保密★使用前

泉州市2025届高中毕业班质量监测（三）

2025.03

高三数学

本试卷共19题，满分150分，共8页。考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 考生作答时，将答案答在答题卡上。请按照题号在各题的答题区域（黑色线框）内作答，超出答题区域书写的答案无效。在草稿纸、试题卷上答题无效。

3. 选择题答案使用2B铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号；非选择题答案使用0.5毫米的黑色中性（签字）笔或碳素笔书写，字体工整、笔迹清楚。

4. 保持答题卡卡面清洁，不折叠、不破损。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\mathbf{N}^{*}\cap\left\{x\middle|2^{x}<9\right\}=$

A．$\{1,2,3\}$　　B．$\{0,1,2,3\}$　　C．$\{1,2,3,4\}$　　D．$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

2. 已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，且$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

3. 已知复数$z=a+ai(a\neq 0,a\in\mathbf{R})$满足$|z-1|=1$，则

A．$a<0$　　B．$a=\sqrt{2}$　　C．$z\cdot\overline{z}=\sqrt{2}$　　D．$z+\overline{z}=2$

4. 已知圆柱的底面半径与球的半径均为1，且圆柱的侧面积等于球的表面积，则该圆柱的母线长等于

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

5. 已知$(2x+2)^{6}+a(x+1)^{3}$的展开式中x^{3}的系数为0，则a的值为

A．-1280　　B．-640　　C．640　　D．1280

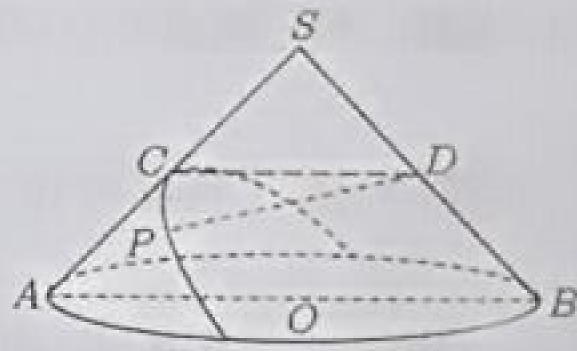
6. 已知抛物线$C: y^2=4x$的准线为l，点P在C上，以P为圆心的圆与l和x轴都相切，则该圆被y轴截得的弦长等于

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{3}$

7. 已知函数$f(x)=\sin x+(x+a)(x+1)$，若$\exists x\in(-2,0)$，$f(-x)=-f(x)$，则a的值可以是

A. -5　　B. -3　　C. 3　　D. 5

8. 如图，已知$\mathrm{Rt}\triangle SAB$是圆锥SO的轴截面，C, D分别为SA, SB的中点，过点C且与直线SA垂直的平面截圆锥，截口曲线Γ是抛物线的一部分．若P在Γ上，则$\dfrac{DP}{DC}$的最大值为



A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{26}}{4}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，有选错的得 0 分，部分选对的得部分分。

9. 有一组样本数据$1,2,3,4,5$，现加入两个正整数x, y构成新样本数据，与原样本数据比较，下列说法正确的是

A. 若平均数不变，则$x+y=6$　　B. 若极差不变，则$x+y=6$

C. 若$x+y=6$，则中位数不变　　D. 若$x+y=6$，则方差不变

10. 已知函数$f(x)=\sin 2x-2\sin x$，则

A. $f(x)$的最小正周期为2π　　B. 曲线$y=f(x)$关于直线$x=\dfrac{\pi}{2}$对称

C. $f(x)$在区间$[-2\pi,2\pi]$上有 4 个零点　　D. $f(x)$在区间$(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3})$内单调递减

11、已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=kn^2+n-k+2$，则下列说法正确的是

A、若$\{a_n\}$是等差数列，则$k=2$

B、若$\{a_n\}$不是递增数列，则$k\leq\frac{2}{3}$

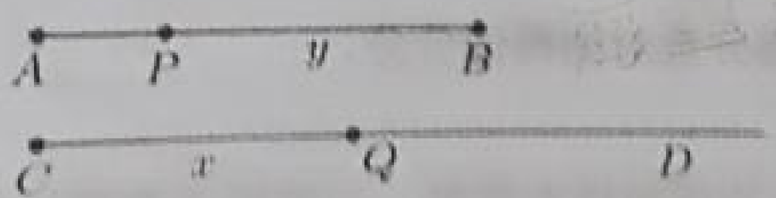
C、若$S_n<S_{n+2}$，则$k>2$

D、若$\frac{S_n}{n}$的最小值为3，则$k>\frac{2}{3}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12、等比数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2=1$，$a_4+a_5=8$，则$\{a_n\}$的前4项和等于________。

13、如图，假定两点P,Q以相同的初速度运动，点Q沿直线CD做匀速运动，$CQ=x$；点P沿线段AB（长度为10^7单位）运动，它在任何一点的速度值等于它尚未经过的距离$(PB=y)$，令P与Q同时分别从A,C出发，则数学家纳皮尔定义x为y的对数中，x与y的对应关系就是$y=10^7(\frac{1}{e})^{\frac{x}{10^7}}$，其中e为自然对数的底．若点$P$从线段$AB$的中点运动到靠近$B$的四等分点，点$Q$同时从$Q_1$运动到$Q_2$，则$\frac{CQ_1}{CQ_2}=$________。



14．设O为坐标原点，A为椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上顶点，点$B$在$E$上，线段$AB$交$x$轴于点$M$．若$\angle AOB=135°$，且$|BM|=\frac{4}{5}|AM|$，则$E$的离心率等于________。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

四边形 $ABCD$ 中，$AB // CD$，$\angle ABC = 45°$，$AB = 4$，$AC = \sqrt{5}BC$．

（1）求 $\sin\angle ACB$；

（2）若 $AD = \sqrt{17}$，求四边形 $ABCD$ 的面积．

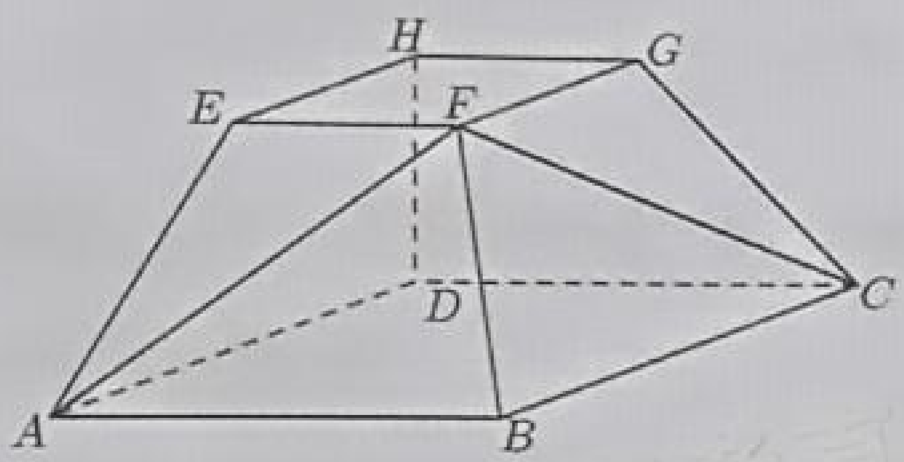
16.（15 分）

如图，四棱台 $ABCD-EFGH$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为4的菱形，$HD=HG=2$，$AE=2\sqrt{2}$，$FA=FC$．

（1）证明：HD // 平面 ACF；

（2）证明：$HD\perp$ 平面 $ABCD$；

（3）若该四棱台的体积等于 $\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$，且 $FA>FB$，求直线 BC 到平面 AFG 的距离．



17、（15 分）

设函数 $f(x)=e^{x+1}-x^2-kx$．

（1）当 $k=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上单调递增，求 k 的取值范围；

（3）当 $x\geqslant -1$ 时，$f(x)\geqslant f(-1)$，求 k 的取值范围．

18．（17分）

已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{16}=1$，点$M$在$C$上，过$M$分别作$x$轴和$y$轴的垂线，垂足分别为$A$和$B$，记线段$AB$的中点$N$的轨迹为$\Gamma$．

（1）求Γ的方程；

（2）过M的直线l与C有且只有一个公共点，且与Γ交于P,Q两点，

证明：（i）$l\perp AB$；（ii）$|MP|=|MQ|$．

19.（17分）

编号为$1,2,3,\cdots,n(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*)$的$n$个球依次被等可能地涂成黑色或白色，设编号为奇数的黑色球的个数为X，编号为偶数的白色球的个数为Y，记事件"$X>Y$"为A_n，$P(A_n)=a_n$.

（1）求$a_2,a_3,P(A_3\mid A_2)$；

（2）当$n=2k+1(k\in\mathbf{N}^*)$时，求a_n；

（3）当$n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$时，设$\xi=k+|X-Y|$，证明：$E(\xi)=2k(1-a_{2k})$.

泉州市2025届高中毕业班质量监测(三)

2025.03

高三数学参考答案与评分标准

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题序	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	B	A	D	B	C

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

题序	9	10	11
答案	AC	AD	ABD

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12．5　　13．$\frac{1}{2}$　　14．$\frac{\sqrt{7}}{4}$

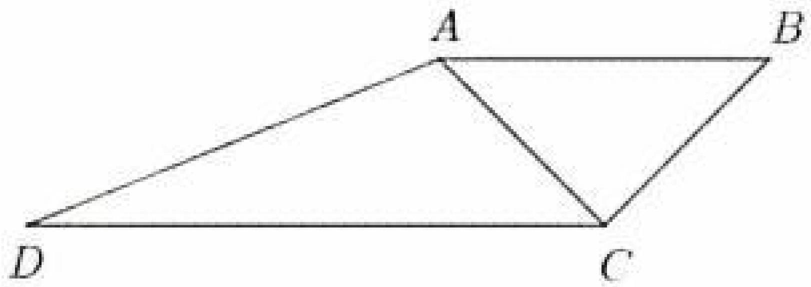
四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15．(13分)

【命题意图】

本题主要考解三角形等知识；考查运算求解能力、推理论证能力等；考查数形结合思想、函数与方程思想等；体现基础性、综合性，导向对发展数学运算、直观想象、逻辑推理等核心素养的关注.

【试题解析】



解法一：(1) 在$\triangle ABC$中，$AB=4$，$AC=\sqrt{5}BC$，$\angle ABC=45^\circ$，

由$AC^2=BC^2+AB^2-2BC\cdot AB\cdot\cos\angle ABC$，……1分

即$5BC^2=BC^2+16-8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot BC$，整理，得$BC^2+\sqrt{2}BC-4=0$

解得$BC=-2\sqrt{2}$(舍去)或$BC=\sqrt{2}$，……2分

又$AC=\sqrt{5}BC=\sqrt{10}$，……3分

由 $\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$，即 $\dfrac{4}{\sin\angle ACB}=\dfrac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ……………………………………, 5分

解得 $\sin\angle ACB=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………6分

(2) 因为 $AB /\!/ CD$，所以以 $\angle DCA=\angle BAC$，……………………………………7分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $\cos\angle BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

故 $\cos\angle DCA=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，……………………………………8分

在 $\triangle ACD$ 中，由 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos\angle DAC$，……………………………………9分

即 $17=10+CD^2-2\sqrt{10}\cdot CD\cdot\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，整理得 $CD^2-6CD-7=0$，

解得 $CD=-1$(舍去) 或 $CD=7$，……………………………………10分

在 $\triangle ABC$ 中，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin45^\circ=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2$ ……………………………………11分

由 $AB /\!/ CD$ 可得，$S_{\triangle ACD}=\dfrac{CD}{AB}\cdot S_{\triangle ABC}=\dfrac{7}{4}\times2=\dfrac{7}{2}$，……………………………………12分

故四边形 $ABCD$ 的面积为 $2+\dfrac{7}{2}=\dfrac{11}{2}$. ……………………………………13分

解法二：(1) 在 $\triangle ABC$ 中，由 $\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$，……………………………………1分

得 $\sin\angle BAC=\dfrac{BC}{AC}\cdot\sin\angle ABC=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，……………………………………3分

$\cos\angle BAC=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，……………………………………4分

$\sin\angle ACB=\sin(\angle ABC+\angle BAC)$，……………………………………5分

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}+\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ……………………………………6分

(2) 因为 $AB /\!/ CD$，所以 $\angle DCA=\angle BAC$，……………………………………7分

由 (1) 可得 $\cos\angle BAC=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，……………………………………8分

在 $\triangle ACD$ 中，由 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos\angle DAC$，……………………………………9分

即 $17=10+CD^2-2\sqrt{10}\cdot CD\cdot\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，整理得 $CD^2-6CD-7=0$，

解得 $CD=-1$(舍去) 或 $CD=7$，……………………………………10分

在 $\triangle ABC$ 中，AB 边上的高为 $BC\cdot\sin45^\circ=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$，……………………………………12分

故四边形 $ABCD$ 的面积为 $\dfrac{h}{2}\cdot(AB+CD)=\dfrac{11}{2}$. ……………………………………13分

16．(15分)

【命题意图】

本小题主要考查空间点、直线、平面间的位置关系等知识；考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力等；考查函数与方程思想、化归与转化思想等；体现基础性、综合性，导向对直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养的关注.

【试题解析】

解法一：(1) 连结 AC、BD，交于点 I，连结 FI，则 I 为 AC、BD 的中点，

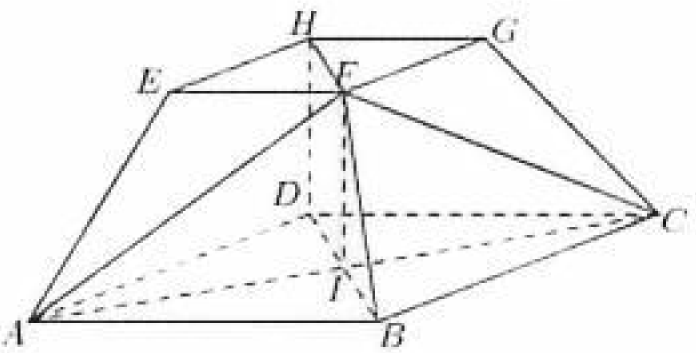
由四棱台 $ABCD-EFGH$，得平面 $ABCD$ // 平面 $EFGH$，……………………………………1分

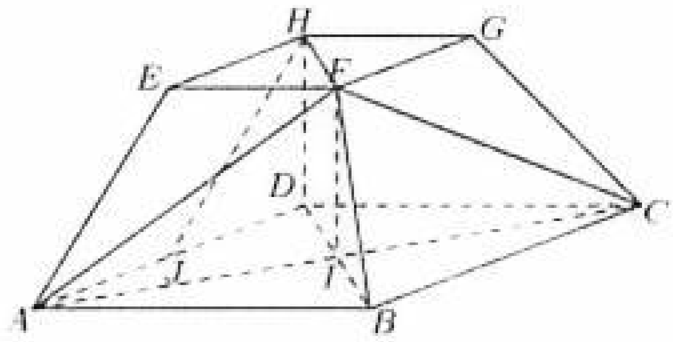
又平面 $BDHF\cap$ 平面 $ABCD=BD$，平面 $BDHF\cap$ 面 $EFGH=HF$，

所以 BD // HF，……………………………………………………………………………2分

又 $FH=\frac{1}{2}BD=ID$，所以四边形 $DHFI$ 为平行四边形，故 HD // FI，…………3分

又 $HD\not\subset$ 平面 ABC，$IF\subset$ 平面 ABC，所以 HD // 平面 ACF． ………………………4分





(2) 取 DA 的中点 J，连结 HJ，则 $HJ=EA=2\sqrt{2}$，$DJ=HD=2$，

所以 $DH^2+DJ^2=HJ^2$，所以 $HD\perp AD$，……………………………………………………5分

由 (1)，知 $AI=IC$，又 $FA=FC$，所以 $FI\perp AC$，……………………………………………6分

因为 FI // HD，所以 $HD\perp AC$，……………………………………………………………7分

又 AC、$AD\subset$ 平面 $ABCD$，$AC\cap AD=A$，(条件不完整扣1分)

所以 $HD\perp$ 平面 $ABCD$． ………………………………………………………………………9分

(3) 菱形 $ABCD$ 的面积 $S=2\times\frac{1}{2}\times AB\times AD\times\sin\angle BAD=16\sin\angle BAD$，

由四棱台 $ABCD-EFGH$ 且 $EH=\frac{1}{2}AD$，

可得 $S_{菱形EFGH}=\frac{1}{4}S_{菱形ABCD}=4\sin\angle BAD$，

四棱台 $ABCD-EFGH$ 的体积

$V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h=\frac{1}{3}\times 28\sin\angle BAD\times 2$，

从而 $\frac{1}{3}\times 28\sin\angle BAD\times 2=\frac{28\sqrt{3}}{3}$，…………………………………………10分

解得 $\sin\angle BAD=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

因为 $FA>FB$，$IA=\sqrt{FA^2-FI^2}$，$IB=\sqrt{FB^2-FI^2}$，所以 $IA>IB$，

故 $\tan\angle IAB=\frac{IB}{IA}<1$，从而 $\angle IAB<\frac{\pi}{4}$，所以 $\angle BAD\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，(没有判断 $\angle BAD$ 的范围或判断不严谨不扣分)…………11分

取 AB 的中点 K，则 DC、DH、DK 两两垂直，如图，以 D 为坐标原点，分别 $\overrightarrow{DK}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DH}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

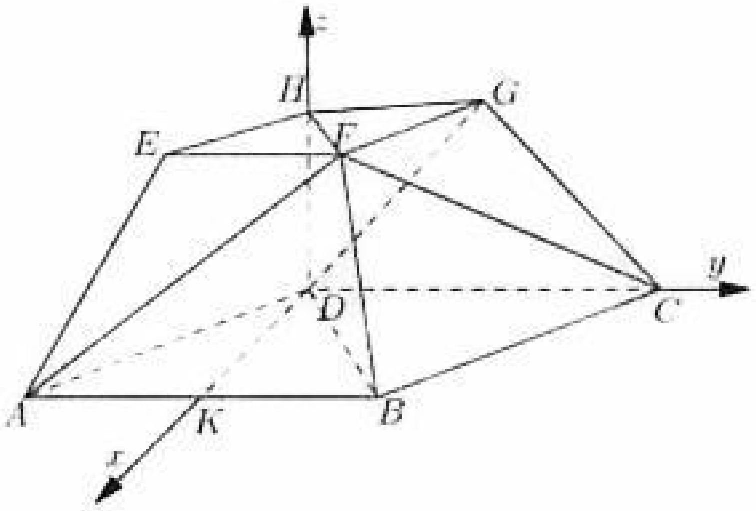
(空间直角坐标系不用右手系扣1分)……………………………………………………12分

则 $\overrightarrow{DA}=(2\sqrt{3},2,0)$，$\overrightarrow{DG}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{DC}=(0,4,0)$，

设平面 AFG 即平面 $ADGF$ 的法向量 $n=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{DA}=0, \\ n\cdot\overrightarrow{DG}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2\sqrt{3}x+2y=0, \\ 2y+2z=0. \end{cases}$ ……………………………………13 分

整理，得 $\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}y, \\ z=-y, \end{cases}$ 令 $y=-\sqrt{3}$，得 $n=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$，……………………14 分



从而点 C 到平面 AFG 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{DC}\cdot n|}{|n|}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$，

所以直线 BC 到平面 AFG 的距离为 $\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$. ……………………………………15 分

解法二：(1) 同解法一；……………………………………………………………………4 分

(2) 同解法一；……………………………………………………………………9 分

(3) 延长 BF,CG,AE 交于点 S，取 BC 的中点 M，连结 SM 交 FG 于点 N，连结 DM，DN，则 FG,SM 的中点均为 N，$BC\perp DM$，$BC\perp SD$，……………………10 分

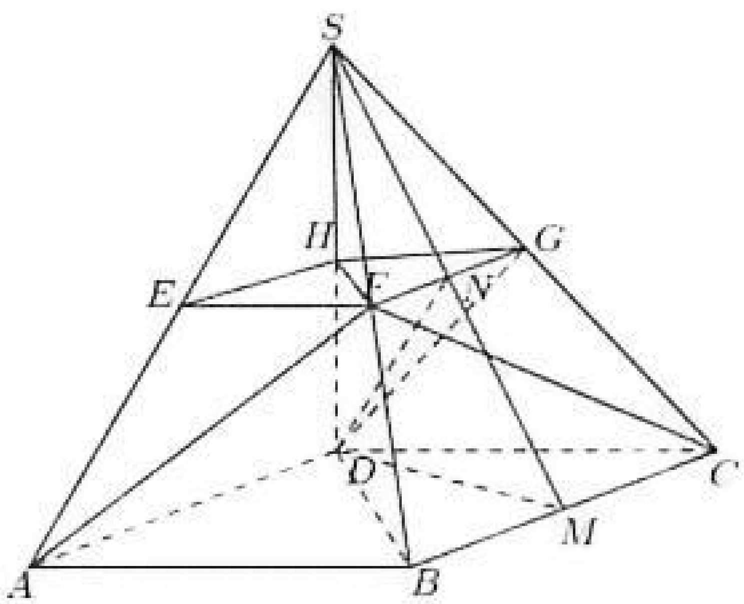
因为 $FG\parallel BC$，所以 $FG\perp DM$，$FG\perp SD$，

又 $DM,SD\subset$ 平面 SDM，$DM\cap SD=D$，所以 $FG\perp$ 平面 SDM，……………11 分

又 $FG\subset$ 平面 AFG，所以平面 $AFG\perp$ 平面 SDM，……………………………12 分

过点 M 作 $MK\perp DN$ 于 K，且平面 $AFG\cap$ 平面 $SDM=DN$，$MK\subset$ 平面 SDM，所以 $MK\perp$ 平面 AFG，

故 MK 为点 M 到平面 AFG 的距离即为直线 BC 到平面 AFG 的距离，……13 分



因为$ND=NM$，所以点M到DN的距离等于点D到NM的距离，

又$Rt\triangle SDM$中，$SD=4, DM=2\sqrt{3}, SM=2\sqrt{7}$，

设点D到NM的距离为d，则$S_{\triangle SDM}=\frac{1}{2}\times DS\times DM=\frac{1}{2}\times SM\times d$，…………14分

所以$4\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{7}d$，解得$d=\frac{4\sqrt{21}}{7}$，

所以直线BC到平面AFG的距离为$\frac{4\sqrt{21}}{7}$. ……………………………………15分

17.（15分）

【命题意图】

本小题主要考查函数与导数等知识；考查运算求解能力、逻辑推理能力等；考查函数与方程思想、化归与转化思想等；体现基础性、综合性、应用性，导向对发展直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养的关注.

【试题解析】

解法一：(1) 当$k=0$时，$f(x)=e^{x+1}-x^2$，则$f'(x)=e^{x+1}-2x$，……………………………1分

则曲线$y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的切线斜率为$f'(-1)=3$，……………………2分

又因为$f(-1)=e^0-(-1)^2=0$，……………………………………………………3分

所以曲线$y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的切线方程为$y=3x+3$. ……………………4分

(2)$f'(x)=e^{x+1}-2x-k$，

由题意得，$x\in[-1,+\infty)$，$f'(x)\geqslant 0$恒成立. ……………………………………5分

令$F(x)=f'(x)$，则$F'(x)=e^{x+1}-2$，且$F'(x)$在$[-1,+\infty)$单调递增，

令$F'(x)=0$，解得$x=\ln 2-1>-1$，……………………………………………………6分

所以当$x\in(-1,\ln 2-1)$时，$F'(x)<0$，故$F(x)$单调递减；

当$x\in(\ln 2-1,+\infty)$时，$F'(x)>0$，故$F(x)$单调递增；

所以$F(x)_{\min}=F(\ln 2-1)=4-2\ln 2-k$，……………………………………………7分

又$f'(x)\geqslant 0$，当且仅当$F(x)_{\min}\geqslant 0$，故$k\leqslant 4-2\ln 2$. ……………………………8分

(3) 因为$f(-1)=k$，所以题意等价于当$x>-1$时，$f(x)\geqslant k$.

即$\forall x\in(-1,+\infty)$，$e^{x+1}-x^2-kx\geqslant k$，……………………………………9分

(表述为当$x=-1$不等式显然成立，也给1分)

整理，得$e^{x+1}-x^2\geqslant k(x+1)$，

因为$x>-1$，所以$x+1>0$，故题意等价于$\frac{e^{x+1}-x^2}{x+1}\geqslant k$. ……………………10分

(参数变量分离得1分，没有分离该分不得)

设$G(x)=\frac{e^{x+1}-x^2}{x+1}$，$x\in(-1,+\infty)$，

$G(x)$的导函数$G'(x)=\frac{(e^{x+1}-2x)(x+1)-(e^{x+1}-x^2)}{(x+1)^2}$，

化简得$G'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}(e^{x+1}-x-2)$，……11分

考察函数$g(x)=e^x-x-1,x\in(-\infty,+\infty)$，其导函数为$g'(x)=e^x-1$，

当$x<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；当$x>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；

故在$x=0$时，$g(x)$取到最小值，即$g(x)\geqslant g(0)=0$，

即$e^x\geqslant x+1$，……12分

所以$e^{x+1}\geqslant x+2\Leftrightarrow e^{x+1}-x-2\geqslant 0$，……13分

(如果学生通过构造一般函数，证明当$x>-1$，不等式$e^{x+1}-x-2>0$成立，则该步骤得2分)

所以当$x\in(-1,0)$，$G'(x)<0$，$G(x)$单调递减；

当$x\in(0,+\infty)$，$G'(x)>0$，$G(x)$单调递增；

所以$G(x)$的最小值为$G(0)=e$，……14分

故$k\leqslant e$. ……15分

解法二：(1)同解法一；……4分

(2)同解法一；……8分

(3)先考察$f'(x)=e^{x+1}-2x$，由(2)分析可得$f'(x)_{\min}=f'(x_0)$，

情况1：当$f'(x)_{\min}\geqslant 0$，即$k\leqslant 4-2\ln 2$，

此时$f(x)$在区间$[-1,+\infty)$单调递增，

故$f(x)_{\min}=f(-1)$，即$f(x)\geqslant f(-1)$，符合题意；……9分

情况2：若$k>4-2\ln 2$，则$f'(x)_{\min}=f'(x_0)<0$，

注意到$2<4-2\ln 2<3$，且$f'(-1)=3-k$，故对k进一步讨论

① 当$k\geqslant 3$时，即$f'(-1)=3-k\leqslant 0$

且由(2)分析知：当$x\in(-1,x_0)$，$f'(x)$单调递减，

故当$x\in(-1,x_0)$，$f'(x_0)<f'(-1)\leqslant 0$，即$f(x)$单调递减，

故恒有$f(x)<f(-1)=k$，不符合题意，舍去；……10分

② 当$4-2\ln 2<k<3$时，

注意到在区间$(-1,x_0)$，$f'(x)$单调递减，且$f'(-1)=3-k>0$，又$f'(x_0)<0$，

故在区间$(-1,x_0)$存在唯一的x_1满足$f'(x_1)=0$；

同理在区间$(x_0,+\infty)$，$f'(x)$单调递增，且$f'(x_0)<0$，$f'(1)=e^2-2-k>0$，

故在区间$(x_0,+\infty)$存在唯一的x_2满足$f'(x_2)=0$；故可得

x	$(-1,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以当$x\in(-1,x_1)f(x)>f(-1)$，符合题意；

故题意等价于 $f(x_2)\geqslant f(-1)$，即 $f(x_2)\geqslant k$. ……………………………………………………11 分

又因为 $f'(x_2)=0$，即 $e^{x_2+1}-2x_2-k=0$，化简，得 $e^{x_2+1}=2x_2+k$

所以 $f(x_2)\geqslant k\Leftrightarrow 2x_2+k-x_2^2-kx_2\geqslant k$，整理得 $x_2[x_2-(2-k)]\leqslant 0$.

注意到 $2<4-2\ln2<k$，所以 $2-k<0$，

故解得 $x_2\in[2-k,0]$，……………………………………………………12 分

由之前分析得 $\begin{cases}f'(2-k)\leqslant 0,\\ f'(0)\geqslant 0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}e^{3-k}\geqslant 4-k,\\ k\leqslant e.\end{cases}$ ……………………………………………………13 分

考察函数 $g(x)=e^x-x-1, x\in(-\infty,+\infty)$，其导函数为 $g'(x)=e^x-1$，

当 $x<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

故在 $x=0$ 时，$g(x)$ 取到最小值，即 $g(x)\geqslant g(0)=0$，

即 $e^x\geqslant x+1$，所以 $e^{3-k}\geqslant 4-k$ 恒成立，

故 $\begin{cases}e^{3-k}\geqslant 4-k,\\ k\leqslant e.\end{cases}\Leftrightarrow k\leqslant e$，又注意到情况②讨论范围为 $4-2\ln2<k<3$，

所以 $4-2\ln2<k\leqslant e$ 也符合题意. ……………………………………………………14 分

综上①②，本题所求 k 的取值范围为 $(-\infty,e]$. ……………………………………………………15 分

解法三：(1) 同解法一；……………………………………………………4 分

(2) 同解法一；……………………………………………………8 分

(3) 先探究必要性，由题意知当 $x\geqslant -1$ 时，$f(-1)f(x)$ 的最小值，

则必要地 $f(-1)\leqslant f(0)$，即得到必要条件为 $k\leqslant e$；……………………………………………………9 分

下证 $k\leqslant e$ 的充分性，即证：当 $k\leqslant e$ 时，$x\in[-1,+\infty)$，$f(x)\geqslant f(-1)$.

证明：由 (2) 可知当 $k\leqslant 4-2\ln2$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 单调递增，

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(-1)$，$f(x)\geqslant f(-1)$，符合题意；……………………………………………………10 分

故只需要证明 $4-2\ln2<k\leqslant e$ 时，$f(x)\geqslant f(-1)$.

由 (2) 分析知 $k>4-2\ln2$ 时，

x	$(-1,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

其中 $x_0=-1+\ln2\in(-1,0)$，$x_1\in(-1,x_0)$，$x_2\in(x_0,+\infty)$.

注意到 $f'(0)=e-k\geqslant 0$，据此可得 x_2 更精确的范围是 $(x_0,0]$；……………………………………………………11 分

所以等价于证明 $f(x_2)\geqslant f(-1)=k$，……………………………………………………12 分

又因为 $f'(x_2)=0$，即 $e^{x_2+1}-2x_2-k=0$，可得 $e^{x_2+1}=2x_2+k$,

只需证明 $f(x_2)\geqslant k\Leftrightarrow 2x_2+k-x_2^2-kx_2\geqslant k$，

等价于证明 $x_2[x_2-(2-k)]\leqslant 0$，……………………………………………………13 分

注意到 $x_2\in(x_0,0]$，即 $-1+\ln2<x_2<0$，

故若①当 $x_2=0$，此时 $k=\mathrm{e}$，$x_2[x_2-(2-k)]\leqslant 0$ 显然成立；

若②当 $x_2<0$，只要证明 $x_2+k\geqslant 2$，

此时 $4-2\ln2<k<\mathrm{e}$，且 $-1+\ln2<x_2<0$

所以 $x_2+k>3-\ln2>2$，故得证. ……………………………………………………14分

综上必要性、充分性的分析，本题所求 k 的取值范围为 $(-\infty,\mathrm{e}]$. ……………………15分

18．(17分)

【命题意图】

本题主要考查双曲线的几何性质、直线与双曲线的位置关系等基础知识；考查运算求解、推理论证等能力；考查化归与转化、数形结合、函数与方程等思想；体现基础性与综合性，导向对数学运算、直观想象、逻辑推理等核心素养的关注.

【试题解析】

解：(1) 设 $N(x,y)$，$M(x_0,y_0)$，则 $A(x_0,0)$，$B(0,y_0)$，$\dfrac{x_0^2}{16}-\dfrac{y_0^2}{16}=1$. ……………………2分

又线段 AB 的中点为 N，所以 $\begin{cases}x=\dfrac{x_0}{2},\\ y=\dfrac{y_0}{2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_0=2x,\\ y_0=2y.\end{cases}$ ① ……………………3分

将①代入 $\dfrac{x_0^2}{16}-\dfrac{y_0^2}{16}=1$，得 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

所以 Γ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………………4分

(2) ①当 l 的斜率不存在时，直线 AB 为 x 轴，显然 $l\perp AB$；

由双曲线的对称性，也易得 $|MP|=|MQ|$. ……………………………………………………6分

② (i) 当 l 的斜率存在时，设 l 的方程为 $y=kx+b(k\neq\pm1)$，则 $y_0=kx_0+b$. ………7分

由 $\begin{cases}y=kx+b,\\ \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{16}=1\end{cases}$ 消去 y，可得 $(1-k^2)x^2-2kbx-(b^2+16)=0$，……………8分

所以 $\Delta=4k^2b^2+4(1-k^2)(b^2+16)=0$，化简，得 $b^2=16(k^2-1)$. ……………………9分

将 $b=y_0-kx_0$ 代入 $b^2=16(k^2-1)$，得 $(y_0-kx_0)^2=16(k^2-1)$，

$(x_0^2-16)k^2-2kx_0y_0+y_0^2+16=0$，……………………………………………………10分

又 $x_0^2-16=y_0^2$，$y_0^2+16=x_0^2$，

所以 $y_0^2k^2-2kx_0y_0+x_0^2=0$，$(y_0k-x_0)^2=0$，解得 $k=\dfrac{x_0}{y_0}$. ……………………11分

又 $k_{AB}=\dfrac{y_0-0}{0-x_0}=-\dfrac{y_0}{x_0}$，所以 $k\cdot k_{AB}=-1$. 故 $l\perp AB$. ……………………12分

(ii) 设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y=kx+b,\\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$消去 y，可得 $(1-k^2)x^2-2kbx-(b^2+4)=0$，……………………13分

当 $\Delta=4k^2b^2+4(1-k^2)(b^2+4)=4(b^2+4-4k^2)>0$ 时，

由韦达定理，得 $x_1+x_2=\dfrac{2kb}{1-k^2}=\dfrac{2\dfrac{x_0}{y_0}\left(y_0-x_0\cdot\dfrac{x_0}{y_0}\right)}{1-\left(\dfrac{x_0}{y_0}\right)^2}=\dfrac{2x_0(y_0^2-x_0^2)}{y_0^2-x_0^2}=2x_0$，……………15分

即 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$. ……………………………………………16分

所以点 M 为 PQ 的中点，即 $|MP|=|MQ|$.

综合①②，$l\perp AB$; $|MP|=|MQ|$. ……………………………………17分

19．（17分）

【命题意图】

本题主要考查概率、离散型随机变量的期望、组合数以及性质、数列等知识；考查抽象概括能力、推理论证能力、运算求解能力、应用意识以及创新意识；考查特殊与一般思想、化归与转化思想等；体现综合性、创新性、应用性，导向对发展数学运算、数学抽象、数学建模等核心素养的关注.

【试题解析】

解法一：(1) 由涂黑色且编号为奇数的球的号码和涂白色且编号为偶数的球的号码构成的集合表示样本点，则2个球涂色共有4个基本事件，分别为 $\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$，$\varnothing$，

其中符合 A_2 的基本事件的有1个，故 $a_2=\dfrac{1}{4}$；（答案对，没有过程不扣分）…2分

同理1,2,3三个球涂色，有8个基本事件，

其中符合 A_3 的基本事件个有4个，分别为 $\{1\}$，$\{3\}$，$\{1,3\}$，$\{1,2,3\}$，

故 $a_3=\dfrac{1}{2}$，（答案对，没有过程不扣分）……………………………3分

又 $A_2\cap A_3=A_2$，………………………………………………4分

故 $P(A_3|A_2)=\dfrac{P(A_2\cap A_3)}{P(A_2)}=\dfrac{P(A_2)}{P(A_2)}=1$. ……………………………5分

（答案对，得到第4,5两分；答案错，回看是否有第4分）

(2) 考察前 $2k$ 个球的涂黑色情况，分为三类.（正确分类得此分）…………………6分

第一类："奇数号的黑球个数多于偶数号白球个数"为事件 A_{2k}；

第二类："偶数号的白球个数多于奇数号的黑球个数"事件，记为 B_{2k}，其概率为 b_{2k}，显然 B_{2k} 事件是偶数号白球的个数比奇数号黑球的个数至少多1个，

所以无论第 $2k+1$ 个球涂黑色还是白色，都不符合 A_{2k+1} 事件，

即 $P(A_{2k+1}|B_{2k})=0$；……………………………………………7分

第三类：记"偶数号白球个数与奇数号黑球个数相等"事件为 C_{2k}，其概率为 c_{2k}，

则 $P(A_{2k+1}|C_{2k})=\frac{1}{2}$；……………………………………………………………………7 分

(出现两处第 7 分，只要这两个条件概率能写出一个就得到第 7 分)

这三类的事件两两互斥，且概率之和为 1，即 $a_{2k}+b_{2k}+c_{2k}=1$. ……………………8 分

根据对称性可得，第一类与第二类的基本事件个数相同，即 $a_{2k}=b_{2k}$. …………9 分

(只要写出 $a_{2k}=b_{2k}$，或者文字表达相同的意思都可以得到第 9 分)

由全概率公式知

$P(A_{2k+1})=P(A_{2k})\cdot P(A_{2k+1}|A_{2k})+P(B_{2k})\cdot P(A_{2k+1}|B_{2k})+P(C_{2k})\cdot P(A_{2k+1}|C_{2k})$

得到 $a_{2k+1}=1\cdot a_{2k}+0\times b_{2k}+\frac{1}{2}c_{2k}=a_{2k}+\frac{1}{2}c_{2k}=\frac{1}{2}$. ……………………………10 分

(只要能正确用 a_{2k}, b_{2k}, c_{2k} 表示 a_{2k+1} 证明结论，即可得第 10 分，缺全概率公式不扣分)

(3) 设 $\eta=X-Y$，则 η 可取 $0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm k$，故 ξ 可取 $k, k+1, k+2, \cdots, 2k$，

根据对称性 $P(\eta=\mathrm{i})=P(\eta=-\mathrm{i}), \mathrm{i}=1,2,\cdots,k$，……………………………………11 分

(能发现此规律即可得第 11 分)

且 $P(\eta=\mathrm{i})=\dfrac{C_k^0C_k^i+C_k^1C_k^{i+1}+\cdots+C_k^{k-i}C_k^k}{2^{2k}}$.

根据组合数的对称性 $C_k^i=C_k^{k-i}, \mathrm{i}=1,2,\cdots,k$，

可得 $P(\eta=\mathrm{i})=\dfrac{C_k^kC_k^i+C_k^{k-1}C_k^{i+1}+\cdots+C_k^iC_k^k}{2^{2k}}=\dfrac{C_{2k}^{k+i}}{2^{2k}}$，……………………………12 分

(能化简成 $\dfrac{C_k^0C_k^1+C_k^1C_k^2+\cdots+C_k^{k-1}C_k^k}{2^{2k}}=\dfrac{C_{2k}^{k-1}}{2^{2k}}$ 也同样得第 12 分)

(若并没有直接证明 $P(\xi=k+\mathrm{i})=2\times\dfrac{C_{2k}^{k+i}}{2^{2k}}, \mathrm{i}=1,2,\cdots k$，通过以下【】得到该结论同样得到 12 分)

【其中当 $\mathrm{i}=1$ 时，$P(\xi=k+1)=P(\eta=1)+P(\eta=-1)=2P(\eta=1)$，

其中 $P(\eta=1)=\dfrac{C_k^0C_k^1+C_k^1C_k^2+\cdots+C_k^{k-1}C_k^k}{2^{2k}}$，

根据组合数的对称性 $C_k^i=C_k^{k-i}, \mathrm{i}=1,2,\cdots,k$，

所以 $P(\eta=1)=\dfrac{C_k^kC_k^1+C_k^{k-1}C_k^2+\cdots+C_k^1C_k^k}{2^{2k}}=\dfrac{C_{2k}^{k+1}}{2^{2k}}$，

所以 $P(\xi=k+1)=2\times\dfrac{C_{2k}^{k+1}}{2^{2k}}$，

同理可得，$P(\xi=k+\mathrm{i})=2\times\dfrac{C_{2k}^{k+i}}{2^{2k}}, \mathrm{i}=1,2,\cdots k$，】

从而 $E(\xi)=k\cdot P(\xi=k)+(k+1)\cdot P(\xi=k+1)+\cdots+(2k)\cdot P(\xi=2k)$，

整理，得 $E(\xi)=k\cdot P(\xi=k)+\sum\limits_{i=1}^{k}(k+i)\dfrac{2C_{2k}^{k+i}}{2^{2k}}$

$=k\cdot P(\xi=k)+\dfrac{2}{2^{2k}}\sum\limits_{i=1}^{k}(k+i)C_{2k}^{k+i}$. ……………………………………13 分

(能将连加符号中与i无关的系数提取,从而简化得到第13分;或者在无连加符号的期望表达式中提取公因式也一样得到第13分)

又 $rC_n^r = r\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} = n\dfrac{(n-1)(n-2)\cdots[(n-1)-(r-1)+1]}{(r-1)!}$

$= nC_{n-1}^{r-1}$,

所以 $rC_n^r = nC_{n-1}^{r-1}$, ……………………………………………………………14分

从而 $(k+i)C_{2k}^{k+i} = 2kC_{2k-1}^{k+i-1}$. ……………………………………………………15分

(写对公式1分,证明1分)

所以 $E(\xi) = k\cdot P(\xi=k) + \dfrac{2\times 2k}{2^{2k}}\sum\limits_{i=1}^{k}C_{2k-1}^{k+i-1} = k\cdot P(\xi=k) + \dfrac{k}{2^{2k-1}}\sum\limits_{i=1}^{k}2C_{2k-1}^{k+i-1}$,

又 $\sum\limits_{i=1}^{k}2C_{2k-1}^{k+i-1} = 2(C_{2k-1}^{k} + C_{2k-1}^{k+1} + \cdots + C_{2k-1}^{2k-1})$

$= (C_{2k-1}^{0} + C_{2k-1}^{1} + \cdots + C_{2k-1}^{k-1} + C_{2k-1}^{k} + C_{2k-1}^{k+1} + \cdots + C_{2k-1}^{2k-1})$

根据 $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$,可得 $\sum\limits_{i=1}^{k}2C_{2k-1}^{k+i-1} = 2^{2k-1}$. ……………………………16分

可得 $E(\xi) = k\cdot P(\xi=k) + \dfrac{k}{2^{2k-1}}2^{2k-1} = k\cdot P(\xi=k) + k$.

由(2)知 $c_{2k} = P(|X-Y|=0) = P(\xi=k)$,所以 $E(\xi) = k\cdot c_{2k} + k$,

又由(2)知 $2a_{2k} + c_{2k} = 1$,可得 $c_{2k} = 1 - 2a_{2k}$,

所以 $E(\xi) = k(1-2a_{2k}) + k = 2k(1-a_{2k})$. ……………………………………………17分

【证明 $rC_n^r = nC_{n-1}^{r-1}$ 的另一方法:考察"从 n 个同学中选出 $r(1\leqslant r\leqslant n)$ 个同学组成班委,再从班委中选出一个同学担任班长"的所有方案数.

方法一,先选班委再选班长,则方案数为 $C_n^rC_r^1$;方法二,先选班长,再选剩下的班委,则方案数为 $C_n^1C_{n-1}^{r-1}$.故 $rC_n^r = nC_{n-1}^{r-1}$】

解法二:(1)记事件"编号为i的球被涂黑色"为 B_i,则 $P(B_i) = \dfrac{1}{2}$

$A_2 = B_1B_2$,且 B_1, B_2 相互独立,所以 $a_2 = P(A_2) = \dfrac{1}{4}$, ……………………………………2分

同理,可得 $A_3 = B_1\bar{B}_2\bar{B}_3 \cup \bar{B}_1\bar{B}_2B_3 \cup B_1\bar{B}_2B_3 \cup B_1B_2B_3$,

所以 $P(A_3) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, ……………………………………………………………………………3分

事件 $A_2A_3 = B_1B_2B_3 \cup B_1B_2\bar{B}_3$,

所以 $P(A_2A_3) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$, ……………………………………………4分

故 $P(A_3|A_2) = \dfrac{P(A_2A_3)}{P(A_2)} = 1$. ……………………………………………………………5分

(2)记事件"编号为奇数的 $k+1$ 个球中,被涂成黑色的球的个数为i"为 C_i,

事件"编号为偶数的 k 个球中,被涂成白色的球的个数小于i"为 D_i,

则 $A_{2k+1}=C_1D_1\cup C_2D_2\cup\cdots\cup C_{k+1}D_{k+1}$，……………………………………………………6 分

且 $C_1D_1,C_2D_2,\cdots,C_{k+1}D_{k+1}$ 两两互斥，

所以 $a_{2k+1}=P(A_{2k+1})=P(C_1D_1\cup C_2D_2\cup\cdots\cup C_{k+1}D_{k+1})$

$=P(C_1D_1)+P(C_2D_2)+\cdots+P(C_{k+1}D_{k+1})$……………………………………7 分

又 $P(C_iD_i)=\frac{1}{2^{2k+1}}C_{k+1}^{i}(C_k^0+C_k^1+\cdots+C_k^{i-1})$，

所以 $a_{2k+1}=\frac{C_{k+1}^1C_k^0+\cdots+C_{k+1}^i(C_k^0+C_k^1+\cdots+C_k^{i-1})+\cdots+C_{k+1}^{k+1}(C_k^0+\cdots+C_k^k)}{2^{2k+1}}$……8 分

设 $S_k=C_{k+1}^1C_k^0+\cdots+C_{k+1}^i(C_k^0+C_k^1+\cdots+C_k^{i-1})+\cdots+C_{k+1}^k(C_k^0+\cdots+C_k^{k-1})$，

则 $S_k=C_{k+1}^0(C_k^0+\cdots+C_k^{k-1})+\cdots+C_{k+1}^{k+1-i}(C_k^0+C_k^1+\cdots+C_k^{i-1})+\cdots+C_{k+1}^kC_k^0$，

故 $2S_k=(C_{k+1}^1+\cdots+C_{k+1}^i+\cdots+C_{k+1}^k)(C_k^0+\cdots+C_k^{k-1}+C_k^k)=2^k(2^{k+1}-2)$，…………9 分

从而 $S_k=2^k(2^k-1)$，所以 $a_{2k+1}=\frac{2^{2k}-2^k+2^k}{2^{2k+1}}=\frac{1}{2}$．……………………………………10 分

(以上过程用连加符号书写的同样给分)

(3) 同解法一．……………………………………………………………………………………17 分

解法三：(1) 同解法一或解法二；……………………………………………………………………5 分

(2) 知 $2k+1$ 个球涂色的所有基本事件总数为 2^{2k+1}，……………………………………6 分

将涂色的情况对应为集合 $U=\{1,2,3,\cdots,2k+1\}$ 的子集 X，

其中子集 X 中的元素为涂黑色的奇数球的编号以及涂白色的偶数球的编号，

不同子集个数恰为 2^{2n+1}，且基本事件与每个子集一一对应，……………………………7 分

比如子集 $\{1,2\}$ 表示在奇数号 $1,3,5,\cdots,2k+1$ 中只有 1 号球涂了黑色，其余的奇数球 $3,5,\cdots,2k+1$ 都涂了白色；同时偶数号 $2,4,6,\cdots,2k$ 中只有 2 号球涂了白色，其余的偶数球都涂了黑色．注意到，这 $2k+1$ 个数中，奇数的个数恰比偶数的个数多一个，故若子集 X 中奇数的个数多于偶数的个数，

则 X 的补集 $\complement_UX$ 必是奇数的个数少于或等于偶数的个数；……………………8 分

若子集 X 中奇数的个数不多于偶数的个数，

则 X 的补集 $\complement_UX$ 必是奇数的个数多于偶数的个数，

比如：$\{1,2\}$ 是不符合 A_{2k+1} 事件，

那么 $\{1,2\}$ 的补集 $\{3,4,5,\cdots,2k+1\}$ 符合 A_{2k+1}．

所以 A_{2k+1} 包含的基本事件与其对立事件 $\overline{A_{2k+1}}$ 包含的基本事件一一对应，

故 $P(A_{2k+1})=P(\overline{A_{2k+1}})$，…………………………………………………………9 分

又因为 $P(A_{2k+1})+P(\overline{A_{2k+1}})=1$，故 $P(A_{2k+1})=\frac{1}{2}$，即 $a_{2k+1}=\frac{1}{2}$．……………10 分

(本解法需要合理的文字说明；只要意思正确、本质相同的不扣分；跳步严重的酌情扣 2－4 分)

(3) 同解法一． 17 分