龙岩市2026届高中毕业班适应性练习

数 学 试 题

（满分：150分　考试时间：120分钟）

注意事项：

1. 考生将自己的姓名、准考证号及所有的答案均填写在答题卡上.
2. 答题要求见答题卡上的“填涂样例”和“注意事项”.

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\},B=\{x\mid x^2-x-2<0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{-1,1\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 已知数据:1,2,2,3,3,3,5,5，将这组数据中的每个数值都加上3后，与原始数据相比，调整后的数据中不会发生改变的是

A. 方差　　B. 众数　　C. 中位数　　D. 平均数

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 为 $1,2,4,8,\cdots$．若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\log_2 a_n$，且 b_4 是 b_2 与 b_k 的等比中项，则实数 k 的值为

A. 8　　B. 10　　C. 12　　D. 16

4. 已知 $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha+\sin 2\alpha}=\dfrac{3}{2}$，则 $\tan\alpha$ 的值为

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 2

5. 已知事件 A,B 满足 $P(A)=\dfrac{1}{2},P(AB)=\dfrac{1}{8}$，则 $P(\overline{B}|A)$ 的值为

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{5}{8}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

6. 已知圆 $(x+1)^2+y^2=16$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 交于 M,N 两点．若 $|MN|=4\sqrt{3}$，则 p 的值为

A. 6　　B. 12　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 1\}$，满足 $f(x)=f(2-x)$，当 $x>1$ 时，$f(x)=\log_8 x-\log_x 4$．若 $f(a)=-\frac{1}{3}$，则实数 a 的值为

A. $\frac{1}{8}$　　B. 4　　C. -2 或 $\frac{1}{8}$　　D. -2 或 4

8. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为正方形，$PA=AB=2$，点 M 为正方形 $ABCD$ 内部（不含边界）的一点，且 $MD+MA=4$，则直线 PM 与直线 BC 所成角的余弦值的取值范围为

A. $(0,\frac{4\sqrt{41}}{41})$　　B. $(0,\frac{2\sqrt{41}}{41})$　　C. $(\frac{4\sqrt{41}}{41},\frac{\sqrt{2}}{2})$　　D. $(\frac{2\sqrt{41}}{41},\frac{\sqrt{2}}{2})$

二、多项选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知复数 z 满足 $z(1-\mathrm{i})=1+3\mathrm{i}$，则

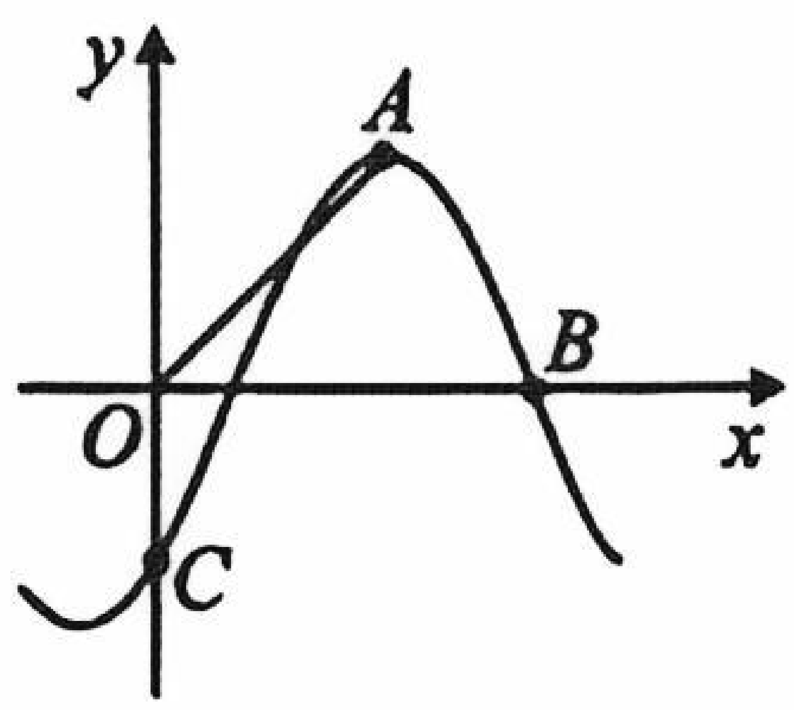
A. $|z|=\sqrt{5}$

B. $\bar{z}$ 在复平面内所对应的点在第三象限

C. 若 $|w-z|=1$，则 $|w|$ 的最大值为 $\sqrt{5}$

D. z 和 $\bar{z}$ 是方程 $x^2+2x+5=0$ 在复数范围内的两个根

10. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，A 为图象的最高点，$B(\frac{5}{2},0),C(0,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 分别为图象与 x 轴，y 轴的交点，则



A. $\cos\angle AOC=-\frac{2\sqrt{13}}{13}$

B. $x=\frac{9}{2}$ 为 $f(x)$ 的一条对称轴

C. 函数 $y=xf(x+\frac{1}{2})+1$ 在 $[-4,4]$ 上有且只有 4 个零点

D. 若 $f(x)$ 在区间 $[a,a+1]$ 上的最大值为 M，则 $\frac{\sqrt{2}}{4}\leq M\leq 1$

11、已知不共线的平面向量$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{a}$，满足$|\boldsymbol{m}|=2\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|-|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}|=4$，且$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{m}=4$，则

A. $\boldsymbol{m}$与$\boldsymbol{n}$的夹角的取值范围为$(0,\frac{\pi}{4})$

B. 当$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=8$时，$|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}|=4$

C. 当$|\boldsymbol{n}|=2\sqrt{3}$时，$|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{a}|$的最小值为$\sqrt{2}$

D. 对于给定的$\boldsymbol{n}$，记$|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{a}|$的最小值为$d(\boldsymbol{a})$，则$\frac{d(\boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

三、填空题：本大题共3小题，每小题5分，共15分.

12. $(1+2x)^5$的展开式中含x^3项的系数为__________.

13. 已知圆锥的轴截面是等边三角形，且该圆锥的顶点和底面的圆周都在球O的球面上，则该圆锥与球O的体积的比值为__________.

14. 已知数列$\{a_n\}$，设$b_n=\frac{n}{a_{2n}}$，$c_n=(2n-1)a_{2n-1}$. 若$b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{3n^2+n}{4}$，$c_1\cdot c_2\cdot\cdots\cdot c_n=\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}$，其中$\lambda\in(\frac{7}{5},\frac{5}{3})$，当$a_n$取得最小值时，$n=$__________.

四、解答题：本大题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. （13分）

在ΔABC中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\sqrt{3}a\cos C-c\sin A=0$.

（1）求C；

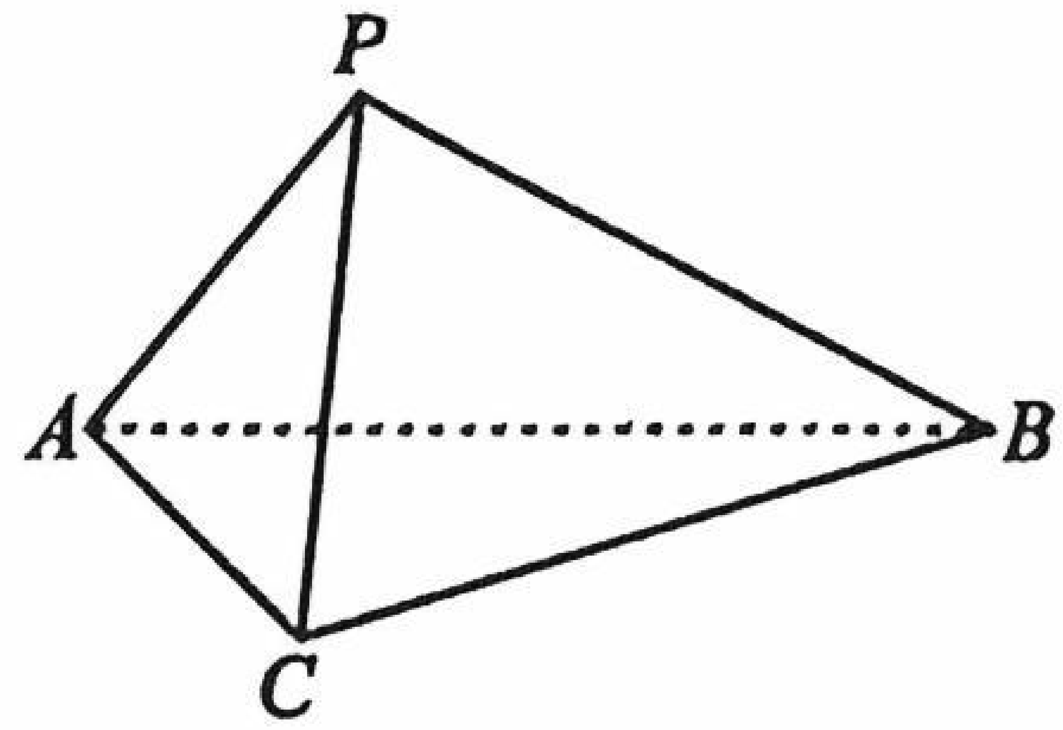
（2）若AB边上的中线CD的长为2，求ΔABC面积的最大值.

16. （15分）

已知三棱锥$P-ABC$，ΔABC与ΔPAB都是边长为2的等边三角形.

（1）若$PC=\sqrt{6}$，证明：平面$ABP\perp$平面ABC；

（2）若二面角$P-AB-C$的大小为$\frac{\pi}{3}$，求直线PB与平面PAC所成角的正弦值.



17. （15分）

某逃脱关卡游戏的最后一关有3扇外观有细微差异的传送门，其中仅有1扇传送门可通往安全出口，资深玩家可以识别细微差异，新手玩家无法识别这种差异. 该关卡的游戏规则为：每位玩家每次仅选1扇传送门尝试，选对且走出安全出口，游戏结束，选错则重新选择. 规定每位玩家至多有10次尝试的机会，且每次尝试后传送门的顺序会随机调整. 现有新手玩家A和资深玩家B独立挑战该关卡，玩家A每次均从3扇门中等可能随机选择1扇门尝试，各次选择相互独立；玩家B每试错1扇门，下次则不重复选择已选错的门. 设挑战结束时，随机变量X,Y分别为玩家A,B尝试的次数.

（1）求$P(Y>X)$；

（2）求证：$E(X)<3$.

18. （17分）

已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，$E$的短轴长为双曲线$y^2-\dfrac{x^2}{3}=1$的实轴长，且$E$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 点$A$为$E$的上顶点，点$B$为$E$的右顶点，点$P$的坐标为$(1,0)$.

（1）求E的方程；

（2）若过点P的直线l与E交于M,N两点，设$M\left(x_1,y_1\right),M_1\left(4,y_1\right)$，其中$y_1>0$，直线$M_1N$交$x$轴于点$Q$. 若四边形$MPQM_1$为等腰梯形，求$l$的方程；

（3）若直线$y=-\dfrac{1}{2}x+t(-\sqrt{2}<t<1)$与$E$交于$C,D$两点，求四边形$ABCD$面积$S\left(t\right)$的最大值.

19. （17分）

已知函数$f(x)=x\ln x$.

（1）求$f(x)$的极小值点；

（2）已知$2f(x)-(k-1)x+k>0(k\in \mathbf{Z})$对任意$x>1$都成立，求整数$k$的最大值；

（3）已知$0<x_1<x_2\le 1$，证明：$|f(x_2)-f(x_1)|\le |x_2-x_1|^{1-\frac{1}{e}}$.

龙岩市2026届高中毕业班适应性练习

数学试题参考答案

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.

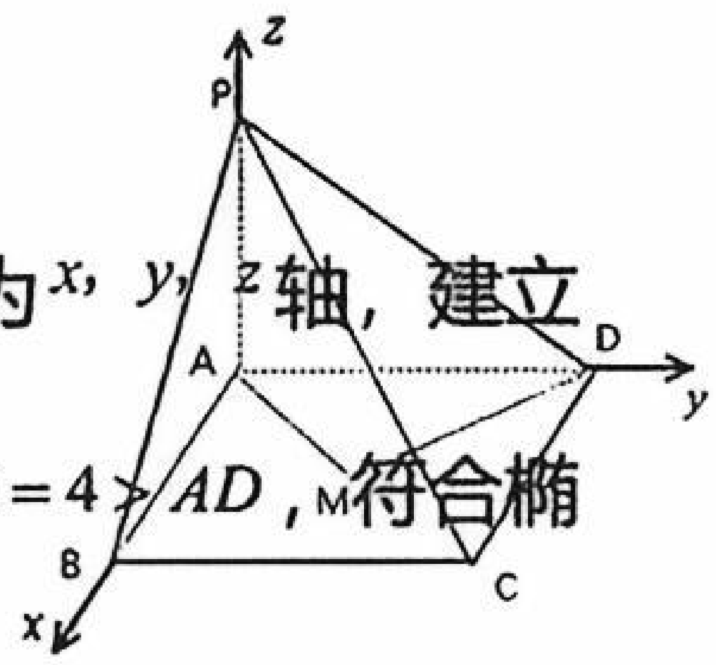
题号	1	2	3	4	5	6	7	8
选项	C	A	B	D	D	A	D	A

二、多项选择题：本大题共3小题，每小题6分，共18分.

题号	9	10	11
选项	ABD	AC	ACD

三、填空题：本大题共3小题，每小题5分，共15分.

12．80　　13．$\frac{9}{32}$　　14．5



8．解：如图,以A为坐标原点，分别以AB，AD，AP所在直线为x，y，z轴，建立空间直角坐标系，设$M(x,y,0)$，在xAy平面内，由$MD+MA=4>AD$，符合椭圆的定义.

易得椭圆方程为：$\frac{x^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{4}=1(0<y<2)$

显然$A(0,0,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，又$BC//AD$,则$\overline{BC}=\overline{AD}=(0,2,0)$，$\overline{PM}=(x,y,-2)$

直线PM与BC所成角的余弦值$\cos\theta=\frac{|\overline{PM}\cdot\overline{BC}|}{|\overline{PM}|\cdot|\overline{BC}|}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+4}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$

又$x^2=3[1-\frac{(y-1)^2}{4}](0<y<2)$，代入得

$$\cos\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+4}}=\frac{y}{\sqrt{\frac{y^2+6y+25}{4}}}=\frac{2y}{\sqrt{y^2+6y+25}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{6}{y}+\frac{25}{y^2}}}$$

当$0<y<2$时，$\cos\theta\in(0,\frac{4\sqrt{41}}{41})$　故选：A

11．解：在双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$中，点$P$为双曲线$C$上的一点，

设$\overrightarrow{F_1O}=\overrightarrow{OF_2}=\boldsymbol{m},\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{n}$，则$\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=\overrightarrow{F_1P},\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}=\overrightarrow{PF_2}$，

因为$|\boldsymbol{m}|=2\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|-|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}|=4$，则$a=2,c=2\sqrt{2}$，故$b=2$，

所以双曲线C的标准方程为：$x^2-y^2=4$.

由双曲线的对称性，在以下求解中，只考虑$x>0,y>0$的情况.

故$\boldsymbol{m}=\overrightarrow{OF_2}=(2\sqrt{2},0)$，又$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{m}=4$，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}=(x,y)$，则$2\sqrt{2}x=4$，解得$x=\sqrt{2}$，

所以$A(x,y)$的轨迹方程为$x=\sqrt{2}$.

对于选项A，由双曲线的方程及$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$是不共线的平面向量

知：$0<\angle POF_2<\dfrac{\pi}{4}$，故选项A正确；

对于选项B，当$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=8$时，$\boldsymbol{n}$在$\boldsymbol{m}$上的投影向量为$\boldsymbol{m}$，

故$|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}|=2$，故选项B错误；

对于选项C，当$|\boldsymbol{n}|=2\sqrt{3}$时，解得点$P$坐标为$(2\sqrt{2},2)$ 此时$|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{a}|$有最小值$\sqrt{2}$；

故选项C正确；

对于选项D，由选项C可得当点A与点P纵坐标相等时，$|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{a}|$的值最小，

设$P(x,y)(x>0)$，故$d(\boldsymbol{a})=x-\sqrt{2}$，

又$F_2(2\sqrt{2},0)$，则$|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}|=|PF_2|=\sqrt{\left(x-2\sqrt{2}\right)^2+y^2}$，因为点$P$在双曲线$C$上，

所以$x^2-y^2=4$，故$|PF_2|=\sqrt{2}x-2$，所以$\dfrac{d(\boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 故选项D正确.

故选：ACD.

14．解：当$n=1$时，$b_1=\dfrac{1}{a_2}=1$，即$a_2=1$，

当$n\geq 2$时，$b_n=\dfrac{n}{a_{2n}}=\dfrac{3n^2+n}{4}-\dfrac{3\left(n-1\right)^2+(n-1)}{4}=\dfrac{3n-1}{2}$，

所以 $a_{2n}=\dfrac{2n}{3n-1}(n\geq 2)$，对 $n=1$ 成立，故 $a_{2n}=\dfrac{2n}{3n-1}$．

此时 $a_{2n}=\dfrac{2n}{3n-1}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3(3n-1)}>\dfrac{2}{3}$．

又因为 $n=1$ 时，$c_1=a_1=1$，

当 $n\geq 2$ 时，$c_n=(2n-1)a_{2n-1}=\dfrac{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\lambda^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}}=\lambda^{n-1}$，对 $n=1$ 成立，

故 $a_{2n-1}=\dfrac{\lambda^{n-1}}{2n-1}$.

此时 $a_{2n+1}-a_{2n-1}=\dfrac{\lambda^n}{2n+1}-\dfrac{\lambda^{n-1}}{2n-1}=\dfrac{\lambda^n(2n-1)-\lambda^{n-1}(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)}$，

令 $f(n)=\lambda^n(2n-1)-\lambda^{n-1}(2n+1)=\lambda^{n-1}\left[(2\lambda-2)n-(\lambda+1)\right]>0$，

得 $n>\dfrac{\lambda+1}{2\lambda-2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\lambda-1}$，而 $\dfrac{7}{5}<\lambda<\dfrac{}{3}$，所以 $\dfrac{2}{5}<\lambda-1<\dfrac{2}{3}$，$\therefore\dfrac{3}{2}<\dfrac{1}{\lambda-1}<\dfrac{5}{2}$，

则 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\lambda-1}\in(2,3)$，所以当 $n\geq 3$ 时，$a_{2n+1}>a_{2n-1}$，当 $n\leq 2$ 时，$a_{2n+1}<a_{2n-1}$，

即奇数项中，a_5 最小，而 $a_5=\dfrac{\lambda^2}{5}<\dfrac{5}{9}<\dfrac{2}{3}<a_{2n}$，

故数列 $\{a_n\}$ 的最小项为 $a_5=\dfrac{\lambda^2}{5}$，则当 a_n 取得最小值时，$n=5$，

故答案为：5

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分.

15．（13 分）

解：（1）因为 $\sqrt{3}a\cos C-c\sin A=0$，

所以 $\sqrt{3}\sin A\cos C-\sin C\sin A=0$ ………………………………………2 分

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A\neq 0$

所以 $\sqrt{3}\cos C-\sin C=0$， $\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=\sqrt{3}$

因为 $0<C<\pi$， $\therefore C=\frac{\pi}{3}$ ……………………………………………6 分

（2）因为 CD 是 AB 边上的中线，所以 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$ ……………………7 分

两边平方：$\overrightarrow{CD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}^2)$

由（1）得 $C=\frac{\pi}{3}$

代入已知条件得：$2^2=\frac{1}{4}(b^2+2\cdot a\cdot b\cdot\cos\frac{\pi}{3}+a^2)$ ……………………9 分

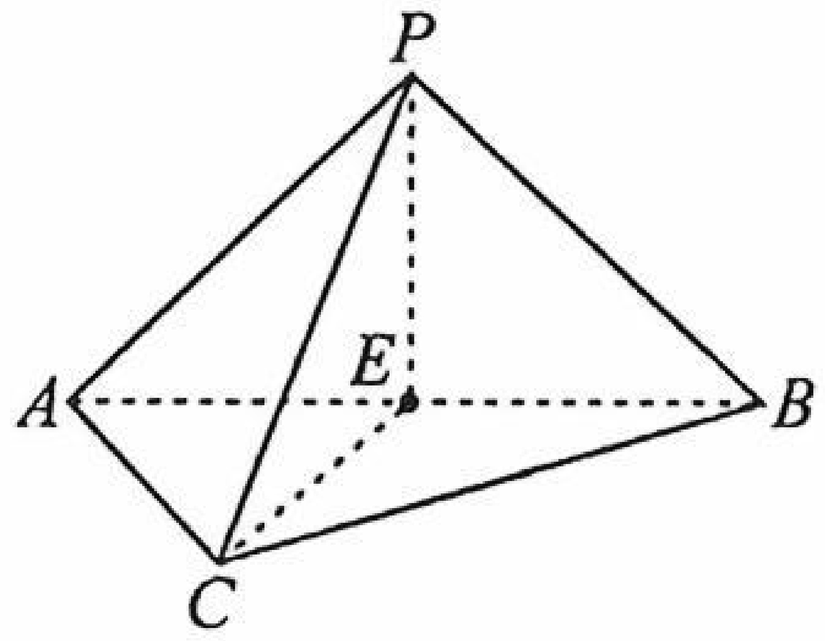
整理得 $a^2+b^2+ab=16\geq 3ab$

所以 $ab\leq\frac{16}{3}$ ………………………………………………………………11 分

所以 $S_{\Delta}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab\leq\frac{4\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $a=b=\frac{4\sqrt{3}}{\ }$ 时，取到等号

所以 ΔABC 面积的最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$．……………………………………13 分

16．（15 分）



解：（1）由题意，ΔABC 是边长为 2 的等边三角形，

过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，

连接 PE，则 $PE=CE=\sqrt{3}$，

又 $PC=\sqrt{6},PE^2+CE^2=PC^2$，…………………2 分

所以 $PE\perp CE$，

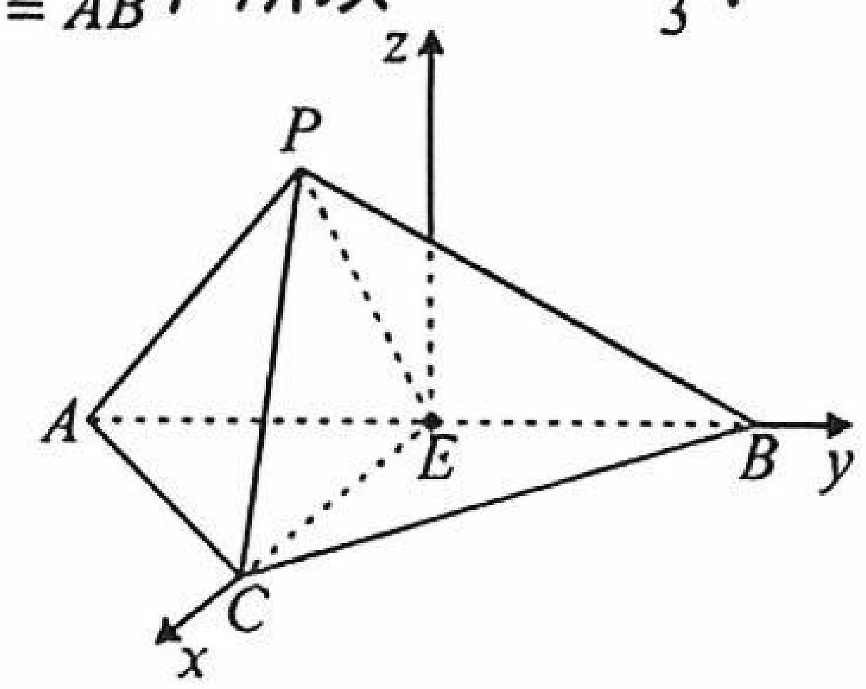
又 $CE\perp AB,PE\cap AB=E,PE,AB\subset$ 平面 PAB，

所以 $CE\perp$ 平面 PAB，…………………………………………………………5 分

又 $CE\subset$ 平面 ABC，所以平面 $PAB\perp$ 平面 ABC；............................7 分

（2）**方法一（向量法）**

因为 $PE\perp AB$，$CE\perp AB$，平面 $PAB\cap$ 平面 $CAB=AB$，所以 $\angle PEC=\frac{\pi}{3}$．



以 E 为坐标原点，

分别以 EC,EB 所在直线为 x，y 轴，

过 E 作底面的垂线为 z 轴，

建立如图所示空间直角坐标系，

则 $A(0,-1,0),B(0,1,0),C(\sqrt{3},0,0),P(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2})$，

所以 $\overline{PA}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-1,-\frac{3}{2}),\overline{AC}=(\sqrt{3},1,0),\overline{PB}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},1,-\frac{3}{2})$，....................9 分

设平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(\quad)$

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overline{PA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overline{AC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}x-y-\frac{3}{2}z=0,\\ \sqrt{3}x+y=0,\end{cases}$ 令 $x=\sqrt{3}$，得 $y=-3$，$z=1$，

所以平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-3,1)$，...............................13 分

设直线 PB 与平面 PAC 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{|\overline{PB}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overline{PB}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{|-6|}{2\cdot\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$

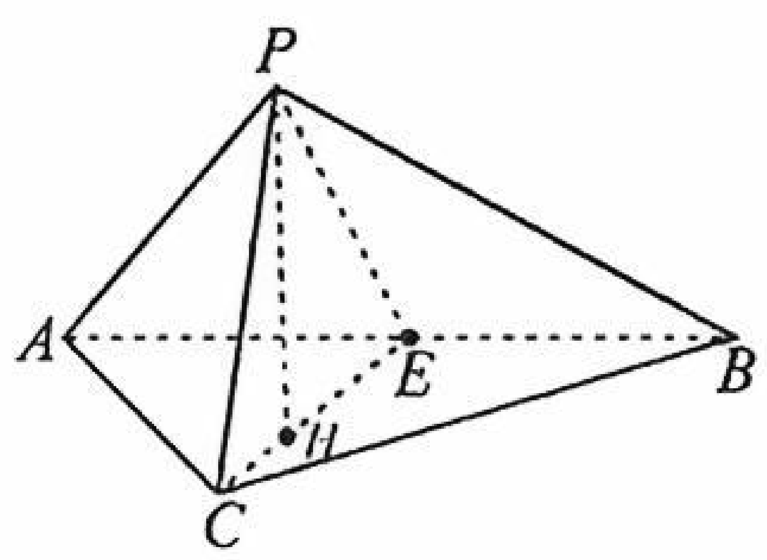
....15 分

方法二（几何法）

因为 $PE\perp AB$，$CE\perp AB$，平面 $PAB\cap$ 平面 $CAB=AB$，所以 $\angle PEC=\frac{\pi}{3}$．

又 $PE=CE=\sqrt{3}$，所以 $PC=\sqrt{3}$ ....9 分

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$，过 P 作 $PH\perp EC$ 于 H，



因为 $AB\perp$ 平面 PEC，$AB\subset$ 面 ABC

所以平面 $ABC\perp$ 平面 PEC

又因为平面 $ABC \cap$ 平面 $PEC = EC$

故 $PH \perp$ 平面 ABC

所以 $PH = PE \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$,

所以 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot PH = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ....11 分

由 $PA = AC = 2, PC = \sqrt{3}$，可得 $\cos\angle PAC = \frac{5}{8}, \sin\angle PAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$，

$S_{\Delta PAC} = \frac{1}{2} \cdot PA \cdot AC \cdot \sin\angle PAC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{\sqrt{39}}{4}$

由 $V_{P-ABC} = V_{B-PAC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta PAC} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

求得 B 点到平面 PAC 的距离为 $h = \frac{6\sqrt{13}}{13}$， ....13 分

所以直线 PB 与平面 PAC 的所成角为

则 $\sin\theta = \frac{h}{PB} = \frac{\frac{6\sqrt{13}}{13}}{2} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ ....15 分

17．（15 分）

解：（1）由已知得: $X = 1, 2, 3, \ldots 10,\ Y = 1, 2, 3,$

所以 $P(X=1) = \frac{1}{3},\ P(X=2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9},$

设资深玩家 B 在第 i 次尝试中选对为事件 B_i， $i = 1, 2, 3$

则 $P(Y=1) = P(B_1), P(Y=2) = P(\overline{B_1}B_2) = P(\overline{B_1})P(B_2 \mid \overline{B_1})$

$P(Y=3) = P(\overline{B_1}\,\overline{B_2}B_3) = P(\overline{B_1})P(\overline{B_2} \mid \overline{B_1})P(B_3 \mid \overline{B_1}\,\overline{B_2}),$

所以 $P(Y=1) = \frac{1}{3},\ P(Y=2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3},\ P(Y=3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{3}$,...4 分

又因为随机变量 X, Y 相互独立，

所以 $P(Y > X) = P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=3)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{27}$ ……………………………………………6 分

(2) $X=1,2,3,\ldots 10,$

当 $k=1,2,3\cdots 9$ 时，$P(X=k)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$，

当 $k=10$ 时，$P(X=10)=\left(\frac{2}{3}\right)^{9}$， ……………………………………8 分

得 $EX=\frac{1}{3}\left[1+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{1}+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+\cdots+9\times\left(\frac{2}{3}\right)^{8}\right]+10\times\left(\frac{2}{3}\right)^{9}$ …….10 分

设 $S=1+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{1}+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+\cdots+9\times\left(\frac{2}{3}\right)^{8}$ ①,此时 $EX=\frac{1}{3}\mathrm{S}+10\times\left(\frac{2}{3}\right)^{9}$，

$\frac{2}{3}S=\qquad\frac{2}{3}+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{3}+\cdots+9\times\left(\frac{2}{3}\right)^{9}$ ②

①-② 得：$\frac{1}{3}S=1+\left(\frac{2}{3}\right)^{1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{8}-9\times\left(\frac{2}{3}\right)^{9}$

$=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{9}}{1-\frac{2}{3}}-9\times\left(\frac{2}{3}\right)^{9}=3-12\times\left(\frac{2}{3}\right)^{9}$

所以 $EX=3-12\times\left(\frac{2}{3}\right)^{9}+10\times\left(\frac{2}{3}\right)^{9}=3-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{9}<3$ ……………15 分

18．（17 分）

解：（1）依题意得：$\begin{cases}2b=2\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ a^{2}=b^{2}+c^{2}\end{cases}$，得 $\begin{cases}b=1\\ a=2\\ c=\sqrt{3}\end{cases}$，故 E 的方程为 $\frac{x^{2}}{4}+y^{2}=1$．…….4 分

（2）**法一：** 显然直线 l 的斜率存在且不为 0,

设直线 l 的方程为 $x=ty+1$ (其中 $k_{MN}=\frac{1}{t}$),

联立$\begin{cases}x=ty+1\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消去$x$得$\left(t^2+4\right)y^2+2ty-3=0$，设$N(x_2,y_2)$，

则$y_1+y_2=-\dfrac{2t}{t^2+4},y_1y_2=-\dfrac{3}{t^2+4}$，……………………………………………6分

由四边形$MPQM_1$为等腰梯形，且P,Q均在x轴上，$MM_1//x$轴，

故$\angle MPQ=\angle M_1QP$，得$k_{MP}+k_{M_1Q}=k_{MN}+k_{M_1N}=0$，…………7分

即$k_{MN}+k_{M_1N}=\dfrac{1}{t}+\dfrac{y_2-y_1}{x_2-4}=\dfrac{1}{t}+\dfrac{y_2-y_1}{ty_2-3}=0$，化简得$2y_2-y_1=\dfrac{3}{t}$.

联立$\begin{cases}2y_2-y_1=\dfrac{3}{t}\\ y_1+y_2=-\dfrac{2t}{t^2+4}\end{cases}$，得$\begin{cases}y_1=\dfrac{-7t^2-12}{3t(t^2+4)}>0\\ y_2=\dfrac{t^2+12}{3t(t^2+4)}\end{cases}$，代入$y_1y_2=-\dfrac{3}{t^2+4}(t<0)$，

得$y_1y_2=\dfrac{-7t^2-12}{3t(t^2+4)}\cdot\dfrac{t^2+12}{3t(t^2+4)}=-\dfrac{3}{t^2+4}$，

化简得$5t^4+3t^2-36=(5t^2-12)(5t^2+3)=0$，所以$=\pm\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$……………………9分

因为$y_1>0$，所以$t=-\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$

所以直线l的方程为$x=-\dfrac{2\sqrt{15}}{5}y+1$，即$x+\dfrac{2\sqrt{15}}{5}y-1=0$．………………10分

法二：由四边形$MPQM_1$为等腰梯形，且P,Q均在x轴上，$MM_1//x$轴，

故$\angle NQP=\angle NPQ$，故$|NM|=|NM_1|$，设$N(x_2,y_2)$，

取PQ的中点为G，连接NG，则$G\left(\dfrac{1+x_Q}{2},0\right)$，

则直线NM_1的方程为$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-4}(x-4)+y_1$，

令$y=0,x_Q=\dfrac{x_2y_1-4y_1}{y_1-y_2}+4=\dfrac{x_2y_1-4y_2}{y_1-y_2}$

设直线$l: x=ty+1(t\neq 0)$，联立$\begin{cases} x=ty+1 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，

消去x得$\left(t^2+4\right)y^2+2ty-3=0$，

则$y_1+y_2=-\dfrac{2t}{t^2+4}, y_1y_2=-\dfrac{3}{t^2+4}$，..7 分

则 $ty_1y_2=\dfrac{3}{2}\left(y_1+y_2\right)$，

$$x_Q=\frac{x_2y_1-4y_2}{y_1-y_2}=\frac{\left(ty_2+1\right)y_1-4y_2}{y_1-y_2}=\frac{ty_2y_1+y_1-4y_2}{y_1-y_2}=\frac{\frac{3}{2}\left(y_2+y_1\right)+y_1-4y_2}{y_1-y_2}=\frac{5}{2},$$

所以$x_2=x_G=\dfrac{1+x_Q}{2}=\dfrac{7}{4}$，

则$y_2=-\sqrt{1-\dfrac{1}{4}x_2^2}=-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，因此$N\left(\dfrac{7}{4},-\dfrac{\sqrt{15}}{8}\right)$，又$P(1,0)$

所以$t=\dfrac{\frac{7}{4}-1}{-\frac{\sqrt{15}}{8}}=-\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$

所以直线l的方程为$x=-\dfrac{2\sqrt{15}}{5}y+1$，即$x+\dfrac{2\sqrt{15}}{5}y-1$ ....10 分

法三：显然直线l的斜率存在且不为 0，

设直线l的方程为$x=ty+1$

联立$\begin{cases} x=ty+1 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，消去$x$得$(t^2+4)y^2+2ty-3=0$

$\Delta=16t^2+48>0$，设$N(x_2,y_2)$，且$y_1>0, y_2<0$

则$y_1=\dfrac{-t+2\sqrt{t^2+3}}{t^2+4}, y_2=\dfrac{-t-2\sqrt{t^2+3}}{t^2+4}$ ....6 分

$$y_1-y_2=\frac{4\sqrt{t^2+3}}{t^2+4},$$

$$3-ty_2=3-\frac{-t^2-2t\sqrt{t^2+3}}{t^2+4}=\frac{4t^2+12+2t\sqrt{t^2+3}}{t^2+4}$$

$$k_{M_1N}=\frac{y_1-y_2}{4-x_2}=\frac{y_1-y_2}{3-ty_2}=\frac{\frac{4\sqrt{t^2+3}}{t^2+4}}{\frac{4t^2+12+2t\sqrt{t^2+3}}{t^2+4}}=\frac{2}{2\sqrt{t^2+3}+t}$$ ………….7分

因为四边形$MPQM_1$为等腰梯形，且P、Q均在x轴上，$NM_1//x$轴，

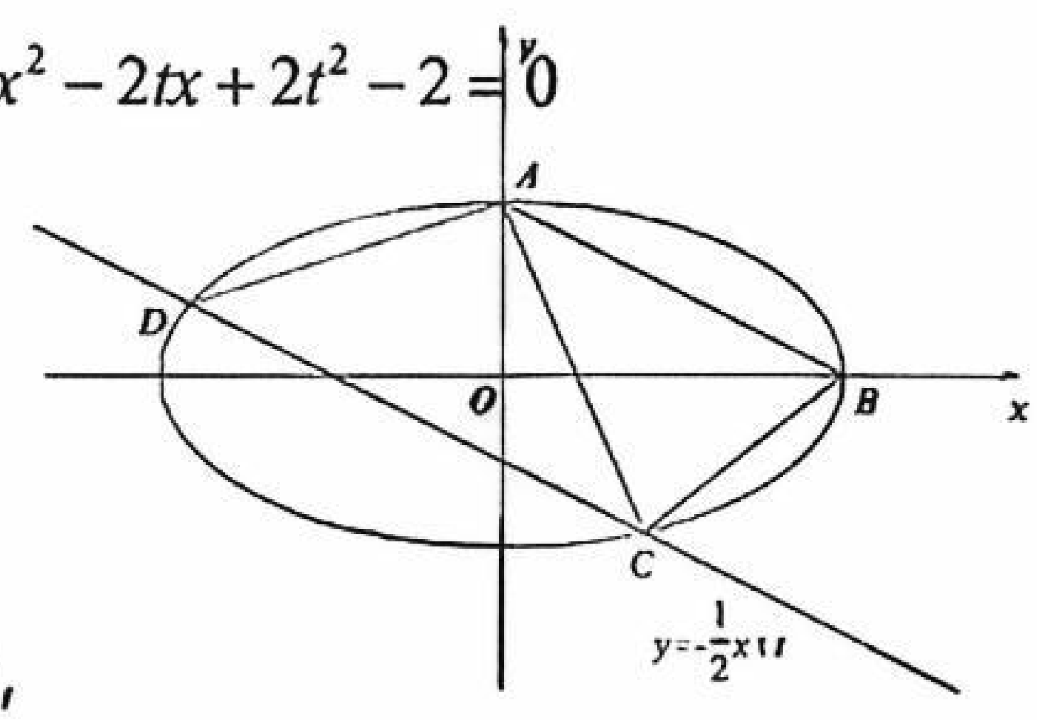
故$\angle MPQ=\angle M_1QP$，所以$k_{M_1N}=-k_{MN}$ ……………………………8分

所以$\frac{2}{2\sqrt{t^2+3}+t}=-\frac{1}{t}$，所以$t<0$，解得$t=-\frac{2\sqrt{15}}{5}$ ………………9分

所以直线l的方程为$x+\frac{2\sqrt{15}}{5}y-1=0$ ……………………………………10分

（3）**法一：**联立方程$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+t\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消去$y$可得，

$x^2-2tx+2t^2-2=0$



且$-\sqrt{2}<t<1$，

则$\Delta=4t^2-4\left(2t^2-2\right)=4\left(2-t^2\right)>0$，

可知直线$y=-\frac{1}{2}x+t\left(-\sqrt{2}<t<1\right)$与椭圆$E$相交，

设$C\left(x_3,y_3\right)$，$D\left(x_4,y_4\right)$，

则$\begin{cases}x_3+x_4=2t\\ x_3x_4=2t^2-2\end{cases}$，则$|CD|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\sqrt{4t^2-4\left(2t^2-2\right)}=\sqrt{5}\sqrt{2-t^2}$，

又因为点$A(0,1)$，$B(2,0)$，

则$|AB|=\sqrt{5}$，直线AB的方程为$\frac{x}{2}+y=1$，即$x+2y-2=0$，

可知直线AB：$x+2y-2=0$与直线CD：$x+2y-2t=0$平行，

则两平行线间距离为$d=\frac{|2-2t|}{\sqrt{5}}=\frac{2(1-t)}{\sqrt{5}}$，

则$S(t)=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|CD|\cdot d+\frac{1}{2}|AB|\cdot d$

$=\frac{1}{2}\left(|AB|+|CD|\right)d=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{2-t^2}\right)\cdot\frac{2(1-t)}{\sqrt{5}}=\left(\sqrt{2-t^2}+1\right)(1-t)$，

即$S(t)=\left(\sqrt{2-t^2}+1\right)(1-t)$，$t\in\left(-\sqrt{2},1\right)$，……………………………………14分

则$S'(t)=\dfrac{2t^2-t-2-\sqrt{2-t^2}}{\sqrt{2-t^2}}$，

设$g(t)=2t^2-t-2-\sqrt{2-t^2}$，

(i) 当$t\in[0,1)$时，$g(t)=2t^2-t-2-\sqrt{2-t^2}<2t^2-2<0$，即$S'(t)<0$；

(ii) 当$t\in(-\sqrt{2},0)$时，因为函数$y=2t^2-t-2$单调递减，

函数$y=\sqrt{2-t^2}$单调递增，

可知$g(t)$单调递减，且$g(-1)=0$，

① 当$t\in(-\sqrt{2},-1)$时，$g(t)>0$，即$S'(t)>0$；

② 当$t\in(-1,0)$时，$g(t)<0$，即$S'(t)<0$；

综上所述：当$t\in(-\sqrt{2},-1)$时，$S'(t)>0$；当$t\in(-1,1)$时，$S'(t)<0$；

可知$S(t)$在$(-\sqrt{2},-1)$内单调递增，一$(-1,1)$内单调递减，则$S(t)\le S(-1)=4$，

所以$S(t)$的最大值为4. ……………………………………………………17分

法二：同法一得$S(t)=(\sqrt{2-t^2}+1)(1-t),t\in(-\surd$ ……………………14分

令$t=\sqrt{2}\cos\theta,\theta\in(\dfrac{\pi}{4},\pi)$

则$S(t)$可化为

$S=(\sqrt{2}\sin\theta+1)(1-\sqrt{2}\cos\theta)=\sqrt{2}(\sin\theta-\cos\theta)-2\sin\theta\cos\theta+1$

令$\sin\theta-\cos\theta=m$,

则$m=\sqrt{2}\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})\in(0,\sqrt{2}],1-2\sin\theta\cos\theta=m^2$

所以$S=m^2+\sqrt{2}m=(m+\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2-\dfrac{1}{2}$.

当$m=\sqrt{2}$，即$t=-1$时，$S_{\max}=4$，

所以$S(t)$的最大值为4. ……………………………………………………17分

19．（17分）

解：（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\ln x+1$，由$f'(x)=0$得$x=\dfrac{1}{e}$，

当$x\in(0,\dfrac{1}{e})$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(\frac{1}{e},+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以$f(x)$的极小值点为$\frac{1}{e}$. ……………………………………………4分

（2）**法一：** $2f(x)-(k-1)x+k>0$化简可得$x+2x\ln x>k(x-1)$，又$x>1$，

所以$k<\frac{x+2x\ln x}{x-1}$，……………………………………………5分

令$g(x)=\frac{x+2x\ln x}{x-1}(x>1)$，$g'(x)=\frac{2x-2\ln x-3}{(x-1)^2}$，记$h(x)=2x-2\ln x-3$，则

$h'(x)=\frac{2(x-1)}{x}>0$，所以$h(x)$在$(1,+\infty)$单调递增．又$h(2)=1-2\ln 2<0$，

$h(\frac{5}{2})=2(1-\ln\frac{5}{2})>0$，故$h(x)$在$(2,\frac{5}{2})$上有唯一零点$x_0$，…………7分

且$h(x_0)=2x_0-2\ln x_0-3=0$，……………………………………………8分

又$g(x)$在$(1,x_0)$单调递减，在$(x_0,+\infty)$单调递增，所以$g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{x_0+2x_0\ln x_0}{x_0-1}$，由

$2x_0-2\ln x_0-3=0$可得$g(x)_{\min}=\frac{x_0+x_0(2x_0-3)}{x_0-1}=2x_0\in(4,5)$，又$k$为整数，

所以整数k的最大值为4．……………………………………………10分

法二： 令$g(x)=2f(x)-(k-1)x+k=2x\ln x-(k-1)x+k$，$g(1)=1$，

问题转化为：对任意$x>1$,有$g(x)>0$，因为$g'(x)=2\ln x-k+3$,

当$k\le 3$时，$g'(x)>2\times\ln 1-k+3\ge 0$,所以$g(x)$在$(1,+\infty)$单调递增,

故$g(x)>g(1)=1>0$，符合题意. ……………………………………………6分

当$k>3$时，$g'(x)=0$，$x=e^{\frac{k-3}{2}}>e^0=1$，

当$x\in(1,e^{\frac{k-3}{2}}),g'(x)<0,g(x)$单调递减，当$x\in(e^{\frac{k-3}{2}},+\infty),g'(x)>0,g(x)$单调递增,

所以$g(x)_{\min}=g(e^{\frac{k-3}{2}})=(k-3)e^{\frac{k-3}{2}}-(k-1)e^{\frac{k-3}{2}}+k=k-2e^{\frac{k-3}{2}}>0$，…………8分

令$h(k)=k-2e^{\frac{k-3}{2}}(k>3,k\in \boldsymbol{Z}),h'(k)=1-e^{\frac{k-3}{2}}<1-e^0=0$，

所以$h(k)$在$(3,+\infty)$单调递减，又$h(4)=4-2e^{\frac{1}{2}}>0,h(5)=5-2e<0$，

所以当$k>3$时，满足$h(k)>0$的最大整数k的值为4

综上：结合$k\le 3$时均满足条件,所以整数k的最大值为4. ....10分

(3) 令$m=x_2-x_1$，$0<m<1$，则$x_1=x_2-m$，

所以，要证$|f(x_2)-f(x_1)|\le |x_2-x_1|^{1-\frac{1}{e}}$，即证$|f(x_2)-f(x_2-m)|\le m^{1-\frac{1}{e}}$，

即证$-m^{1-\frac{1}{e}}\le f(x_2)-f(x_2-m)\le m^{1-\frac{1}{e}}$，

等价于证$-m^{1-\frac{1}{e}}\le x_2\ln x_2-(x_2-m)\ln(x_2-m)\le m^{1-\frac{1}{e}}$，

设$F(x)=x\ln x-(x-m)\ln(x-m)$，$x\in(m,1]$，则$F'(x)=\ln x-\ln(x-m)>0$，

所以$F(x)$在$(m,1]$上单调递增，所以$F(m)<F(x)\le F(1)$，

即$m\ln m<F(x)\le -(1-m)\ln(1-m)$，

因此只需证$-m^{1-\frac{1}{e}}\le m\ln m<F(x)\le -(1-m)\ln(1-m)\le m^{1-\frac{1}{e}}$

即$\begin{cases}-m^{1-\frac{1}{e}}\le m\ln m\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\-(1-m)\ln(1-m)\le m^{1-\frac{1}{e}}\cdots(2)\end{cases}$ 12分

对于（1）式，只需证$\ln m+m^{-\frac{1}{e}}\ge 0$，可设$\varphi(m)=\ln m+m^{-\frac{1}{e}}$，$0<m<1$，

则$\varphi'(m)=m^{-1}-\frac{1}{e}m^{-\frac{1}{e}-1}=m^{-1}(1-\frac{1}{e}m^{-\frac{1}{e}})$，

所以$\varphi(m)$在$(0,\ e^{-e})$上单调递减，在$(e^{-e},+\infty)$单调递增.

故$\varphi(m)\ge\varphi(e^{-e})=0$，即$-m^{1-\frac{1}{e}}\le m\ln m$成立. 14分

对于（2）式，即要证$m^{1-\frac{1}{e}}+(1-m)\ln(1-m)\ge 0$，

设$Q(m)=m^{1-\frac{1}{e}}+(1-m)\ln(1-m)$，则$Q'(m)=(1-\frac{1}{e})m^{-\frac{1}{e}}-\ln(1-m)-1$，

所以$Q'(m)=(1-\frac{1}{e})m^{-\frac{1}{e}}-\ln(1-m)-1\ge(1-\frac{1}{e})m^{-\frac{1}{e}}+m-1\ge\frac{1}{2}m^{-\frac{1}{e}}+m-1$

令$T(m)=\frac{1}{2}m^{-\frac{1}{3}}+m-1$，则$T'(m)=-\frac{1}{6}m^{-\frac{4}{3}}+1$，由$T'(m)=0$知$m=6^{-\frac{3}{4}}$，所以$T(m)$在$(0,6^{-\frac{3}{4}})$

上单调递减，在$(6^{-\frac{3}{4}},1)$上单调递增．，所以$T(m)\geq T(6^{-\frac{3}{4}})=\frac{2}{3}\cdot 6^{\frac{1}{4}}-1>0$，所以

$Q'(m)\geq T(m)>0$，则$Q(m)$在$(0,1)$上递增，所以$Q(m)\geq Q(0)=0$

综上命题得证．……………………………………………………………17分