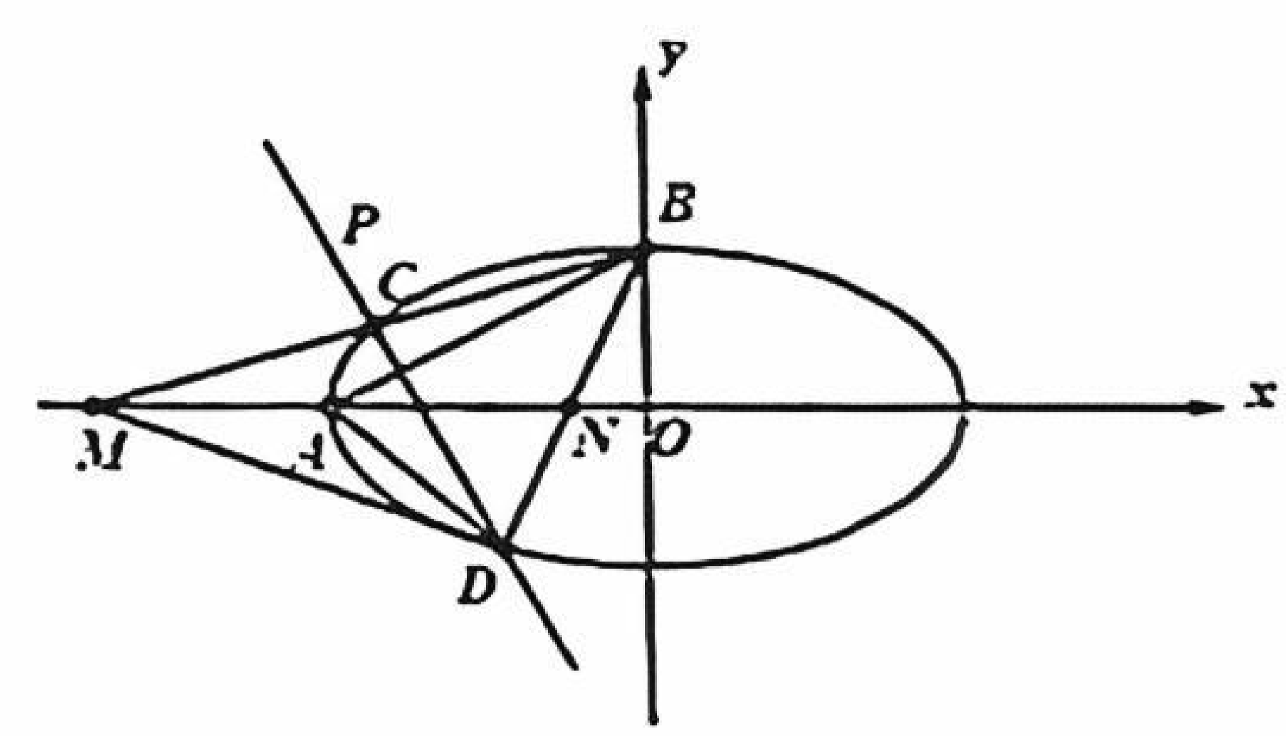
所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ……………………………………………………………4 分

（2）（i）当过点 $P(-2,1)$ 的直线斜率不存在时，

直线与椭圆 E 只有 1 个交点，舍去，

设直线 l 的方程为 $y-1=k(x+2)$，

设 $C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，



由 $\begin{cases} y-1=k(x+2) \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，

消去 y 整理得 $(1+4k^2)x^2+(16k^2+8k)x+16k^2+16k=0$，

所以 $\Delta=(16k^2+8k)^2-4(1+4k^2)(16k^2+16k)>0$，解得 $k<0$，

$x_1+x_2=-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2},x_1x_2=\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}$， ……………………………… 8 分

直线 BC 的方程为 $y-1=\frac{y_1-1}{x_1}x$，令 $y=0$，得 $x_M=\frac{x_1}{1-y_1}=\frac{x_1}{-k(x_1+2)}$，

同理可得 $x_N=\frac{x_2}{1-y_2}=\frac{x_2}{-k(x_2+2)}$ …………………………………………9 分

$$x_M+x_N=\frac{x_1}{-k(x_1+2)}+\frac{x_2}{-k(x_2+2)}$$

$$=\frac{x_1(x_2+2)+x_2(x_1+2)}{-k(x_1+2)(x_2+2)}=\frac{2x_1x_2+2(x_1+x_2)}{-k\left[x_1x_2+2(x_1+x_2)+4\right]}$$ ……………………10 分

又因为 $2x_1x_2+2(x_1+x_2)=2\cdot\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}+2\left(-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}\right)=\frac{16k}{1+4k^2}$

$x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}+2\left(-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}\right)+4=\frac{4}{1+4k^2}$

所以 $x_M+x_N=\frac{16k}{-4k}=-4=2x_A$

所以 M、A、N 的横坐标成等差数列；…………………………………………… 12 分

（ii）由（i）知 A 为 M,N 的中点，得 $|MN|=2|AN|$

所以 $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta BMD}}=\frac{\frac{1}{2}|AN|\cdot|1-y_2|}{\frac{1}{2}|MN|\cdot|1-y_2|}=\frac{|AN|}{|MN|}=\frac{1}{2}$

所以 ΔABD 与 ΔBMD 的面积之比为 $\frac{1}{2}$.……………17 分

19.（17 分）

解：(1) 函数 $f(x)=x^2+b\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2x+\frac{b}{x}$，……………1 分

当 $b\geq 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $b<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{\sqrt{-2b}}{2}$，

当 $0<x<\frac{\sqrt{-2b}}{2}$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{-2b}}{2})$ 上单调递减，

当 $x>\frac{\sqrt{-2b}}{2}$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{-2b}}{2},+\infty)$ 上单调递增.

综上所述：当 $b\geq 0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $(0,+\infty)$；

当 $b<0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调减区间是 $(0,\frac{\sqrt{-2b}}{2})$，单调增区间是 $(\frac{\sqrt{-2b}}{2},+\infty)$；

……………………………………………………………………………………………4 分

(2) 由 $f(x)=x^2+b\ln x$ 得 $f'(x)=2x+\frac{b}{x}$，因为 $x_1+x_3=2x_2$，

$$k_{AC}=\frac{b\ln\frac{x_3}{x_1}+(x_3^2-x_1^2)}{x_3-x_1}=\frac{b\ln\frac{x_3}{x_1}}{x_3-x_1}+2x_2,\quad k_B=2x_2+\frac{b}{x_2},$$

所以$k_{AC}-k_B=\dfrac{b\ln\frac{x_3}{x_1}}{x_3-x_1}+2x_2-\dfrac{b}{x_2}-2x_2=b(\dfrac{\ln\frac{x_3}{x_1}}{x_3-x_1}-\dfrac{1}{x_2})=b(\dfrac{\ln\frac{x_3}{x_1}}{x_3-x_1}-\dfrac{2}{x_3+x_1})$

$=\dfrac{b}{x_3-x_1}(\ln\dfrac{x_3}{x_1}-\dfrac{2(x_3-x_1)}{x_3+x_1})=\dfrac{b}{x_3-x_1}(\ln\dfrac{x_3}{x_1}-\dfrac{2(\frac{x_3}{x_1}-1)}{\frac{x_3}{x_1}+1})$. ………………………… 8 分

不妨设$0<x_1<x_3$，令$t=\dfrac{x_3}{x_1}$，则$t>1$，令$g(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，

所以$g'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

所以$g(t)$在$(1,+\infty)$内单调递增，$g(t)>g(1)=0$，即$\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}>0$，

因为$b>0$，$x_3-x_1>0$，所以$k_{AC}-k_B>0$，所以$k_B<k_{AC}$. ……………… 10 分

（3）当$b=1$时，$f(x)=x^2+\ln x$，$a_{n+1}=a_n^2+\ln a_n-a_n^2+\dfrac{1}{2a_n}+1=\ln a_n+\dfrac{1}{2a_n}+1$，

设$g(x)=\ln x+\dfrac{1}{2x}+1$，$g'(x)=\dfrac{2x-1}{2x^2}$，

当$x>1$时，$g'(x)>0$，则$g(x)$在$(1,+\infty)$内单调递增，

所以$g(x)>g(1)=\dfrac{3}{2}$，所以$a_n>\dfrac{3}{2},a_1=\dfrac{5}{2}>\dfrac{3}{2}$符合题意. …………… 11 分

构造函数$h(x)=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-\ln x,(x>1)$，求导得$h'(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(x-1)^2}{2x^2}>0$，

所以$h(x)$在$(1,+\infty)$内单调递增，则$h(x)>h(1)=0$，

所以当$x>1$时，$\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)>\ln x$. ………………………………………………… 13 分

所以$\ln a_n<\dfrac{1}{2}a_n-\dfrac{1}{2a_n}$，即$a_{n+1}=\ln a_n+\dfrac{1}{2a_n}+1<\dfrac{1}{2}a_n-\dfrac{1}{2a_n}+\dfrac{1}{2a_n}+1=\dfrac{1}{2}a_n+1$，

所以$2a_{n+1}<a_n+2$，即$2(a_{n+1}-2)<a_n-2$，得$a_{n+1}-2<\dfrac{1}{2}(a_n-2)$

所以$a_n-2<\dfrac{1}{2}(a_{n-1}-2)<\dfrac{1}{2^2}(a_{n-2}-2)<\cdots<\dfrac{1}{2^{n-1}}(a_1-2)=\dfrac{1}{2^n}$

即$a_n<\dfrac{1}{2^n}+2$，…………………………………………………………………………… 15 分

所以$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+2n=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}+2n=1-\dfrac{1}{2^n}+2n<2n+1$

………………………………………………………………………………………… 17 分