一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 样本数据 5，8，8，9，9，9 的众数为

A. 4　　　　B. 8　　　　C. 8.5　　　　D. 9

2. 已知复数 $z=a+bi(a, b\in \mathbf{R}, b<0)$ 的共轭复数为 $\bar{z}$，若 $z+\bar{z}=z\cdot\bar{z}=2$，则 $z=$

A. $-1-i$　　　　B. $1-i$　　　　C. $-1-\sqrt{2}i$　　　　D. $1-\sqrt{2}i$

3. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，且 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量为

A. $\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$　　　　B. $\boldsymbol{a}$　　　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{a}$　　　　D. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$

4. 为了测量某古塔的高度，设点 A 为塔顶，点 B 为 A 在地平面上的射影，小张遥控无人机（将无人机视为质点）从地平面上 C 处竖直向上飞行 6 米后到达 D 处，在 D 处测得塔顶 A 的仰角为 $60°$，然后继续竖直向上飞行 10 米后到达 E 处，在 E 处测得塔顶 A 的仰角为 $30°$，则该古塔的高度为

A. 21 米　　　　B. $(16+5\sqrt{2})$ 米

C. $(16+5\sqrt{3})$ 米　　　　D. $16\sqrt{3}$ 米

5. 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n=n$，$b_n=n^3$，在 $\{a_n\}$ 中去掉 $\{b_n\}$ 中含有的项得到新数列 $\{c_n\}$，则 $\{c_n\}$ 的前 30 项的和为

A. 407　　　　B. 429　　　　C. 465　　　　D. 525

6. 甲、乙、丙三人到三个景点旅游，每人只去一个景点，且三人的选择相互独立．设事件 A ＝“三个人去的景点各不相同”，事件 B ＝“甲去了第 1 个景点”，事件 C ＝“乙去了第 1 个景点”，则下列说法错误的是

A. B 与 C 互斥　　　　B. A 与 B 相互独立

C. $P(A)=\frac{2}{9}$　　　　D. $P(A|C)=\frac{2}{9}$

7. 已知 $f(x)=\frac{-2^x+b}{2^{x+1}+a}$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，则不等式 $f(x^2)+f(x-a)>0$ 的解集是

A. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　　　　B. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

C. $(-2,1)$　　　　D. $(-1,2)$

8. 已知 F_1，F_2 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，P 为 C 上一点，R，r 分别为 $\triangle PF_1F_2$ 的外接圆半径和内切圆半径，且 $6Rr=a^2$，则 C 的离心率取值范围为

A. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$　　C. $\left[\frac{1}{2},1\right)$　　D. $\left[\frac{2}{3},1\right)$

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 若函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 在 $(a,a+b)$ 上单调递增，则

A. 曲线 $y=f(x)$ 关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称　　B. b 的最大值为 π

C. $f(a)$ 的最小值为 -2　　D. $f(a)$ 的最大值为 2

10. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，M、N 分别是 AD、CC_1 的中点，P 是线段 AB 上的动点，则下列说法正确的是

A. 平面 PMN 截正方体所得的截面可能是五边形

B. $\triangle MPN$ 可能是钝角三角形

C. $PM+PN$ 的最小值大于 $2\sqrt{14}$

D. $PM+PN$ 的最小值小于 $\sqrt{57}$

11. 已知曲线 $y=e^x$ 在 $x=n+1(n\in\mathbf{N}^*)$ 处的切线与 x 轴、y 轴分别交于点 P_n、Q_n，记 $|OP_n|=a_n$，$|OQ_n|=b_n$，其中 O 为坐标原点，则下列结论正确的是

A. $b_n=a_ne^{n+1}$　　　　B. $b_n>3a_n^2$

C. $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}<\frac{1}{4}$　　　　D. 若 $\lambda b_n>e^{n+1}+\ln(\lambda a_n)+1\left(\lambda>\frac{1}{4}\right)$，则 $\lambda>$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. 已知圆台的上底面和下底面的半径分别为 1、2，母线长为 $\sqrt{10}$，则该圆台的体积为______．

13. 过 $P(-1,2)$ 作圆 $(x-1)^2+y^2=4$ 的两条切线，设切点分别为 A，B，则直线 AB 的方程为______

14. 已知 A_1，A_2 是集合 A 的非空子集，若 $A_1\cap A_2=\varnothing$，则称（A_1，A_2）是集合 A 的"互斥子集组"，并规定（A_1，A_2）与（A_2，A_1）为不同的"互斥子集组"．集合 $\{1,2,3,4\}$ 的不同"互斥子集组"的个数是______（用数字作答）

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. （13 分）

已知 F_1，F_2 分别为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，且 $|F_1F_2|=4$，点 $P\left(-2,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 在 C 上．

（1）求 C 的方程；

（2）若点 Q 在 C 上且在第一象限，$\triangle QF_1F_2$ 为直角三角形，求点 Q 的坐标．

16. （15 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $\frac{a}{c}=\frac{\cos C}{\cos A}$．

（1）判断 $\triangle ABC$ 的形状；

（2）若 $b=4$，$c=2$，BC，AC 边上的两条中线 AM，BN 相交于点 P，求 $\cos\angle MPN$．

17. （15 分）

某智慧园区需要对 3 台设备进行巡检，现有以下两个巡检方案．

方案一：采用智能机器人巡检，在第一轮巡检中，对 3 台设备逐一进行检测，若机器人成功检测 2 台或 3 台设备，则直接完成巡检，无需进行第二轮巡检；若机器人成功检测的设备少于 2 台，则进行第二轮巡检，第二轮巡检只需对第一轮未成功检测的设备再次逐一进行检测，无论第二轮检测结果如何都结束巡检．机器人每次成功检测每台设备的概率为 $p\left(\frac{1}{2}\le p<1\right)$，且每台设备检测互不影响，每次检测也互不影响，每台设备检测一次的费用为 18 元．

方案二：采用人工巡检，对 3 台设备逐一进行检测，仅需巡检一轮即可完成，每台设备检测一次的费用为 30 元．

（1）当 $p=\frac{2}{3}$ 时，求机器人无需对设备进行第二轮巡检的概率；

（2）记机器人巡检结束时对所有设备检测的总次数为 X，求 X 的数学期望（用 p 表示）；

（3）若以检测的平均总费用为决策依据，在方案一和方案二之中选其一，应选用哪个？

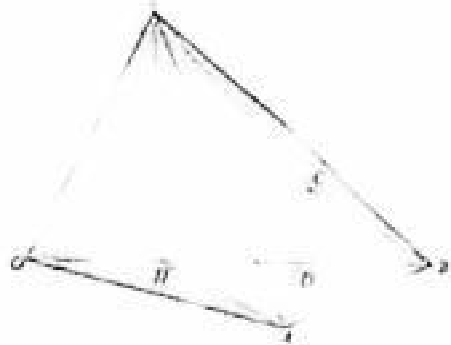
18.（17分）

如图，在四棱锥 $S-OABC$ 中，$OB\cap AC=D$，点 H 在线段 OD 上，$\angle SBO=30^\circ$，$SB=4$，$OH=HD=DB=\sqrt{3}$，平面 $SOB\perp$ 平面 $OABC$.

（1）证明：$SH\perp AC$；

（2）过点 D 作平面 α，使得 $\alpha//$平面 SAB，$\alpha\cap$平面 $SHB=l$，请作出直线 l，写出画法并证明；

（3）若 $\angle ASB=\angle CSB=60^\circ$，求当 AC 取最小值时，二面角 $A-SB-C$ 的正弦值.



19.（17分）

已知函数 $f(x)=e^x$，$g(x)=ax+b-1$，$u(x)=f(x)-g(x)$

（1）求函数 $u(x)$ 的单调区间；

（2）若 $u(x)\geq 0$，求 $a+b$ 的最大值；

（3）若函数 $h(x)=xf(x)-e(\ln x-1)-g^2(x)$ 有零点，

证明：$a^2+(b-1)^2\geq e$.

2026届高三毕业班教学质量检测

数学参考答案及评分细则

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题和填空题不给中间分．

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．D　2．B　3．A　4．A　5．D　6．A

7．C　8．C

二、多项选择题：本大题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求，全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9．ABC　10．ABC　11．ACD

三、填空题：本大题共3题，每小题5分，共15分．

12．7π　13．$x-y+1=0$　14．50

四、解答题：本大题共5小题，共77分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

15．解法一：（1）由题意，得 $\begin{cases} 2c=|F_1F_2|=4, \\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{6}{9b^2}=1, \\ c=\sqrt{a^2-b^2}, \\ a>b>0, \end{cases}$ ……3分

解得 $\begin{cases} a=\sqrt{6}, \\ b=\sqrt{2}, \\ c=2. \end{cases}$ ……5分

所以C的方程为$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$． ……6分

（2）设$Q(x_0,y_0)$，$x_0>0$，$y_0>0$，由题意，得$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$．

因为点Q在C上且在第一象限，$\triangle QF_1F_2$为直角三角形，

所以$\angle QF_2F_1=90^\circ$，或$\angle F_1QF_2=90^\circ$． ……7分

若$\angle QF_2F_1=90^\circ$，则$Q(2,\dfrac{\sqrt{6}}{3})$； ……8分

若$\angle F_1QF_2=90^\circ$，则$\overrightarrow{QF_1}\cdot\overrightarrow{QF_2}=(-2-x_0,-y_0)\cdot(2-x_0,-y_0)=x_0^2-4+y_0^2=0$，

……11分

又Q在C上，所以$\frac{x_0^2}{6}+\frac{y_0^2}{2}=1$．……12分

所以$\begin{cases}x_0=\sqrt{3},\\ y_0=1.\end{cases}$即$Q(\sqrt{3},1)$．

综上，点Q的坐标为$(2,\frac{\sqrt{6}}{3})$，或$(\sqrt{3},1)$．……13分

解法二：(1) 由题意，得椭圆C的左、右焦点分别为$F_1(-2,0),F_2(2,0)$，点$P(-2,\frac{\sqrt{6}}{3})$在C上，……1分

所以$c=2$，$2a=|PF_1|+|PF_2|=\frac{\sqrt{6}}{3}+\sqrt{16+\frac{6}{9}}=2\sqrt{6}$．……3分

所以$a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$．……5分

所以C的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$．……6分

(2) 因为点Q在C上且在第一象限，$\triangle QF_1F_2$为直角三角形，

所以$\angle QF_2F_1=90^\circ$，或$\angle F_1QF_2=90^\circ$……7分

若$\angle QF_2F_1=90^\circ$，则$Q(2,\frac{\sqrt{6}}{3})$；……8分

若$\angle F_1QF_2=90^\circ$，则$|QF_1|^2+|QF_2|^2=|F_1F_2|^2=16$．

因为$(|QF_1|+|QF_2|)^2=(2a)^2=24$，即$|QF_1|^2+2|QF_1|\cdot|QF_2|+|QF_2|^2=24$．

解得$|QF_1|\cdot|QF_2|=4$

设$Q(x_0,y_0)$，$x_0>0$，$y_0>0$．

所以$S_{\triangle F_1QF_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot y_0=\frac{1}{2}|QF_1|\cdot|QF_2|$，即$2y_0=2$，所以$y_0=1$……11分

又Q在C上，所以$\frac{x_0^2}{6}+\frac{y_0^2}{2}=1$．……12分

所以$\begin{cases}x_0=\sqrt{3},\\ y_0=1.\end{cases}$即$Q(\sqrt{3},1)$．

综上，点Q的坐标为$(2,\frac{\sqrt{6}}{3})$，或$(\sqrt{3},1)$．……13分

16. 解法一：（1）由 $\frac{a}{c}=\frac{\cos C}{\cos A}$ 得，$a\cos A=c\cos C$，所以 $\sin A\cos A=\sin C\cos C$ ......2 分

即 $\frac{1}{2}\sin 2A=\frac{1}{2}\sin 2C$，即 $\sin 2A=\sin 2C$ ......3 分

因为 A，$C\in(0,\pi)$，所以 $2A,2C\in(0,2\pi)$．

所以根据 $y=\sin x$ 的图象可得 $2A=2C$，或 $\frac{2A+2C}{2}=\frac{\pi}{2}$，或 $\frac{2A+2C}{2}=\frac{3\pi}{2}$ ......5 分

所以 $A=C$，或 $A+C=\frac{\pi}{2}$，或 $A+C=\frac{3\pi}{2}$． ......6 分

又 $A+C\in(0,\pi)$，$A+B+C=\pi$，所以 $A=C$，或 $B=\frac{\pi}{2}$．

所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形． ......7 分

（2）①若 $A=C$，则 $a=c=2$，则 $a+c=4=b$，不满足三角形三边关系，舍去；

......8 分

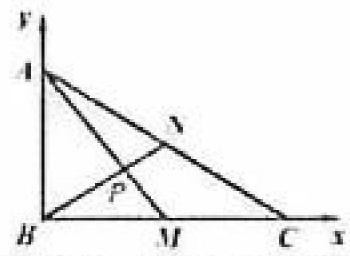
②若 $B=\frac{\pi}{2}$，则 $BC=a=\sqrt{b^2-c^2}=2\sqrt{3}$ ......9 分

以 B 为原点，分别以 BC，BA 为 x，y 轴建立平面直角坐标系，

则 $B(0,0)$，$A(0,2)$，$C(2\sqrt{3},0)$，$M(\sqrt{3},0)$，$N(\sqrt{3},1)$，

所以 $\overrightarrow{AM}=(\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{BN}=(\sqrt{3},1)$， ......12 分

所以 $\cos\angle MPN=\cos\langle\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PN}\rangle=\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN}\rangle$



$$=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{BN}|}=\frac{(\sqrt{3},-2)\cdot(\sqrt{3},1)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-2)^2}\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$$ ......15 分

解法二：（1）同解法一； ......7 分

（2）①若 $A=C$，则 $a=c=2$，则 $a+c=4=b$，不满足三角形三边关系，舍去；

......8 分

②若 $B=\frac{\pi}{2}$，则 $BC=a=\sqrt{b^2-c^2}=2\sqrt{3}$， ......9 分

$AM=\sqrt{BM^2+AB^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}$，

$BN=\frac{1}{2}AC=2$． ......10 分

因为 BC，AC 边上的两条中线 AM，BN 相交于点 P，所以 P 为 $\triangle ABC$ 的重心，

所以 $PM=\frac{1}{3}AM=\frac{\sqrt{7}}{3}$，$PN=\frac{1}{3}BN=\frac{2}{3}$，$MN=\frac{1}{2}AB=1$， ......13 分

所以 $\cos\angle MPN=\dfrac{PM^2+PN^2-MN^2}{2PM\cdot PN}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$ ……………………………………15 分

解法二：（1）由 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{\cos C}{\cos A}$，得 $a\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$， ……………………………2 分

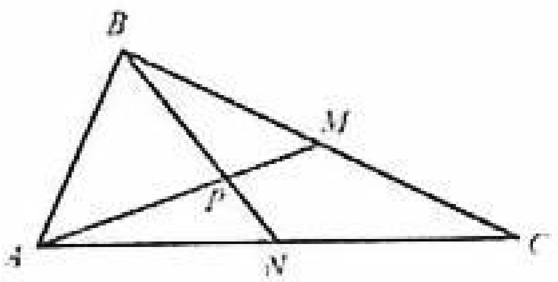
即 $a^2(b^2+c^2-a^2)=c^2(a^2+b^2-c^2)$，

化简，得 $(a^2-c^2)(b^2-a^2-c^2)=0$， ……………………………………………………5 分

从而 $a=c$，或 $b^2=a^2+c^2$ ……………………………………………………………6 分

所以△ABC是等腰三角形或直角三角形． ……………………………………………7 分

（2）



①若 $a=c=2$，则 $a+c=4=b$，不满足三角形三边关系，舍去； ……………………………8 分

②若 $b^2=a^2+c^2$，则 $B=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $BC=a=\sqrt{b^2-c^2}=2\sqrt{3}$． ……………………………9 分

$\cos C=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $C=\dfrac{\pi}{6}$

又 $BN=\dfrac{1}{2}AC=CN$，所以 $\angle CBN=C=\dfrac{\pi}{6}$ ……………………………………11 分

在 Rt△ABM 中，$AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{7}$，$\sin\angle AMB=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$\cos\angle AMB=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$．

……………………………………………………………………………………13 分

所以 $\cos\angle MPN=\cos(\angle CBN+\angle AMB)=\cos(\dfrac{\pi}{6}+\angle AMB)$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\angle AMB-\frac{1}{2}\sin\angle AMB=\frac{\sqrt{7}}{14}$$ ……………………………15 分

17．解：（1）由题意，机器人无需进行第三轮巡检的概率为

$P=C_3^2(\dfrac{2}{3})^2(1-\dfrac{2}{3})+C_3^3(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{20}{27}$； 3 分

（2）由题意得，$X=3,5,6$． 4 分

且 $P(X=3)=C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3=3p^2(1-p)+p^3$ 5 分

$P(X=5)=C_3^1p(1-p)^2=3p(1-p)^2$ 6 分

$P(X=6)=C_3^0(1-p)^3=(1-p)^3$ 7 分

所以 $E(X)=3[3p^2(1-p)+p^3]+5\times3p(1-p)^2+6(1-p)^3=3p^3-3p^2-3p+6$．

所以$E(X)=3p^3-3p^2-3p+6$，$p\in\left[\frac{2}{3},1\right)$. ………………………………………9 分

（3）应选方案　，理由如下：………………………………………10 分

记Y为机器人巡检的检测总费用，Z为人工巡检的检测总费用，

由题意得，$E(Z)=Z=30\times3=90$．　　11 分

令$f(p)=3p^3-3p^2-3p+6$，$p\in\left[\frac{2}{3},1\right)$，

则$f'(p)=9p^2-6p-3=3(3p^2-2p-1)=3(3p+1)(p-1)$，

因为$p\in\left[\frac{2}{3},1\right)$，所以$f'(p)<0$，即$f(p)$在$\left[\frac{2}{3},1\right)$上单调递减，

所以$E(X)=f(p)\leqslant f(\frac{2}{3})=\frac{32}{9}$ ………………………………………14 分

所以$E(Y)=E(18X)=18E(X)\leqslant18\times\frac{32}{9}=64<90=E(Z)$．

故选用智能机器人巡检的检测平均总费用更低，应选方案　　15 分

18．（1）证明：在$\triangle SBH$中，$SB=4$，$HB=2\sqrt{3}$，$\angle SBO=30^\circ$

所以$SH=\sqrt{SB^2+HB^2-2SB\cdot HB\cdot\cos\angle SBO}=2$，

所以$SH^2+HB^2=SB^2$，所以$SH\perp OB$．　　1 分

又因为平面$SOB\perp$平面$OABC$，平面$SOB\cap$平面$OABC=OB$，$SH\subset$平面SOB，

所以$SH\perp$平面$OABC$ ………………………………………2 分

又$AC\subset$平面$OABC$，所以$SH\perp AC$　　3 分

（2）取HA的中点E，SH的中点F，连接EF，则EF即为直线l．

4 分

证明如下：连接DE，DF，因为D，F分别是BH和SH的中点，所以$DF//BS$，

又$DF\not\subset$平面SAB，$BS\subset$平面SAB，所以$DF//$平面SAB，……………5 分

同理，$DE//$平面SAB，……………………………………6 分

又$DE\cap DF=D$，$DE、DF\subset$平面DEF，所以平面$DEF//$平面SAB，　　7 分

又过D且与平面SAB平行的平面有且只有一个，$D\in$平面DEF

所以平面DEF即平面α，又平面$DEF\cap$平面$SAB=EF$，所以EF即为直线l．

………………………………………8 分

（3）以O为坐标原点，OB为x轴建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$，其中y轴在平面$OABC$内，z轴$\perp$平面$OABC$，则$S(\sqrt{3},0,2)$，$B(3\sqrt{3},0,0)$，

设$A(x,y,0)$，$y\neq0$，则$\overrightarrow{SA}=(x-\sqrt{3},y,-2)$，$\overrightarrow{SB}=(2\sqrt{3},0,-2)$，

因为 $\angle ASB=60^\circ$

所以 $\cos<\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}>=\dfrac{\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}}{|\overrightarrow{SA}|\cdot|\overrightarrow{SB}|}=\dfrac{2\sqrt{3}x-2}{4\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2+4}}=\dfrac{1}{2}$，

化简得 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1(x>\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，又 $y\neq 0$，所以 $x>\sqrt{3}$．

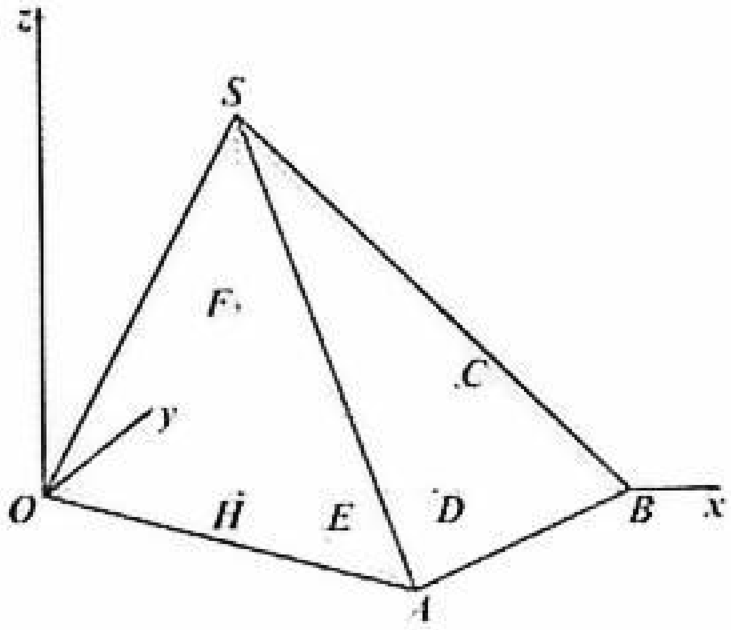
所以点 A 在 xOy 面内的曲线 $\Gamma:\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1(x>\sqrt{3})$ 上，

同理，点 C 也在 Γ 上．……………………………………………………………………10 分

在平面直角坐标系 xOy 内，$D(2\sqrt{3},0)$，

设直线 AC 的方程为 $x=my+2\sqrt{3}$，代入 $\Gamma:\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1(x>\sqrt{3})$，

得 $(2m^2-1)y^2+8\sqrt{3}my+18=0$．



设 $A(x_A,y_A),C(x_C,y_C)$，则

$$\begin{cases}2m^2-1\neq 0,\\ \Delta=(8\sqrt{3}m)^2-72(2m^2-1)>0,\\ y_A+y_C=\dfrac{-8\sqrt{3}m}{2m^2-1},\\ y_Ay_C=\dfrac{18}{2m^2-1}<0,\end{cases}$$

解得 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<m<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………………………………………………………11 分

$$|AC|=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_A+y_C)^2-4y_Ay_C}$$

$$=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(\frac{-8\sqrt{3}m}{2m^2-1})^2-4\cdot\frac{18}{2m^2-1}}=2\sqrt{6}\sqrt{\frac{(m^2+1)(2m^2+3)}{(2m^2-1)^2}}$$

……………………………………………………………………………………………12 分

令 $t=2m^2-1$，则 $m^2=\dfrac{t+1}{2}$，$|AC|=2\sqrt{6}\sqrt{\dfrac{(\frac{t+1}{2}+1)(t+1+3)}{t^2}}=2\sqrt{6}\sqrt{\dfrac{t^2+7t+12}{2t^2}}$

$=2\sqrt{3}\sqrt{1+\dfrac{7}{t}+\dfrac{12}{t^2}}=2\sqrt{3}\sqrt{12(\dfrac{1}{t}+\dfrac{7}{24})^2-12\times(\dfrac{7}{24})^2+1}$，

因为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<m<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $t=2m^2-1\in[-1,0)$，$\dfrac{1}{t}\leq-1<-\dfrac{7}{24}$

所以当$\frac{1}{t}=-1$，即$m=0$时，$|AC|_{\min}=6\sqrt{2}$ ……………………………… 13分

此时在空间直角坐标系$O-xyz$中，$A(2\sqrt{3},-3\sqrt{2},0)$，$C(2\sqrt{3},3\sqrt{2},0)$，

$\overrightarrow{BA}=(-\sqrt{3},-3\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{BS}=(-2\sqrt{3},0,2)$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},3\sqrt{2},0)$．

设$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$是平面$SAB$的法向量，

$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BS}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-\sqrt{3}x_1-3\sqrt{2}y_1=0,\\ -2\sqrt{3}x_1+2z_1=0,\end{cases}$ 取$\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{6},-1,3\sqrt{2})$． 14分

设$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$是平面$SBC$的法向量，

$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BS}=0,\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-2\sqrt{3}x_2+2z_2=0,\\ -\sqrt{3}x_2+3\sqrt{2}y_2=0,\end{cases}$ 取$\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{6},1,3\sqrt{2})$． 15分

设二面角$A-SB-C$的大小为θ，

则$|\cos\theta|=|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>|=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{6-1+18}{5\times5}=\frac{23}{25}$ ……………………………… 16分

又$\theta\in[0,\pi]$，所以二面角$A-SB-C$的正弦值为$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{4\sqrt{6}}{25}$

……………………………… 17分

19．解法一：（1）因为$u(x)=f(x)-g(x)=e^x-ax-b+1$，所以$u'(x)=e^x-a$，

……………………………… 1分

①若$a\leqslant0$，则$u'(x)=e^x-a>0$，所以$u(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增； 2分

②若$a>0$，则由$u'(x)=e^x-a<0$，得$x<\ln a$，由$u'(x)=e^x-a>0$，得$x>\ln a$，

所以$u(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减，在$(\ln a,+\infty)$上单调递增．……………… 4分

（2）由$u(1)\geqslant0$，即$e-a-b+1\geqslant0$，得$a+b\leqslant e+1$ ……………………………… 5分

当$a=e$，$b=1$时，$a+b=e+1$，下面证明此时$u(x)\geqslant0$成立．……………… 6分

此时$u(x)=e^x-ex$，由（1）知$u(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$u(x)\geqslant u(1)=0$成立．……………………………… 7分

综上，$a+b$的最大值为$e+1$．……………………………… 8分

（3）若$h(x)$有零点，设零点为$x_0(x_0>0)$，

则$h(x_0)=x_0f(x_0^2)-e(\ln x_0-1)-g^2(x_0)=0$， 9分

即$g(x_0)=\pm\sqrt{x_0f(x_0^2)-e(\ln x_0-1)}=\pm\sqrt{x_0e^{x_0^2}-e(\ln x_0-1)}$，

即 $ax_0+b-1\pm\sqrt{x_0e^{x_0^2}-e(\ln x_0-1)}=0$. ……………………………………………… 10 分

这说明点 $P(a,b)$ 在直线 $l: x_0x+y-1\pm\sqrt{x_0e^{x_0^2}-e(\ln x_0-1)}=0$ 上. …………… 11 分

设点 $A(0,1)$ 到直线 l 的距离为 d.

则 $|PA|\geqslant d$, 即 $\sqrt{a^2+(b-1)^2}\geqslant\dfrac{|\pm\sqrt{x_0e^{x_0^2}-e(\ln x_0-1)}|}{\sqrt{x_0^2+1}}$. ……………… 13 分

由（2）知，$e^x\geqslant ex$，仅当 $x=1$ 时，“=”成立. ……………………………… 14 分

所以 $\sqrt{a^2+(b-1)^2}\geqslant\dfrac{\sqrt{e^{\ln x_0+x_0^2}-e(\ln x_0-1)}}{\sqrt{x_0^2+1}}\geqslant\dfrac{\sqrt{e(\ln x_0+x_0^2)-e(\ln x_0-1)}}{\sqrt{x_0^2+1}}$

$=\dfrac{\sqrt{e(x_0^2+1)}}{\sqrt{x_0^2+1}}=\sqrt{e}>0$. ……………………………………………… 16 分

所以 $a^2+(b-1)^2\geqslant e$. ……………………………………………………………… 17 分

解法二：（1）同解法一. …………………………………………………………… 4 分

（2）①若 $a<0$，则

当 $x<0$ 时，$u(x)=e^x-ax-b+1<1-ax-b+1=-ax-b+2$.

当 $x<\dfrac{b-2}{-a}$ 时，$-ax-b+2<0$，

所以当 $x<0$ 且 $x<\dfrac{b-2}{-a}$ 时，$u(x)<0$，不合题意. ……………………………… 5 分

②若 $a=0$，则 $u(x)=e^x-b+1$ 的值域为 $(-b+1,+\infty)$，

所以 $-b+1\geqslant0$，$b\leqslant1$，所以 $a+b\leqslant1<e+1$. ………………………………… 6 分

③若 $a>0$，则结合（1）得，$[u(x)]_{\min}=u(\ln a)\geqslant0$，

即 $a-a\ln a-b+1\geqslant0$，即 $b\leqslant a-a\ln a+1$，所以 $a+b\leqslant2a-a\ln a+1$.

令 $p(a)=2a-a\ln a+1$，则 $p'(a)=1-\ln a$.

当 $0<a<e$ 时，$p'(a)>0$，$p(a)$ 单调递增；当 $a>e$ 时，$p'(a)<0$，$p(a)$ 单调递减，

所以 $a+b\leqslant p(a)\leqslant p(e)=e+1$，

当 $a=e$，$b=a-a\ln a+1=1$ 时，$a+b=e+1$. ……………………………………… 7 分

综上，$a+b$ 的最大值为 $e+1$. ………………………………………………………… 8 分

（3）若 $h(x)$ 有零点，设零点为 $x_0(x_0>0)$，

则 $h(x_0)=x_0f(x_0^2)-e(\ln x_0-1)-g^2(x_0)=0$. ……………………………………… 9 分

即 $g(x_0)=\pm\sqrt{x_0f(x_0^2)-e(\ln x_0-1)}=\pm\sqrt{x_0e^{x_0^2}-e(\ln x_0-1)}$.

即 $ax_0+b-1\pm\sqrt{x_0e^{x_0^2}-e(\ln x_0-1)}=0$． ……………………………………10 分

设 $a=r\cos\theta, b-1=r\sin\theta$，$r\geqslant 0$．则 $a^2+(b-1)^2=r^2$

$rx_0\cos\theta+r\sin\theta\pm\sqrt{x_0e^{x_0^2}-e(\ln x_0-1)}=0$．

即 $r\sqrt{x_0^2+1}\sin(\theta+\varphi)\pm\sqrt{x_0e^{x_0^2}-e(\ln x_0-1)}=0$，其中 $\tan\varphi=\dfrac{1}{x_0}$

所以 $\sqrt{x_0e^{x_0^2}-e(\ln x_0-1)}\leqslant r\sqrt{x_0^2+1}$．

所以 $\sqrt{a^2+(b-1)^2}=r\geqslant\dfrac{\sqrt{x_0e^{x_0^2}-e(\ln x_0-1)}}{\sqrt{x_0^2+1}}$． ……………………………………13 分

由（2）知，$e^x\geqslant ex$，仅当 $x=1$ 时，“=”成立． ……………………………………14 分

所以 $\sqrt{a^2+(b-1)^2}\geqslant\dfrac{\sqrt{e^{\ln x_0+x_0^2}-e(\ln x_0-1)}}{\sqrt{x_0^2+1}}\geqslant\dfrac{\sqrt{e(\ln x_0+x_0^2)-e(\ln x_0-1)}}{\sqrt{x_0^2+1}}$

$=\dfrac{\sqrt{e(x_0^2+1)}}{\sqrt{x_0^2+1}}=\sqrt{e}>0$． ……………………………………16 分

所以 $a^2+(b-1)^2\geqslant e$ ……………………………………17 分