（在此卷上答题无效）

2025-2026 学年福州市高三年级五月质量检测

数　学

（完卷时间：120 分钟；满分：150 分）

注意事项:

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

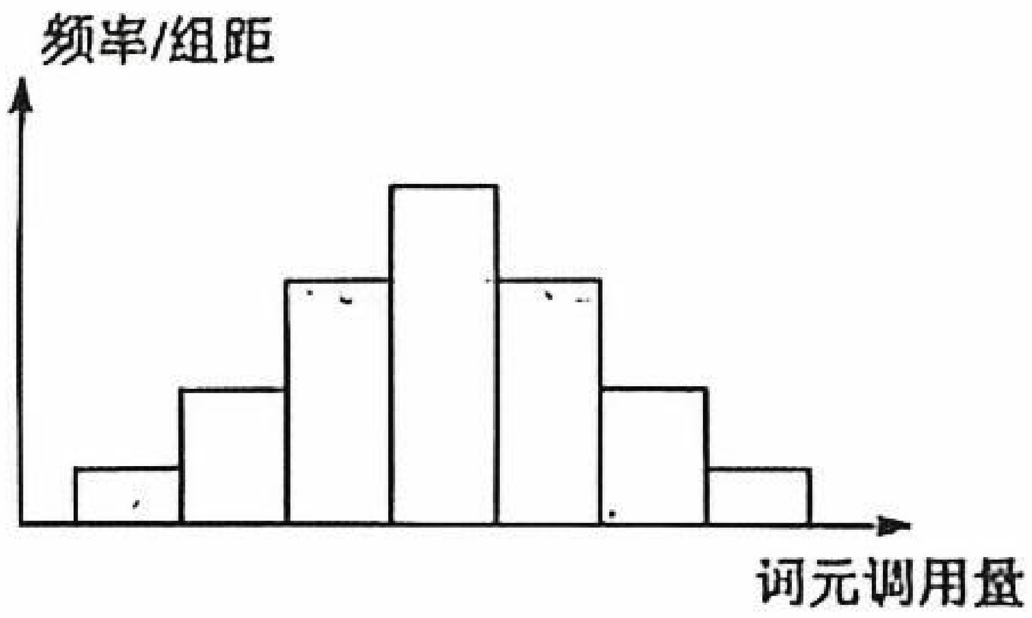
1．已知集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}$，集合 $B=\{x|(x+1)(x-2)<0\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{3\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{-1,0,1,2\}$　　D．$\{-1,0,1,2,3\}$

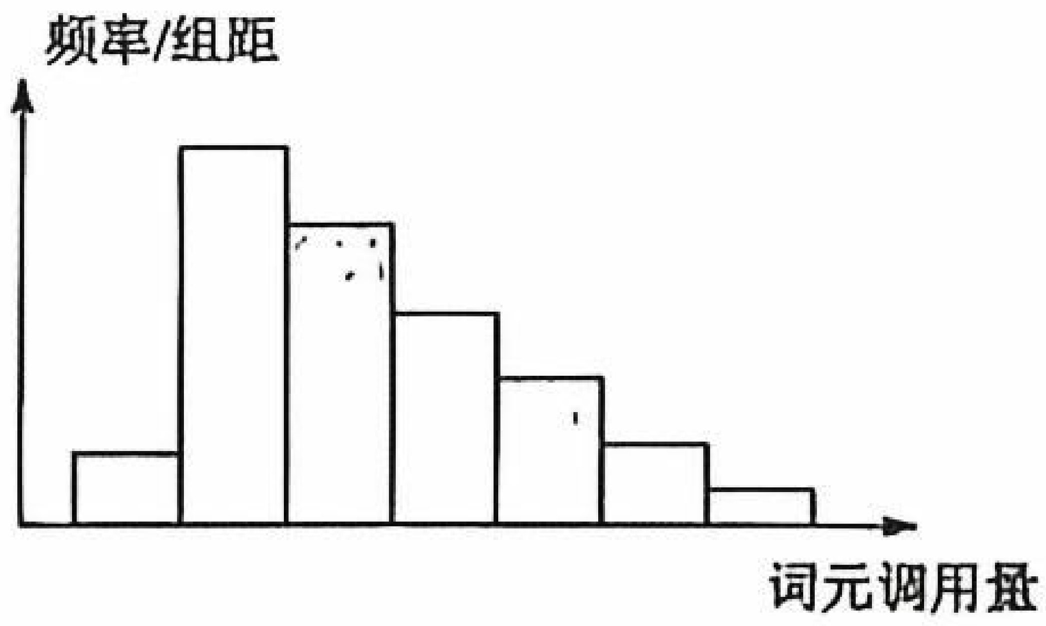
2．若复数 z 满足 $\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}=7-\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A．100　　B．25　　C．10　　D．5

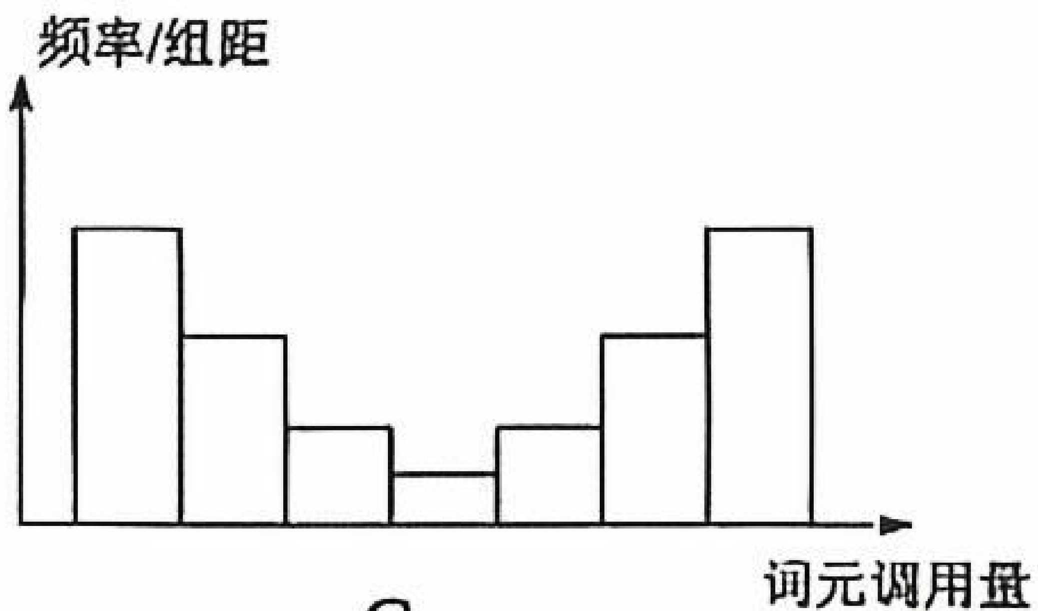
3．某 AI 数据中心共有 4 个开源大模型供公众使用．该中心分别对这 4 个模型在某天内的词元调用量进行调查，画出频率分布直方图，其中词元调用量的平均数低于中位数的为



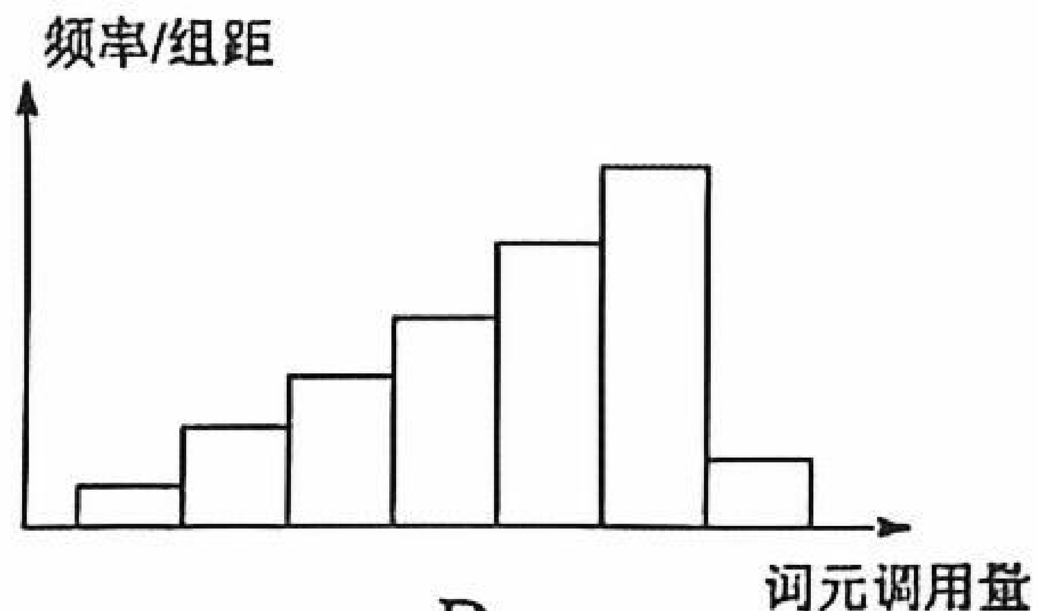
A



B



C



D

4．已知圆台的上、下底面面积分别为S'，S，且$S=4S'$，圆台的高为3，轴截面面积为9，则该圆台的体积为

A．$\dfrac{7\pi}{4}$　　B．7π　　C．14π　　D．28π

5．已知点$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$是函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$（$\omega>0$）的图象的一个对称中心，则$\omega$的最小值为

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{4}{3}$　　D．$\dfrac{5}{3}$

6．记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，设甲：S_1，S_3，S_2为等差数列；乙：a_2，a_4，a_3为等差数列，则

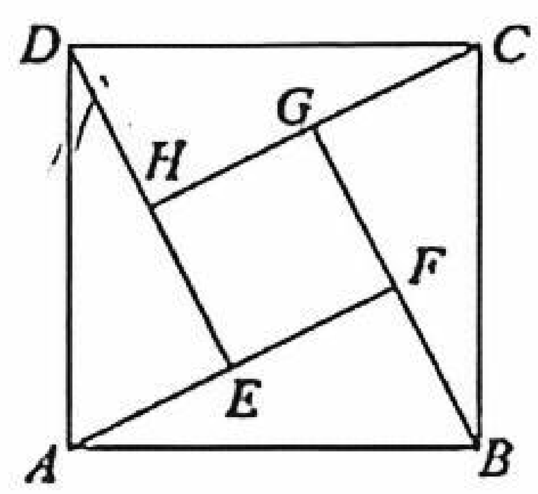
A．甲是乙的充分条件但不是必要条件

B．甲是乙的必要条件但不是充分条件

C．甲是乙的充要条件

D．甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

7．右图是体现中国古代数学智慧的“赵爽弦图”，它由4个全等直角三角形和中心小正方形构成．若$AE=EF$，则



A．$\overrightarrow{AF}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}$　　B．$\overrightarrow{AF}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AD}$

C．$\overrightarrow{AF}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}$　　D．$\overrightarrow{AF}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{AD}$

8．已知$2\log_2 x-x=0$，$3\log_3 y-y=0$，$5\log_5 z-z=0$，则x，y，z的大小关系不可能为

A．$x<y<z$　　B．$x<z<y$　　C．$z<x<y$　　D．$z<y<x$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9．已知$\cos(x+y)=\dfrac{1}{3}$，则

A．当$x=\pi$时，$\cos y=\dfrac{1}{3}$　　B．当$y=-\dfrac{\pi}{2}$时，$\sin x=\dfrac{1}{3}$

C．当$x=y$时，$\sin x=\dfrac{1}{3}$　　D．当$\cos(x-y)=\dfrac{2}{3}$时，$\tan x\tan y=\dfrac{1}{3}$

10．已知函数$f(x)=x^3+bx^2+cx(b,c\in\mathbf{R})$，则下列说法正确的是

A．若$f(x)$是奇函数，则$b=0$

B．若$f(x)$是增函数，则$b^2-3c>0$

C．$f(x)$所有零点的平方和等于b^2-3c

D．当$b^2-3c>0$时，存在两条互相垂直的直线都与曲线$y=f(x)$相切

11．在平面直角坐标系中，到两条坐标轴的距离之和与到点 $F(2,0)$ 的距离相等的点的轨迹是 C．则

A．点 $(1,0)$ 在 C 上

B．存在斜率为 1 的直线与 C 恰有 3 个公共点

C．当且仅当 $a\leqslant -2$，圆 $(x-a)^2+y^2=8$ 与 C 恰有 4 个公共点

D．存在定点 P，过 P 且互相垂直的任意两条直线都与 C 相交，所有交点中必有两个与 P 等距

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}$，则 $\{a_n\}$ 的前 7 项和为______．

13．等边三角形的一个顶点位于抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，另外两个顶点都在该抛物线上，这个三角形的边长可以为______（写出一个符合题意的答案即可）．

14．共有 3 枚质地均匀的硬币，每枚硬币抛出后正面朝上与反面朝上的概率均为 $\dfrac{1}{2}$．第一次将三枚硬币同时抛出，之后每次从当前反面朝上的硬币中任意选取 2 枚同时抛出，直到反面朝上的硬币数少于 2 枚时停止操作．当停止操作时，所有硬币均为正面朝上的概率为______．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a^2+c^2-b^2=40$，$\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$．

（1）求 B；

（2）若 $b\sin A=4\sqrt{3}$，求 BC 边上的中线长．

16．（15 分）

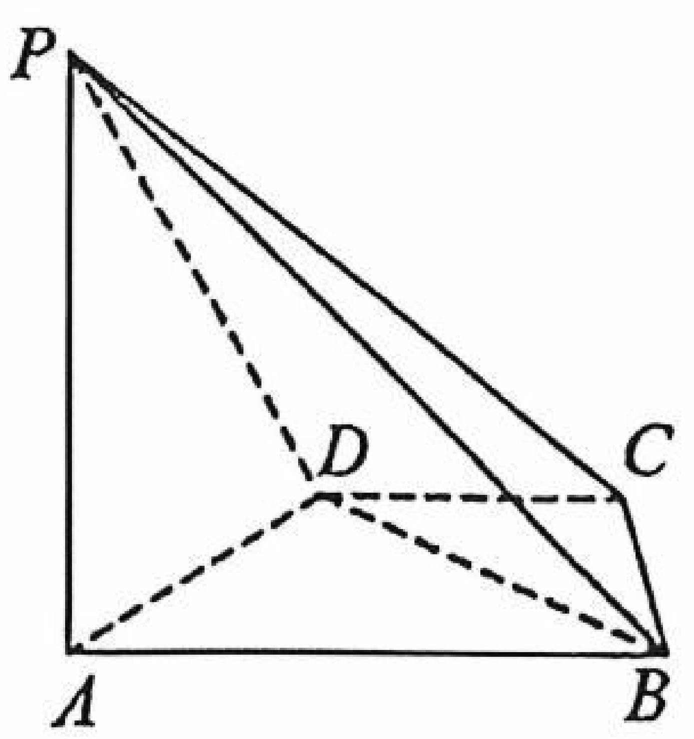
近年，国家不断加大反诈宣传力度．“摸球中奖”就是街头常见的诈骗小游戏，其规则为在不透明袋中装有若干个不同颜色的小球，以摸中特定组合即可获得大额奖金为诱饵，吸引路人参与．已知袋中装有 2 个红球，3 个黄球，4 个蓝球，这 9 个球除了颜色不同以外其他特征均相同，摸球者从袋中随机摸出 5 个球，若其中三种颜色球的个数比为 $0:1:4$（所述比例不固定对应具体颜色，下同），则获得 100 元奖金；若其中三种颜色球的个数比为 $0:2:3$，则获得 5 元奖金；若其中三种颜色球的个数比为 $1:1:3$，则没有奖金也不需付钱；仅当其中三种颜色球的个数比为 $1:2:2$ 时，需要支付 10 元．

（1）求摸球者摸球一次获得 100 元奖金的概率；

（2）试用所学的概率与统计知识揭穿此骗局．

17.（15分）

在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，$AB\parallel CD$，$PA=AB=2$，$BC=CD=DA=1$．



（1）证明：平面$PBD\perp$平面PAD；

（2）若M为棱PB上一点（不含端点），直线DC与平面MAD所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，求$\dfrac{PM}{PB}$．

18.（17分）

已知椭圆Γ_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的右顶点为$A$，上顶点为$B$，$|AB|=2\sqrt{5}$，$\triangle OAB$的面积为4（$O$为坐标原点）．以$O$为中心、焦点在$x$轴上的椭圆$\Gamma_2$在$\Gamma_1$的内部，且与$\Gamma_1$的离心率相等．分别过$A,B$作$\Gamma_2$的切线$l_1,l_2$，设$l_1,l_2$的斜率分别为$k_1$，$k_2$．

（1）求Γ_1的方程；

（2）求k_1k_2的值；

（3）若Γ_2的长轴长为4，是否存在定点P，当过P的动直线l与Γ_1交于两点M,N，与l_1交于点Q时，都有$|MP|\cdot|QN|=|MQ|\cdot|PN|$？若存在，写出$P$的坐标并证明；若不存在，说明理由．

19.（17分）

已知函数$f\left(x\right)=a\left(x-1\right)-\ln x$．

（1）讨论$f\left(x\right)$的单调性；

（2）关于x的方程$f\left(x\right)=k$有两个实根u_k,v_k，对每一个满足条件的k，$u_kv_k<1$．

（i）求a的取值范围；

（ii）当$k\in\mathbf{N}^*$时，记$S_k=u_k+v_k$，证明：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S_k<\frac{n^2+(1+2a)n}{a}$．

福州三检·数学参考答案

1-5、BCDBC

6-8、ABA

9.BD 10.AD 11.AD

12.5

13.$8+4\sqrt{3}$

14.5/18

第15题

(1) 由余弦定理得

$a^2+c^2-b^2=2ac\cos B=40$，即$ac\cos B=20$。

$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=10\sqrt{3}$，即

$ac\sin B=20\sqrt{3}$。

两式相除得$\tan B=\sqrt{3}$，又$B\in(0,\pi)$，故

$B=\dfrac{\pi}{3}$。

(2) 由正弦定理得$b\sin A=a\sin B=4\sqrt{3}$，代入

$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$得$a=8$。

将$a=8$代入$ac\cos B=20$得$c=5$。

由中线长公式，BC边上的中线长

$m=\dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$。

先由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=49$，

即$b=7$。

代入得$m=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\times49+2\times25-64}=\sqrt{21}$，

故BC边上的中线长为$\sqrt{21}$。

第16题

(1) 从9个球中摸5个，总情况数为$C_9^5=126$。
获得100元奖金对应三种颜色球个数比为$0:1:4$，仅可能是4个蓝球加1个红球或1个黄球，共$C^{1}+C^{1}=5$种情况。
故所求概率$P=\dfrac{5}{126}$。

(2) 计算摸一次的收益期望：

- 获得100元的概率：$\dfrac{5}{126}$
- 获得5元的概率：$\dfrac{23}{126}$（对应$0:2:3$的所有情况）
- 获得0元的概率：$\dfrac{32}{126}$（对应$1:1:3$的所有情况）
- 支付10元的概率：$\dfrac{66}{126}$（对应$1:2:2$的所有情况）

收益期望$E(X)=100\times\dfrac{5}{126}+5\times\dfrac{23}{126}+0\times\dfrac{32}{126}-10\times\dfrac{66}{126}=-\dfrac{5}{14}<0$。
这说明长期参与该游戏，平均每次会亏损约0.36元，因此这是一个骗局。

第17题

(1) 以A为原点，AB为x轴，过A作AB的垂线为y轴，AP为z轴建立空间直角坐标系。

各点坐标：$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，

$D(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$P(0,0,2)$。

向量$\overrightarrow{AD}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{BD}=(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，

则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，故$AD\perp BD$。

又$PA\perp$平面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，故$PA\perp BD$。

$PA\cap AD=A$，因此$BD\perp$平面PAD。

又$BD\subset$平面PBD，故平面$PBD\perp$平面PAD。

(2) 设$\frac{PM}{PB}=\lambda(0<\lambda<1)$，则

$M(2\lambda,0,2-2\lambda)$。

平面MAD的法向量$n=(\sqrt{3},-1,\frac{\lambda\sqrt{3}}{1-\lambda})$，

直线DC的方向向量$\overrightarrow{DC}=(1,0,0)$。

直线DC与平面MAD所成角的正弦值为

$$\frac{|\overrightarrow{DC}\cdot n|}{|\overrightarrow{DC}|\cdot|n|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4+\frac{3\lambda^2}{(1-\lambda)^2}}}=\frac{\sqrt{21}}{7}。$$

解得$\lambda=\frac{1}{2}$，故$\frac{PM}{PB}=\frac{1}{2}$。

(1) 求C的方程

由题意，椭圆C的右焦点(1, 0)，上顶点

得

又

联立解得　　　　　　故C的方程为

(2) 求k_1k_2的值

C的离心率　　　　　　设l的方程

为　　　　　　则

过……的切线　　　　　　代入C方程得

由判别式为0　　　化简得

过……的切线　　　　　　代入C方程得

由判别式为0　　　化简得

联立两式得　　　　　　化简得

故$k_1k_2 = -\frac{1}{4}$

$k_1k_2 = -\frac{1}{4}$

(3) 定点存在性证明

C的长轴长为4，离　　　　　　的方程为　　　　　过P的切线l为

存在定点$(1-2, \pm\sqrt{3})$（……的斜率），满足条件，证明如下：

设　　　　　的直线的参数方程为

（t为参数），代入C方程得

设……对应的参数为　　　　则

要使　　　　　　需满足

其中……为对应的参数。

将……方程代入C的方程并整理得　　　　结合等式可得　　　　即定点为$(1-2, \sqrt{3})$和$(-2, -\sqrt{3})$。

[illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]