2024年普通高等学校招生全国统一考试

数　学

本试卷共4页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：1．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4．考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共计40分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上．

1．已知集合 $A=\{x\mid -5<x^3<5\}$，$B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{-1,0\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{-3,-1,0\}$　　D．$\{-1,0,2\}$

2．若 $\dfrac{z}{z-1}=1+\mathrm{i}$，则 $z=$

A．$-1-\mathrm{i}$　　B．$-1+\mathrm{i}$　　C．$1-\mathrm{i}$　　D．$1+\mathrm{i}$

3．已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,x)$，若 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$，则 $x=$

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

4．已知 $\cos(\alpha+\beta)=m$，$\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$

A．$-3m$　　B．$-\dfrac{m}{3}$　　C．$\dfrac{m}{3}$　　D．$3m$

5．已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为 $\sqrt{3}$，则圆锥的体积为

A．$2\sqrt{3}\pi$　　B．$3\sqrt{3}\pi$　　C．$6\sqrt{3}\pi$　　D．$9\sqrt{3}\pi$

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a, x<0,\\ \mathrm{e}^x+\ln(x+1), x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 a 的取值范围是

A．$(-\infty,0]$　　B．$[-1,0]$　　C．$[-1,1]$　　D．$[0,+\infty)$

7．当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$ 的交点个数为

A．3　　B．4　　C．6　　D．8

8．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时，$f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是

A．$f(10)>100$　　B．$f(20)>1\,000$　　C．$f(10)<1\,000$　　D．$f(20)<10\,000$

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分．每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分。

9．为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值 $\bar{x}=2.1$，样本方差 $s^2=0.01$，已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N(1.8,0.1^2)$，假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $(\bar{x},s^2)$，则（若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(Z<\mu+\sigma)\approx0.8413$）

A．$P(X>2)>0.2$　　B．$P(X>2)<0.5$

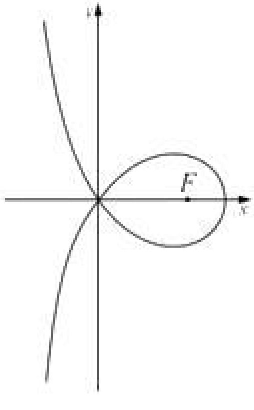
C．$P(Y>2)>0.5$　　D．$P(Y>2)<0.8$

10．设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则

A．$x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点　　B．当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f(x^2)$

C．当 $1<x<2$ 时，$-4<f(2x-1)<0$　　D．当 $-1<x<0$ 时，$f(2-x)>f(x)$

11．造型 可以做成美丽的丝带，将其看作图中曲线 C 的一部分．已知 C 过坐标原点 O，且 C 上的点满足横坐标大于 -2，到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=a(a<0)$ 的距离之积为 4，则



A．$a=-2$

B．点 $(2\sqrt{2},0)$ 在 C 上

C．C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D．当点 (x_0,y_0) 在 C 上时，$y_0\leqslant\frac{4}{x_0+2}$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分.

12．设双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_2$作平行于$y$轴的直线交$C$于$A$、$B$两点，若$|F_1A|=13$，$|AB|=10$，则$C$的离心率为_________.

13．若曲线在点$(0,1)$处的切线也是曲线$y=\ln(x+1)+a$的切线，则$a=$__________.

14．甲乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，假的卡片上分别标有数字 1，3，5，7，乙的卡片上分别标有数字 2，4，6，8. 两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上的数字大小，数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用），则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）

记△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin C=\sqrt{2}\cos B$，$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$.

（1）求B；

（2）若△ABC的面积为$3+\sqrt{3}$，求c.

16．（15 分）

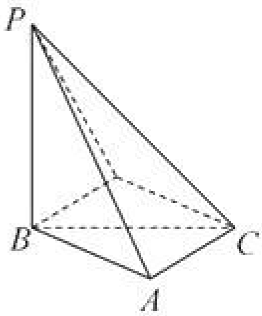
已知$A(0,3)$和$P(3,\dfrac{3}{2})$为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上两点.

（1）求C的离心率；

（2）若过P的直线l交C于另一点B，且△ABP的面积为 9，求l的方程.

17．（15 分）

如图，四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$．



（1）若$AD\perp PB$，证明：AD // 平面PBC；

（2）若$AD\perp DC$，且二面角$A-CP-D$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，求AD．

18．（17 分）

已知函数$f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$．

（1）若$b=0$，且$f'(x)\geqslant 0$，求a的最小值；

（2）证明：曲线$y=f(x)$是中心对称图形；

（3）若$f(x)>-2$当且仅当$1<x<2$，求b的取值范围．

19．（17 分）

设m为正整数，数列a_1，a_2，…，a_{4m+2}是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项a_i和a_j $(i<j)$后剩余的$4m$项可被平均分为m组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列a_1，a_2，…，a_{4m+2}是(i,j)—可分数列．

（1）写出所有的(i,j)，$1\leqslant i<j\leqslant 6$，使得数列$a_1$，$a_2$，…，$a_6$是$(i,j)$—可分数列；

（2）当$m\geqslant 3$时，证明：数列a_1，a_2，…，a_{4m+2}是$(2,13)$—可分数列；

（3）从 1，2，…，$4m+2$中一次任取两个数i和j $(i<j)$，记数列a_1，a_2，…，a_{4m+2}是(i,j)—可分数列的概率为P_m，证明：$P_m>\dfrac{1}{8}$．

2024 年新高考 1 卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{x\mid -5<x^3<5\}$，$B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B=$ **【答案】A**

A．$\{-1,0\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{-3,-1,0\}$　　D．$\{-1,0,2\}$

【锤子数学解】 $A\cap B=\{-1,0\}$，选 A.

2．若 $\dfrac{2}{z-1}=1+\mathrm{i}$，则 $z=$ **【答案】C**

A．$-1-\mathrm{i}$　　B．$-1+\mathrm{i}$　　C．$1-\mathrm{i}$　　D．$1+\mathrm{i}$

3．已知向量 $\vec{a}=(0,1)$，$\vec{b}=(2,x)$，若 $\vec{b}\perp(\vec{b}-4\vec{a})$，则 $x=$ **【答案】D**

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

【锤子数学解】 $\vec{b}-4\vec{a}=(2,x-4)$，$\vec{b}\perp(\vec{b}-4\vec{a})$，$\therefore \vec{b}(\vec{b}-4\vec{a})=0$，

$\therefore 4+x(x-4)=0$，$\therefore x=2$，选 D.

4．已知 $\cos(\alpha+\beta)=m$，$\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$ **【答案】A**

A．$-3m$　　B．$-\dfrac{m}{3}$　　C．$\dfrac{m}{3}$　　D．$3m$

【锤子数学解】 $\begin{cases}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=m\\ \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=2\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}\sin\alpha\sin\beta=-2m\\ \cos\alpha\cos\beta=-m\end{cases}$

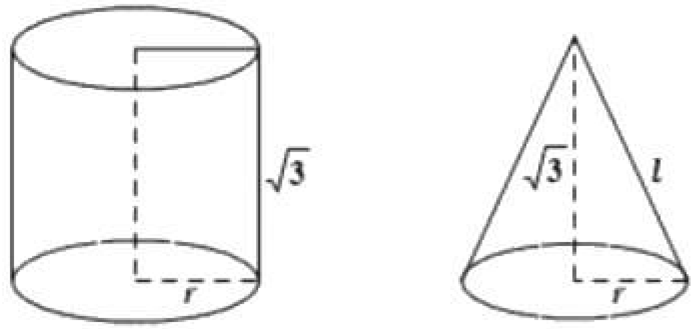
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-m-2m=-3m$，选 A.

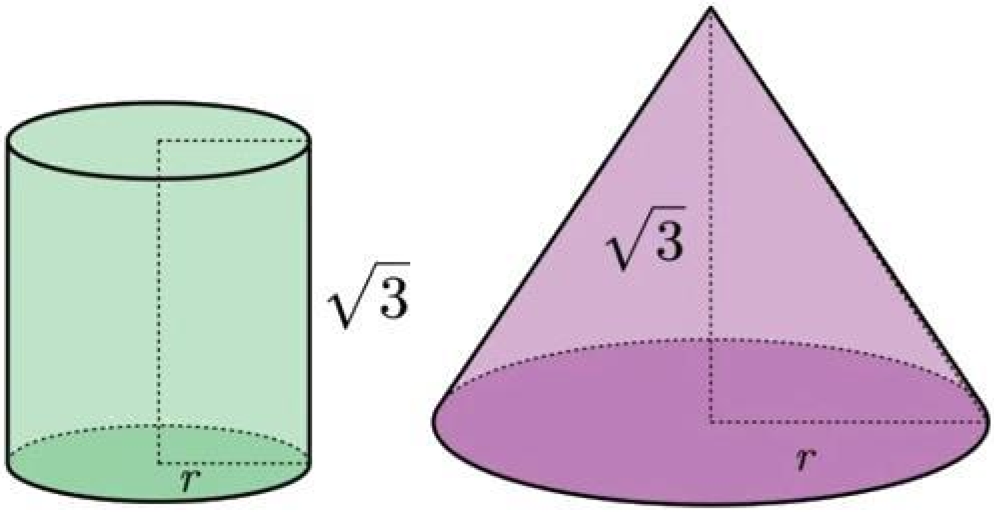
5．已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为 $\sqrt{3}$，则圆锥的体积为 **【答案】B**

A．$2\sqrt{3}\pi$　　B．$3\sqrt{3}\pi$　　C．$6\sqrt{3}\pi$　　D．$9\sqrt{3}\pi$

【锤子数学解】 设它们底面半径为 r，圆锥母线 l，$\therefore 2\pi r\sqrt{3}=\pi rl$，$\therefore l=2\sqrt{3}=\sqrt{3+r^2}$，

$\therefore r=3$，$V=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot 9\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{3}\pi$，选 B.





6．已知函数为 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a, x<0\\ \mathrm{e}^x+\ln(x+1), x\geq 0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 a 的取值范围是**【答案】B**

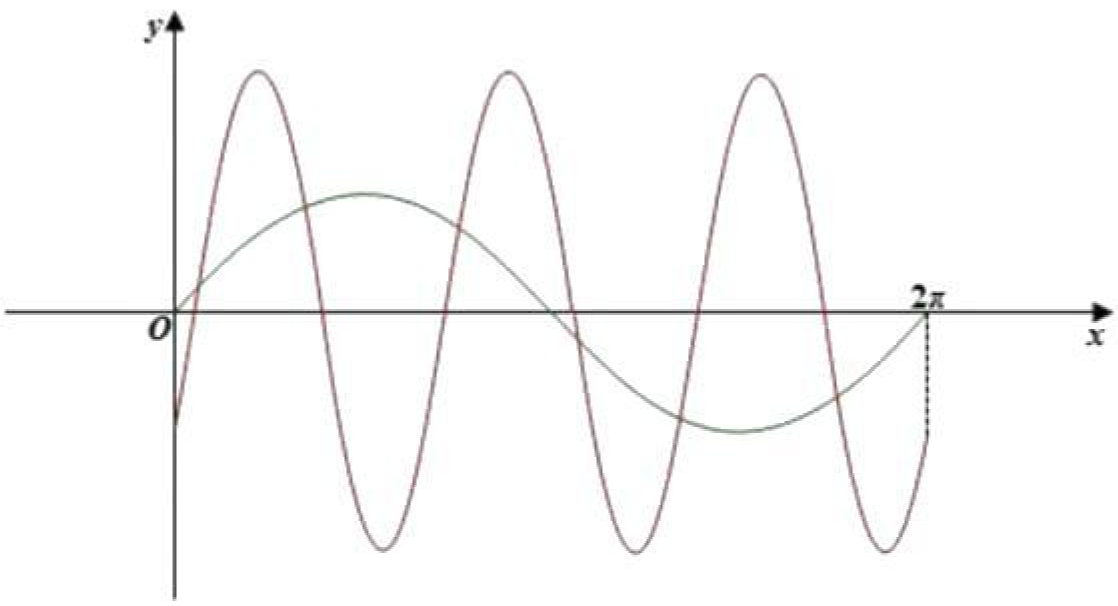
A．$(-\infty,0]$　　B．$[-1,0]$　　C．$[-1,1]$　　D．$[0,+\infty)$

【锤子数学解】 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，$\begin{cases}-a\geq 0\\ -a\leq \mathrm{e}^0+\ln 1\end{cases}$，$\therefore -1\leq a\leq 0$，选 B.

7．当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为**【答案】C**

A．3　　B．4　　C．6　　D．8

【锤子数学解】 6个交点，选 C.



8．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时，$f(x)=x$，

则下列结论中一定正确的是【答案】B

A． $f(10)>100$　　B． $f(20)>1000$

C． $f(10)<1000$　　D． $f(20)<10000$

【锤子数学解】 $f(1)=1$ ，$f(2)=2$ ，$f(3)>f(2)+f(1)=3$ ，$f(4)>f(3)+f(2)>5$

$f(5)>f(4)+f(3)>8$ ，$f(6)>f(5)+f(4)>13$ ，$f(7)>f(6)+f(5)>21$

$f(8)>f(7)+f(6)>34$ ，$f(9)>f(8)+f(7)>55$ ，$f(10)>f(9)+f(8)>89$

$f(11)>f(10)+f(9)>144$ ，$f(12)>f(11)+f(10)>233$ ，$f(13)>f(12)+f(11)>377$

$f(14)>f(13)+f(12)>610$ ，$f(15)>f(14)+f(13)>987$ ，$f(16)>1000$

$\therefore f(20)>1000$ ，选 B.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值 $\overline{X}=2.1$ ，样本方差 $S^2=0.01$ ，已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N(1.8,0.1^2)$ ，假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N(\overline{X},S^2)$ ，则（若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ ，则 $P(Z<\mu+\sigma)\approx 0.8413$ ）

A． $P(X>2)>0.2$　　B． $P(X>2)<0.5$

C． $P(Y>2)>0.5$　　D． $P(Y>2)<0.8$

【答案】BC

【锤子数学解】 $X\sim N(1.8,0.1^2)$ ，$Y\sim N(2.1,0.1^2)$

$2=1.8+2\times 0.1=\mu+2\sigma$ ，

$P(X>2)=P(X>\mu+2\sigma)<P(X>\mu+\sigma)=1-0.8413=0.1587$ ，A 错.

$P(X>2)<P(X>1.8)=0.5$ ，B 对.

$2=2.1-0.1=\mu-\sigma$ ，$P(Y>2)>P(Y>2.1)=0.5$ ，C 对.

$P(Y>2)=P(Y>\mu-\sigma)=P(Y<\mu+\sigma)=0.8413>0.8$ ，D 错.选 BC

10．设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$ ，则

A． $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点

B．当 $0<x<1$ 时， $f(x)<f(x^2)$

C．当 $1<x<2$ 时， $-4<f(2x-1)<0$

D．当 $-1<x<1$ 时， $f(2-x)>f(x)$

【答案】ACD

【锤子数学解】 A 对，因为 $f'(x)=3(x-1)(x-3)$ ；

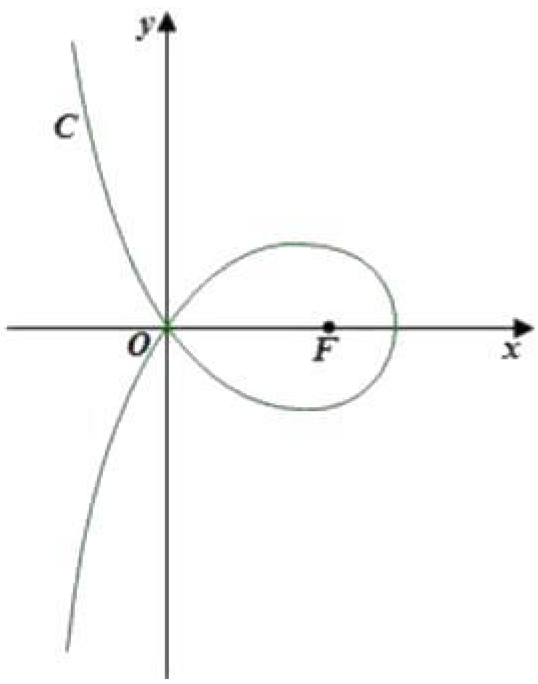
B 错，因为当 $0<x<1$ 时 $f'(x)>0$ 且 $0<x^2<x<1$ ，所以 $f(x^2)<f(x)$ ；

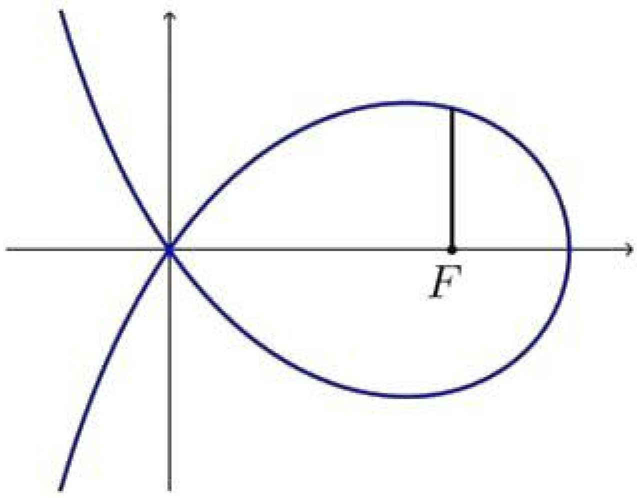
C 对，因为： $f(2x-1)=4(x-1)^2(2x-5)<0$ ， $f(2x-1)+4=4(x-2)^2(2x-1)>0$

$f(2-x)-f(x)=(x-1)^2(-2-x)-(x-1)^2(x-4)=(x-1)^2(-2x+2)=-2(x-1)^3$ ，

$-1<x<1$ 时， $f(2-x)-f(x)>0$ ， $f(2-x)>f(x)$ ，D 对.

11．造型  可以看作图中的曲线 C 的一部分，已知 C 过坐标原点 O ，且 C 上的点满足横坐标大于 -2 ，到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=a(a<0)$ 的距离之积为 4 ，则



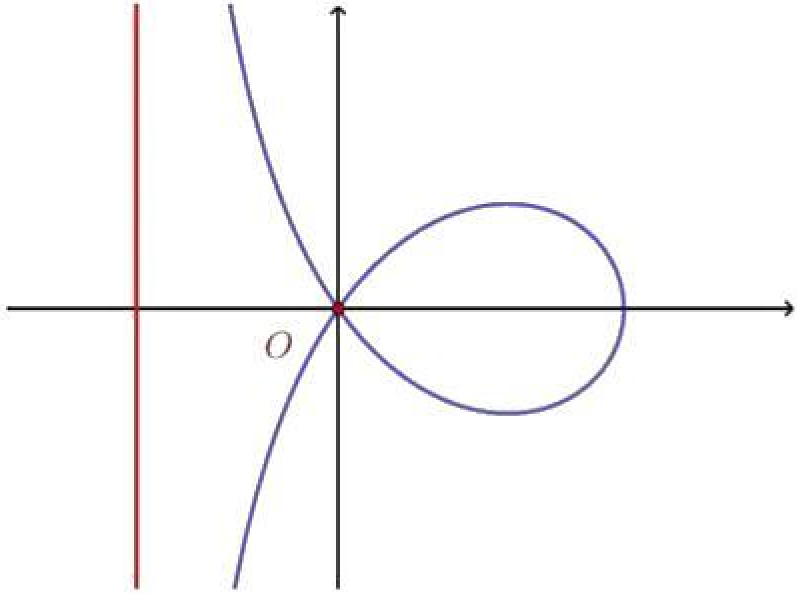


A． $a=-2$

B．点 $(2\sqrt{2},0)$ 在 C 上

C． C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D．当点 (x_0,y_0) 在 C 上时， $y_0\le\dfrac{4}{x_0+2}$



【答案】ABD

【锤子数学解】 A 对，因为 O 在曲线上，所以 O 到 $x=a$ 的距离为 $-a$，而 $OF=2$，

所以有 $-a\cdot 2=4\Rightarrow a=-2$，那么曲线的方程为 $(x+2)\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4$.

B 对，因为代入 $(2\sqrt{2},0)$ 知满足方程；

C 错，因为 $y^2=\left(\dfrac{4}{x+2}\right)^2-(x-2)^2=f(x)$，求导得 $f'(x)=-\dfrac{32}{(x+2)^3}-2(x-2)$，

那么有 $f(2)=1$，$f'(2)=-\dfrac{1}{2}<0$，于是在 $x=2$ 的左侧必存在一小区间 $(2-\varepsilon,2)$ 上满足

$f(x)>1$，因此最大值一定大于 1；

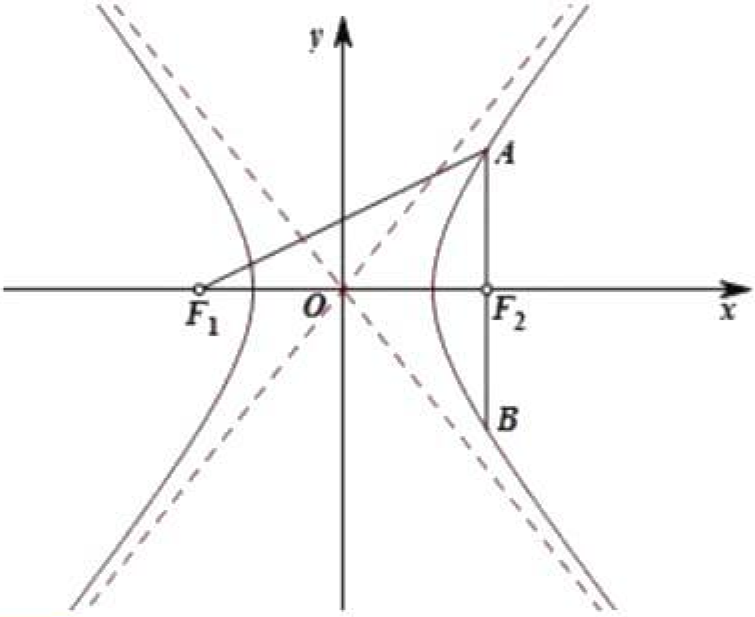
D 对，因为 $y_0{}^2=\left(\dfrac{4}{x_0+2}\right)^2-(x_0-2)^2\le\left(\dfrac{4}{x_0+2}\right)^2\Rightarrow y_0\le\dfrac{4}{x_0+2}$.

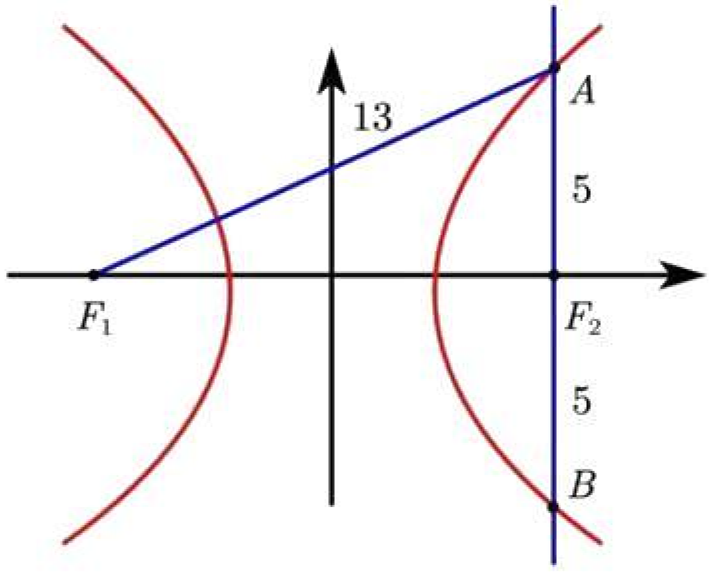
三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 C 于 A,B 两点，若 $|F_1A|=13$，$|AB|=10$，则 C 的离心率为________.

【答案】 $\dfrac{3}{2}$

【锤子数学解】方法一： $AF_2=5$，$2a=13-5=8$，$2c=F_1F_2=2c=12$，$\therefore\dfrac{c}{a}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$.





方法二： 由 $|AB|=10$ 知 $|F_2A|=5$，即 $\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{c^2-a^2}{a}=5$，而 $F_1F_2\perp F_1A$，所以 $|F_1F_2|=12$，即 $c=6$，代回去解得 $a=4$，所以 $e=\dfrac{3}{2}$.

13 .若曲线 $y=\mathrm{e}^x+x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线也是曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 的切线 ,则 $a=$ ________

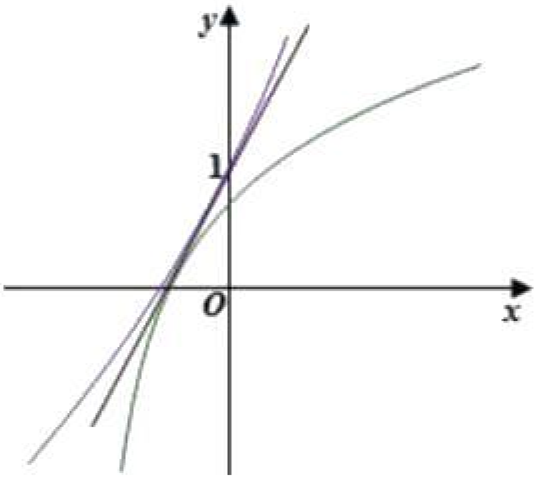
【答案】$\ln 2$

【锤子数学解】**方法一：** 切点 $A(0,1)$，$y'=\mathrm{e}^x+1$，$k=2$，切线 $y-1=2x$，即 $y=2x+1$

切点 $B(x_0,\ln(x_0+1)+a)$，$y'=\dfrac{1}{x+1}$，$k=\dfrac{1}{x_0+1}$，切线 $y-(\ln(x_0+1)+a)=\dfrac{1}{x_0+1}(x-x_0)$

$y=\dfrac{1}{x_0+1}x-\dfrac{x_0}{x_0+1}+\ln(x_0+1)+a$，$\therefore\begin{cases}\dfrac{1}{x_0+1}=2\\ \ln(x_0+1)-\dfrac{x_0}{x_0+1}+a=1\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x_0=-\dfrac{1}{2}\\ a=\ln 2\end{cases}$，$\therefore a=\ln 2$.



方法二： 易知切线为 $y=2x+1$，设其与 $y=\ln(x+1)+a$ 的切点横坐标为 x_0，

则$\dfrac{1}{x_0+1}=2\Rightarrow x_0=-\dfrac{1}{2}$，又$2x_0+1=\ln(x_0+1)+a$，代入得$a=\ln 2$.

14．甲、乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字$1,3,5,7$，乙的卡片上分别标有数字$2,4,6,8$，两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上数字的大小，数字大的人得1分，数字小的人得0分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用）.则四轮比赛后，甲的总得分不小于2的概率为__________.

【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【锤子数学解】甲出1一定输，所以最多3分，要得3分，就只有一种组合$1-8$、$3-2$、$5-4$、$7-6$.

得2分有三类，分别列举如下：

（1）出3和出5的赢，其余输：$1-6$，$3-2$，$5-4$，$7-8$

（2）出3和出7的赢，其余输：$1-4$，$3-2$，$5-8$，$7-6$；$1-8$，$3-2$，$5-6$，$7-4$

$1-6$，$3-2$，$5-8$，$7-4$

（3）出5和出7的赢，其余输：$1-2$，$3-8$，$5-4$，$7-6$；$1-4$，$3-8$，$5-2$，$7-6$；

$1-8$，$3-4$，$5-2$，$7-6$；$1-6$，$3-8$，$5-2$，$7-4$；$1-8$，$3-6$，$5-2$，$7-4$

$1-6$，$3-8$，$5-4$，$7-2$；$1-8$，$3-6$，$5-4$，$7-2$

共12种组合满足要求，而所有组合为$4!$，所以甲得分不小于2的概率为$\dfrac{12}{4!}=\dfrac{1}{2}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15 .（13 分）记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c ，已知 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$ ，$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$.

（1）求 B ；

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3+\sqrt{3}$ ，求 C.

【锤子数学解】

（1）已知$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$，根据余弦定理$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

可得：$\cos C=\dfrac{\sqrt{2}ab}{2ab}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\dfrac{\pi}{4}$.

又因为$\sin C=\sqrt{2}\cos B$，即$\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}\cos B$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\cos B$，解得$\cos B=\dfrac{1}{2}$.

因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）由（1）知$B=\dfrac{\pi}{3}$，$C=\dfrac{\pi}{4}$，则$A=\pi-B-C=\pi-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{12}$.

已知$\triangle ABC$的面积为$3+\sqrt{3}$，且$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，

则$\dfrac{1}{2}ab\sin\dfrac{\pi}{4}=3+\sqrt{3}$，即$\dfrac{1}{2}ab\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3+\sqrt{3}$，$ab=2(3+2\sqrt{3})$.

又由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，可得$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{b\sin C}{\sin B}$.

则$\dfrac{c}{\sin\frac{\pi}{4}}=\dfrac{a}{\sin\frac{5\pi}{12}}$，$a=\dfrac{c\sin\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{4}}$，同理$b=\dfrac{c\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{4}}$.

所以$ab=\dfrac{c^2\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{3}}{\sin^2\frac{\pi}{4}}=\dfrac{c^2\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=2(3+2\sqrt{3})$

解得$c=2\sqrt{2}$.

16.（15分）已知$A(0,3)$和$P\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$为椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上两点.

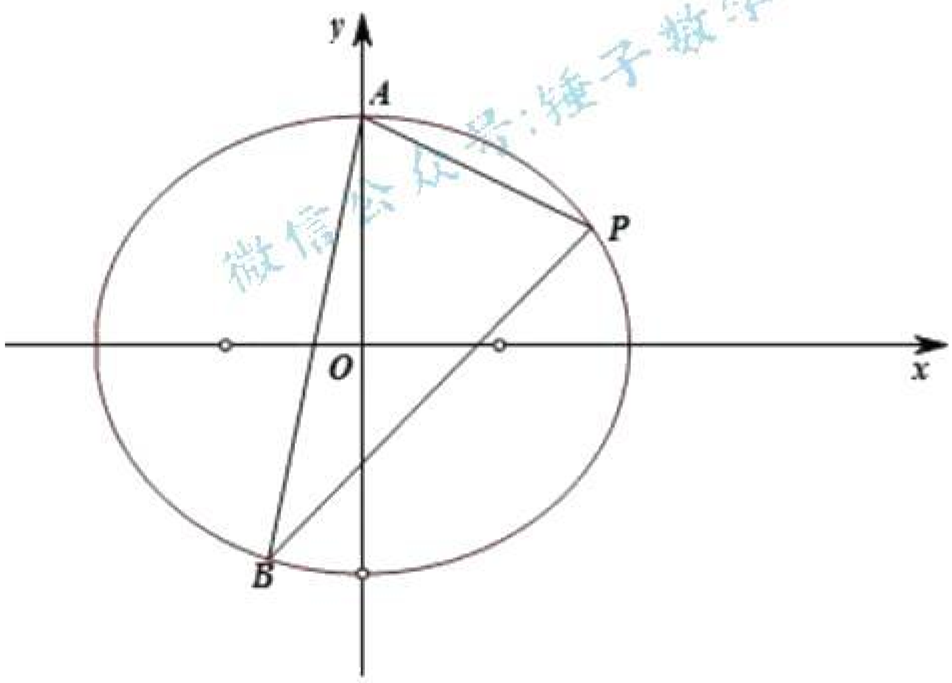
（1）求C的离心率；

（2）若过P的直线L交C于另一点B，且$\triangle ABP$的面积为9，求L的方程.

【锤子数学解】

（1）将 $A(0,3)$，$P\left(3,\frac{3}{2}\right)$ 代入椭圆 $\begin{cases}\frac{0}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1\\ \frac{9}{a^2}+\frac{\frac{9}{4}}{b^2}=1\end{cases}$，则 $\begin{cases}a^2=12\\ b^2=9\end{cases}$

$c=\sqrt{3}$，$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$.



（2）当 L 的斜率不存在时，$L: x=3$，$B\left(3,-\frac{3}{2}\right)$，$PB=3$，$A$ 到 PB 距离 $d=3$

此时 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}\neq9$ 不满足条件.

②当 L 的斜率存在时，设 $PB: y-\frac{3}{2}=k(x-3)$，令 $P(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

$\begin{cases}y=k(x-3)+\frac{3}{2}\\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$，消 y 可得 $(4k^2+3)x^2-(24k^2-12k)x+36k^2-36k-27=0$

$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{24k^2-12k}{4k^2+3}\\ x_1x_2=\frac{36k^2-36k-27}{4k^2+3}\end{cases}$，$PB=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+9k+\frac{27}{4}}}{4k^2+3}$

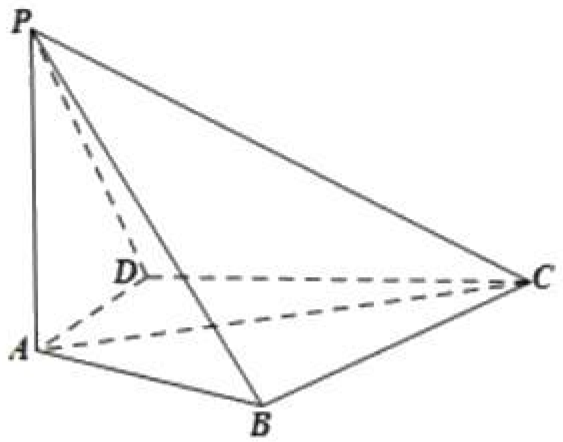
A 到 PB 距离 $d=\frac{\left|3k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}$，$S=\frac{1}{2}\frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+9k+\frac{27}{4}}}{4k^2+3}\cdot\frac{\left|3k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=9$

$\therefore k=\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$，$\therefore L: y=\frac{1}{2}x$或$y=\frac{3}{2}x-3$.

17.（15分）如图，四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$.

（1）若$AD\perp PB$，证明：$AD//$平面PBC；

（2）若$AD\perp DC$，且二面角$A-CP-D$的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$，求AD.



【锤子数学解】

（1）$PA\perp$面$ABCD$，$AD\subset$平面$ABCD$，$\therefore PA\perp AD$

又$\because AD\perp PB$，$PB\cap PA=P$，$PB,PA\subset$平面PAB

$\therefore AD\perp$面PAB，$\therefore AB\subset$平面PAB，$\therefore AD\perp AB$

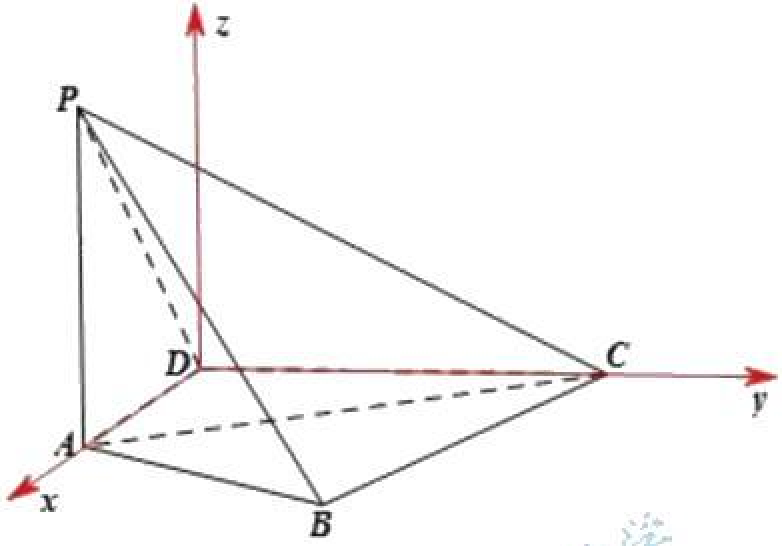
$\triangle ABC$中，$AB^2+BC^2=AC^2$，$\therefore AB\perp BC$

$\because A,B,C,D$四点共面，$\therefore AD//BC$

又$\because BC\subset$平面PBC，$AD\not\subset$平面PBC

$\therefore AD//$平面PBC.

（2）以DA,DC为x,y轴过D作与平面$ABCD$垂直的线为z轴建立如图所示空间直角坐标系$D-xyz$



令 $AD=t$，则 $A(t,0,0)$，$P(t,0,2)$，$D(0,0,0)$，$DC=\sqrt{4-t^2}$，$C(0,\sqrt{4-t^2},0)$

设平面 ACP 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}，\therefore\begin{cases}-tx_1+\sqrt{4-t^2}\,y_1=0\\ 2z_1=0\end{cases}$$

不妨设 $x_1=\sqrt{4-t^2}$，则 $y_1=t$，$z_1=0$，$\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{4-t^2},t,0)$

设平面 CPD 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DP}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}，\therefore\begin{cases}tx_2+2z_2=0\\ \sqrt{4-t^2}\,y_2=0\end{cases}$$ 不妨设 $z_2=t$，则 $x_2=-2$，$y_2=0$

$\overrightarrow{n_2}=(-2,0,t)$

$\because$ 二面角 $A-CP-D$ 的正弦值 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，则余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

$$\therefore\frac{\sqrt{7}}{7}=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{2\sqrt{4-t^2}}{2\sqrt{t^2+4}}$$

$\therefore t=\sqrt{3}$，$\therefore AD=\sqrt{3}$.

18.（17分）已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$

（1）若 $b=0$，且 $f'(x)\geq 0$，求 a 的最小值；

（2）证明：曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形；

（3）若 $f(x)>-2$，当且仅当 $1<x<2$，求 b 的取值范围.

【锤子数学解】

（1）$b=0$时，$f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}+a\geq 0$对$\forall 0<x<2$恒成立

而$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2-x}+a=\dfrac{2}{x(2-x)}+a\geq 2+a$，当且仅当$x=1$时取“$=$”，故只需$2+a\geq 0$

$\Rightarrow a\geq -2$，即a的最小值为-2.

（2）**方法一：**$x\in(0,2)$，$f(2-x)+f(x)$

$=\ln\dfrac{2-x}{x}+a(2-x)+b(1-x)^3+\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3=2a$

$\therefore f(x)$关于$(1,a)$中心对称.

方法二：

将$f(x)$向左平移一个单位$\Rightarrow f(x+1)=\ln\dfrac{x+1}{1-x}+a(x+1)+bx^3$关于$(0,a)$中心对称

平移回去$\Rightarrow f(x)$关于$(1,a)$中心对称.

（3）$\because f(x)>-2$当且仅当$1<x<2$，$\therefore f(1)=-2\Rightarrow a=-2$

$\therefore f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}-2x+b(x-1)^3>-2$对$\forall 1<x<2$恒成立

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}-2+3b(x-1)=\frac{2(x-1)^2}{x(2-x)}+3b(x-1)^2=(x-1)^2\left[\frac{2}{x(2-x)}+3b\right]$$

令$g(x)=\dfrac{2}{x(2-x)}+3b$，$\therefore$必有$g(1)=2+3b\geq 0\Rightarrow b\geq -\dfrac{2}{3}$（必要性）

否则$b<-\dfrac{2}{3}$，存在$x\in(1,\delta)$使$f'(x)<0$，$f(x)$在$(1,2)$上$\swarrow$，$\therefore f(x)<f(1)=-2$

当$b\geq -\dfrac{2}{3}$时，对$\forall x\in(1,2)$，$f(x)\geq \ln\dfrac{x}{2-x}-2x-\dfrac{2}{3}(x-1)^3=h(x)$

$$h'(x)=\frac{2(x-1)^2}{x(2-x)}-2(x-1)^2=2(x-1)^2\left[\frac{1}{x(2-x)}-1\right]>0$$

对$\forall x\in(1,2)$恒成立，$\therefore h(x)>h(1)=-2$符合条件，

综上：$b\geq -\dfrac{2}{3}$.

19.（17分）设m为正整数，数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是公差不为0的等差数列，若从中删去两项a_i和$a_j(i<j)$后剩余的$4m$项可被平均分为m组，且每组的4个数都能构成等差数列，则称数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是$(i,j)-$可分数列.

（1）写出所有的$(i,j),1\le i<j\le 6$，使数列$a_1,a_2,\cdots,a_6$是$(i,j)-$可分数列；

（2）当$m\ge 3$时，证明：数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是$(2,13)-$可分数列；

（3）从$1,2,\cdots,4m+2$中一次任取两个数i和$j(i<j)$，记数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是$(i,j)-$可分数列的概率为P_m，证明：$P_m>\frac{1}{8}$.

【锤子数学解】

解析一：

（1）以下(i,j)满足：$(1,2)$，$(1,6)$，$(5,6)$

（2）易知：a_p,a_q,a_r,a_s等差$\Leftrightarrow p,q,r,s$等差

故只需证明：$1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14$可分

分组为$(1,4,7,10)$，$(3,6,9,12)$，$(5,8,11,14)$即可

其余a_k，$15\le k\le 4m+2$，按连续4个为一组即可

（3）由第（2）问易发现：$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是(i,j)可分的$\Leftrightarrow 1,2,\cdots 4m+2$是$(i,j)$可分的.

易知：$1,2,\cdots,4m+2$是$(4k+1,4r+2)$可分的$(0\le k\le r\le m)$

因为可分为$(1,2,3,4),\cdots(4k-3,4k-2,4k-1,4k)$与

$(4(r+1)-1,4(r+1),4(r+1)+1,4(r+1)+2),\cdots,(4m-1,4m,4m+1,4m+2)$

此时共$C_{m+1}^2+(m+1)=\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$种

再证：$1,2,\cdots,4m+2$是$(4k+2,4r+1)$可分的$(0\le k<r\le m)$

易知$1\sim 4k$与$4r+2\sim 4m+2$是可分的

只需考虑$4k+1,4k+3,4k+4,\cdots,4r-1,4r,4r+2$

记$p=r-k\in\mathbf{N}^*$，只需证：$1,3,4,5,\cdots,4p-1,4p,4p+2$可分

$1\sim 4p+2$去掉2与$4p+1$

观察：$p=1$时，$1,3,4,6$无法做到；

$p=2$时，$1,3,4,5,6,7,8,10$，可以做到；

$p=3$时，$1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14$

$p=4$时，$1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18$

$(1,5,9,13),(3,7,11,15),(4,8,12,16),(6,10,14,18)$满足

故$\forall p\geq 2$，可划分为：

$(1,p+1,2p+1,3p+1),(3,p+3,2p+3,3p+3),(4,p+4,2p+4,3p+4)$

$(5,p+5,2p+5,3p+5),\cdots,(p,2p,3p,4p),(p+2,2p+2,3p+2,4p+2)$

共p组

事实上，就是$(i,p+i,2p+i,3p+i),i=1,2,3,\cdots,p$，且把$2$换成$4p+2$

此时$(k,k+p),p\geq 2$均可行，共$\mathrm{C}_{m+1}^{2}-m=\dfrac{1}{2}m(m-1)$组

$(0,1),(1,2),\cdots,(m-1,m)$不可行

综上，可行的$(4k+2,4r+1)$与$(4k+1,4r+2)$至少$\dfrac{1}{2}m(m-1)+\dfrac{1}{2}(m+1)(m+2)$组

故$P_m\geq \dfrac{\frac{1}{2}(2m^2+2m+2)}{\mathrm{C}_{4m+2}^{2}}=\dfrac{m^2+m+1}{(2m+1)(4m+1)}=\dfrac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1}>\dfrac{1}{8}$，得证！

解析二：

（1）$(i,j)=(1,6),(1,2),(5,6)$

（2）当$m=3$时，$a_1,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{12},a_{14}$

可分成三组：a_1,a_4,a_7,a_{10}；a_3,a_6,a_9,a_{12}；a_5,a_8,a_{11},a_{14}每组均为公差为$3d$的等差数列

$\therefore m=3$时符合.

$\therefore m>3$时，数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$去掉a_2,a_{13}以后，分成m组

只需让前面的3组还按$m=3$时的分法，即a_1,a_4,a_7,a_{10}；a_3,a_6,a_9,a_{12}；a_5,a_8,a_{11},a_{14}

后面的每4个相邻的项一组即可，即$a_{15},a_{16},a_{17},a_{18}$；$\cdots,a_{4m-1},a_{4m},a_{4m+1},a_{4m+2}$

每一组都能构成等差数列，$\therefore$数列$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$是$(2,13)-$可分数列.

（3）**法一：**当$m=1$时，数列：a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6为可分数列的概率为$P_m=\frac{3}{C_6^2}=\frac{1}{5}>\frac{1}{8}$

当$m=2$时，数列$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{10}$为可分数列的概率为$P_m=\frac{7}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}>\frac{1}{8}$

以此类推，且易知$1,2,\cdots,4m+2$是$(4k+1,4r+2)$可分的$(0\le k\le r\le m)$

此时共有$C_{m+1}^2+m+1=\frac{m(m+1)}{2}+m+1=\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$种

且易证数列也是$(4k+2,4r+1)$可分的$(0\le k<r\le m)$，至少有$C_{m+2}^2-m=\frac{1}{2}m(m-1)$

综上：可行的$(4k+2,4r+1)$与$(4k+1,4r+2)$至少

$\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}(m+1)(m+2)=m^2+m+1$组

$\therefore P_m\ge\frac{m^2+m+1}{C_{4m+2}^2}=\frac{m^2+m+1}{(2m+1)(4m+1)}=\frac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1}>\frac{1}{8}$.

法二：$a_1,a_2,\cdots,a_{4m+2}$为$(4x+1,4x+4y+2)$可分数列$(0\le x\le m,0\le y\le m-x)$

易证：$a_1,a_2,\cdots,a_{4x}$为连续$4x$项，$a_{4x+2},a_{4x+3},\cdots,a_{4x+4y+1}$为连续$4y$项

$\therefore a_{4x+4y+3}-a_{4m+2}$为连续$4(m-x-y)$项等差数列

$$P_m=\frac{\frac{(m+2)(m+1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}}{\frac{(4m+2)(4m+1)}{2}}=\frac{m^2+m+1}{(2m+1)(4m+1)}>\frac{1}{8}.$$

解析三：

（1）枚举法

$(i,j)=(1,2)$，剩余数列：a_3,a_4,a_5,a_6

$(i,j)=(1,3)$，剩余数列：a_2,a_4,a_5,a_6

$(i,j)=(1,4)$，剩余数列：a_2,a_3,a_5,a_6

$(i,j)=(1,5)$，剩余数列：a_2,a_3,a_4,a_6

$(i,j)=(1,6)$，剩余数列：a_2,a_3,a_4,a_5

$(i,j)=(2,3)$，剩余数列：a_1,a_4,a_5,a_6

$(i,j)=(2,4)$，剩余数列：a_1,a_3,a_5,a_6　　$(i,j)=(2,5)$，剩余数列：a_1,a_3,a_4,a_6

$(i,j)=(2,6)$，剩余数列：a_1,a_3,a_4,a_5　　$(i,j)=(3,4)$，剩余数列：a_1,a_2,a_5,a_6

$(i,j)=(3,5)$，剩余数列：a_1,a_2,a_4,a_6　　$(i,j)=(3,6)$，剩余数列：a_1,a_2,a_4,a_5

$(i,j)=(4,5)$，剩余数列：a_1,a_2,a_3,a_6　　$(i,j)=(4,6)$，剩余数列：a_1,a_2,a_3,a_5

$(i,j)=(5,6)$，剩余数列：a_1,a_2,a_3,a_4　　故符合条件的(i,j)为：$(1,2),(1,6),(5,6)$.

（2）证明：由题意下标和项是成等差的充要条件，故等差数列$a_1,a_2,\cdots a_{4m+2}$公差去掉第 2 和第 13 项，剩余数列为$a_1,a_3,a_4,\cdots a_{12},a_{14}$，可分为四组$(1,4,7,10),(3,6,9,12),(5,8,11,14)$，则其余$a_k,k\in[15,4m+2]$按照连续 4 个为一组即满足.

（3）证明：由（2）得数列$a_1,a_2,\cdots a_{4m+2}$是$(i,j)-$可分数列$\Leftrightarrow 1,2,\cdots,4m+2$是$(i,j)-$可分.

则$1,2,\cdots,4m+2$是$(4k+1,4k+2)$可分的，

因可分为$(1,2,3,4),(5,6,7,8),\cdots,(4k-3,4k-2,4k-1,4k)$和

$(4(s+1)-1,4(s+1),4(s+1)+1,4(s+1)+2),\cdots,(4m-1,4m,4m+1,4m+2)$，

共有$C_{m+1}^2+m+1=\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$种.

而$1\cdots4k$和$4s+2\cdots4m+2$是可分的，只需证$4k+1,4k+3,4k+4,\cdots,4s-1,4s,4s+2$是可分的.

令$t=s-k\in N^*$，只要证$1,3,4,5,\cdots,4t-1,4t,4t+2$是可分的，$1\cdots4t+2$去掉 2 和$4t+1$.

当$t=1$时，$(1,3,4,6)$不满足；当$t=2$时，$(1,3,5,7),(4,6,8,10)$满足；

当$t=3$时，$(1,4,7,10),(3,6,9,12),(5,8,11,14)$满足；

当$t=4$时，$(1,5,9,13),(3,7,11,15),(4,8,12,16),(6,10,14,18)$满足.

则$t\geq2$时，可划分为t组：

$(1,t+1,2t+1,3t+1),(3,t+3,2t+3,3t+3),(4,t+4,2t+4,3t+4),$

$\cdots,(t,2t,3t,4t),(t,2t+2,3t+2,4t+2)$.

本质即：$(i,t+i,2t+i,3t+i),i=1,2,3,\cdots,t$，且把 2 代换为$4t+2$，

则$(k,k+t),t\geq 2$均符合，共$C_{m+1}^{2}-m=\dfrac{m(m-1)}{2}$组.而$(0,1),(1,2),\cdots,(m-1,m)$不合要求.

综上可得：符合要求的$(4k+2,4t+1)$与$(4k+1,4t+2)$至少$\dfrac{m(m-1)}{2}+\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$组，

故$P_m\geq\dfrac{\frac{1}{2}(2m^2+2m+2)}{C_{4m+2}^{2}}=\dfrac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1}=\dfrac{1}{8-\dfrac{2m+7}{m^2+m+1}}>\dfrac{1}{8}$.

四

（1）、

$b=0$，此时

$$f(x)=\ln(\frac{x}{2-x})+ax$$

$$f'(x)=a+\frac{2}{x(2-x)}\geq 0$$

$$a\geq -\frac{2}{x(2-x)}$$

这个要恒成立，说明a必须大于$-\frac{2}{x(2-x)}$在$0<x<2$上的最大值，而

$$x(2-x)\leq \left(\frac{x+2-x}{2}\right)^2=1$$

即有

$$a\geq -\frac{2}{1}=-2$$

（2）、

$$f(x)=\ln(\frac{x}{2-x})+ax+b(x-1)^3$$

如果令$z=x-1$，会有

$$f(z+1)=\ln(\frac{1+z}{1-z})+az+a+bz^3$$

于是

$$f(-z+1)=\ln(\frac{1-z}{1+z})-az-bz^3=-f(z+1)$$

也就是说，$f(z+1)$其实是个奇函数，那也就是有$f(x)$关于$(1,f(1))$中心对称。

（3）、

首先，这个玩意不管怎么说，在$0<x<2$内都是连续函数，其值域不可能出现跳跃，既然$f(x)>-2$当且仅当$1<x<2$，那说明$0<x\leq 1$时必然有$f(x)\leq -2$.

然后我们来处理一个核心问题——连续性，要保证连续性，必须得有$f(1)=-2$，这里动用反证法：假设$f(1)=a<-2$，那么对任意正数$0<\delta<1$，都会有$f(1+\delta)>-2$，这说明在$x=1$这个点是不连续的，显然不可能，因此$f(1)=a=-2$必然成立。

也就是说

$$f(x)=\ln(\frac{x}{2-x})-2x+b(x-1)^3$$

（2）里面已经证明了$f(x)$关于$(1,f(1))$对称，也就是如果$1<x<2$时$f(x)>-2$，那一定会保证$0<x<1$时$f(x)<-2$，我们只需要解决一边就行了。

鉴于$f(1)=-2$，那要保证$x>1$时$f(x)>f(1)=-2$的一个必要条件，是$f'(1)\geq 0$，不过这里$f'(1)=0$，没啥好看的，我们被迫去看三阶导，即$f'''(1)\geq 0$。

$$f'''(x)=6b+\frac{2}{(2-x)^3}+\frac{2}{x^3}$$

$$f'''(1)=6b+4\geq 0$$

$$b\geq -\frac{2}{3}$$

此时

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2(-3bx^2+6b+2)}{x(2-x)}=\frac{(x-1)^2[-3b(x-1)^2+2+3b]}{x(2-x)}$$

当$b\geq 0$时

$$-3b(x-1)^2+2+3b\geq -3b(2-1)^2+2+3b=2>0$$

当$-\frac{2}{3}\leq b<0$时

$$-3b(x-1)^2+2+3b\geq 2+3b\geq 0$$

也就是说此时干脆$f(x)$在$1<x<2$内就是递增的。

那事情就结了，有

$$b\geq -\frac{2}{3}$$

五

（1）、

此时$4m+2=6$，$m=1$，简单的说就是6个成等差数列的数，从中踢掉2个，剩下4个还得是等差数列。

这个用脚趾头想都知道，你不能在中间踢，只能在边缘做文章，要么一边连踢两个，要么两边各踢一个，也就是有$(i,j)=(1,2),(5,6),(1,6)$这几种。

（2）、

首先我们来证明，只要$m=3$成立，那么所有$m\geq 3$都会成立。

$m=3$时，$4m+2=14$，那么当$m>3$时，整个$\{a_n\}$可以拆成两段，为$1\leq n\leq 14$和$n>14$，而不管m是几，$n=15,16,...,4m+2$里面，都是有$4m-12$个数的，也就是可以分为$m-3$组，而这$m-3$组只要按原来的顺序依次分组，就都是等差数列了。

因此只要前面$n\leq 14$的部分能分出来，后面就都没问题。

好了，接下来来证明$m=3$成立，这个不难，暴力穷举就行了，只要有一种方法成立就行，很随便就能实验出，在去掉$i=2,j=13$后，可以分为

$$(1,4,7,10),(5,8,11,14),(3,6,9,12)$$

这三组。

于是完事。

（3）、

首先，我们假设在给定m的情况下，其(i,j)组数为b_m。

当m变成了$m+1$时，数列变成了

$$a_1,a_2,a_3,a_4,\dots,a_{4m+2},a_{4m+3},a_{4m+4},a_{4m+5},a_{4m+6}$$

这里面可以分成3组，a_1,a_2,a_3,a_4一组，中间的...一组，最后面$a_{4m+3},a_{4m+4},a_{4m+5},a_{4m+6}$一组。

此时我们要在这些里面踢掉两个数，那么会如下几种情况：

一、两个都在中间

中间有$4m-2$个数，且为等差数列，踢掉的两个都在里面的话，总数为b_{m-1}种。

二、一个在第一组，一个在中间，或者都在第一组

第一组和中间组连起来，会变成一个$4m+2$个数的等差数列，这里面总共会有b_m种搞法，但要去掉两个都在中间的情况，故有b_m-b_{m-1}。

三、一个在中间，一个在最后，或者都在最后

和上面一样，也是b_m-b_{m-1}种。

四、一个在第一组，一个在最后

此时，将a_1,a_{4m+6}同时踢掉是肯定可以的，这算1组

然后，从（2）的结果来看，把a_2,a_{4m+5}同时踢掉，也是可以的，因为$m=3$成立之后，在$m>3$时，只是相当于往中间塞了4个连续的等差数而已，其他是不变的，这也得算1组。

那么综合上面，就会有

$$b_{m+1}\geq b_{m-1}+2(b_m-b_{m-1})+2=2b_m-b_{m-1}+2$$

这个如果套入$b_0=0,b_1=3$，会得到

$$b_m\geq m^2+2m$$

而如果你随便乱踢，总共有$C_{4m+2}^2=8m^2+6m+1$种，于是

$$P_m=\frac{b_m}{8m^2+6m+1}\geq\frac{m^2+2m}{8m^2+6m+1}>\frac{1}{8}$$