

莆田市 2027 届高中毕业班开学质量诊断练习试卷

数 学

本试卷共 4 页，19 小题，满分 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $z = i(\sqrt{3} - i)$ ，则 $|z| =$
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2. 设全集 $U = \{x \in \mathbb{Z} | x(x-8) < 0\}$ ，集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ，则 $\complement_U A =$
A. $\{2, 4, 6\}$ B. $\{0, 2, 4, 6\}$ C. $\{2, 4, 6, 8\}$ D. $\{0, 2, 4, 6, 8\}$
3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ ，则 C 的离心率为
A. $\frac{9}{5}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
4. 曲线 $y = x^3 + 1$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线方程为
A. $y = x + 1$ B. $y = 2x$ C. $y = 3x - 1$ D. $y = 4x - 2$
5. 若函数 $y = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称，则 ω 的最小值为
A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 5
6. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，且满足 $f(x+2) = f(x)$ 。当 $2 \leq x \leq 3$ 时， $f(x) = 3 - \log_2 x$ ，则 $f\left(-\frac{1}{2}\right) =$
A. 4 B. $4 - \log_2 5$ C. $3 - \log_2 5$ D. $2 - \log_2 5$

7. 我国古代著名的《周髀算经》中提到：凡八节二十四气，气损益九寸九分六分分之一；冬至晷长一丈三尺五寸，夏至晷长一尺六寸，意思是：二十四个节气可以通过特定标记的日影长度来确定，每相邻两个节气之间的日影长度差为 $99\frac{1}{6}$ 分；且“冬至”时日影长度最大，为 1350 分，“夏至”时日影长度最小，为 160 分，则“立秋”时日影长度为附：

二十四节气表

立春	雨水	惊蛰	春分	清明	谷雨	立夏	小满	芒种	夏至	小暑	大暑
立秋	处暑	白露	秋分	寒露	霜降	立冬	小雪	大雪	冬至	小寒	大寒

- A. $259\frac{1}{6}$ 分 B. $358\frac{1}{3}$ 分 C. $457\frac{1}{2}$ 分 D. $556\frac{2}{3}$ 分
8. 有 6 个相同的球，其中 3 个黄球，3 个白球，依次从中无放回地随机抽取，每次取 1 个球，直到取出 2 个黄球时停止取球，记 X 为停止取球时所取出的球的个数，则 X 的数学期望为
- A. 2 B. 2.5 C. 3 D. 3.5

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知向量 $a = (2, 4)$ ， $b = (1, t)$ ，则下列说法正确的是
- A. $|a| = 20$ B. 若 $a \perp b$ ，则 $t = \frac{1}{2}$
- C. 若 $t = 2$ ，则 $a \parallel b$ D. 若 $t = 0$ ，则 a 在 b 上的投影向量为 $2b$
10. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中
- A. 直线 AC_1 与 BC 是异面直线 B. 平面 $AB_1C \parallel$ 平面 A_1C_1D
- C. 直线 A_1C_1 到平面 AB_1C 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. 四面体 $D_1 - AB_1C$ 的外接球的体积为 $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$
11. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，准线为 $l: x = -1$ ，过 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 ，直线 l_1 与 C 交于 A, B 两点，直线 l_2 与 C 交于 D, E 两点，则
- A. $p = 2$
- B. $|AB| + |DE| \geq 16$
- C. 若弦 AB 的中点到 l 的距离为 $\frac{8}{3}$ ，则 l_1 的斜率为 $\sqrt{3}$
- D. 设 l_2 交 l 于点 M ，则 $\frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|BM|^2} = \frac{1}{|FM|^2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=1$ ， $a_2=2$ ，则 $S_5=$ _____

13. 直线 $l: x-y-2=0$ 被圆 $M: x^2+y^2-4x-6y+4=0$ 所截得的弦长为_____

14. 定义： $\max\{a,b\}=\begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a < b \end{cases}$ ，已知 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 是 10 个互不相等的实数的一个排列，且满足 $\max\{a_{i-1}, a_{i+1}\} > a_i$ ($i=2,3,\dots,9$)，则该排列的所有可能结果有_____个.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且满足 $2\sin A \cos B = \sin C$.

(1) 证明： $A=B$ ；

(2) 若 $b=2$ ， $a+c=2+\sqrt{2}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. (15 分)

近年来 AI 生成的艺术品备受关注. 某艺术机构为了解购买 AI 生成的艺术品的意愿与性别的关系，随机调查了 100 名顾客，得到如下列联表：

	愿意	不愿意	合计
女性	45	15	60
男性	25	15	40
合计	70	30	100

(1) 根据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，分析购买 AI 艺术品的意愿是否与性别有关；

(2) 从这 100 名顾客中随机抽取两名，已知其中至少有一名为女性，求这两名顾客都愿意购买 AI 艺术品的概率.

附：
$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(\chi^2 \geq x_0)$	0.100	0.050	0.010
x_0	2.706	3.841	6.635

17. (15 分)

已知 $A\left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 和 $B(2, 0)$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上两点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $D(1, 0)$ 作直线 l 与 C 相交于 P, Q 两点, 与 y 轴交于点 E (点 E 在椭圆内部), O 为坐标原点, 若 $\triangle ODP$ 的面积与 $\triangle OEQ$ 的面积相等, 求直线 l 的方程.

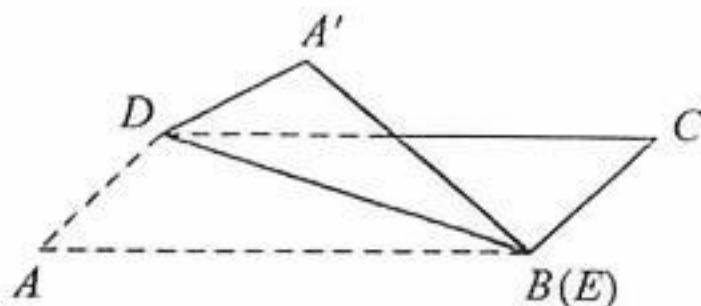
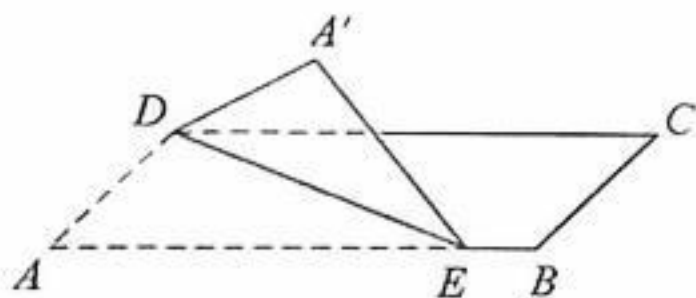
18. (17 分)

如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{3}$, $AD = 1$, 点 E 是线段 AB 上的动点, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折至 $\triangle A'DE$.

(1) 证明: $DE \perp AA'$;

(2) 若平面 $A'DE \perp$ 平面 $BCDE$, 求 A' 在平面 $BCDE$ 内的射影的轨迹的长度;

(3) 当点 E 与 B 重合时, 记二面角 $A'-DE-C$ 的大小为 θ , 若 $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, 求直线 BC 与平面 $A'DE$ 所成角的正弦值的取值范围.



19. (17 分)

已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - kx$, $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x(e^x - 2)$.

(1) 当 $k=1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} > \frac{1}{2} \ln(2n+1)$;

(3) 当 $x > 0$ 时, $g(x) - f(x) \geq 1$, 求 k 的取值范围.

莆田市 2027 届高中毕业班开学质量诊断练习试卷

数学试题参考解答及评分标准

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。
4. 只给整数分数，单项选择题和单空填空题不给中间分。

一、选择题：每小题 5 分，满分 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	C	C	B	C	D

二、选择题：每小题 6 分，满分 18 分。（本题为多项选择题，每小题中，全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，有选错得 0 分）

题号	9	10	11
答案	CD	ABC	ABD

三、填空题：每小题 5 分，满分 15 分。

12. 31 13. $3\sqrt{2}$ 14. 512

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 本小题主要考查正余弦定理，面积等基础知识；考查运算求解能力，逻辑推理能力等；考查数形结合思想，函数与方程思想等；考查逻辑推理，数学运算，直观想象等核心素养；体现基础性和综合性。满分 13 分。

法一：

(1) 证明：因为 $A + B + C = \pi$ ，所以 $\sin C = \sin(A + B)$ ，2 分

所以 $2\sin A\cos B = \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$, 4 分

即 $\sin A\cos B - \cos A\sin B = 0$, 5 分

所以 $\sin(A-B) = 0$, 6 分

又 $A-B \in (-\pi, \pi)$, 所以 $A-B = 0$, 即 $A = B$ 7 分

(2) 由 (1) 可得, $a = b = 2$, 8 分

因为 $a+c = 2+\sqrt{2}$, 所以 $c = \sqrt{2}$ 9 分

由余弦定理得, $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4+4-2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{3}{4}$, 10 分

所以 $\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 11 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ 13 分

法二:

(1) 证明: 由正弦定理得, $2a \cdot \cos B = c$, 2 分

由余弦定理得, $2a \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = c$, 4 分

整理得, $a^2+c^2-b^2=c^2$, 即 $a^2=b^2$, 5 分

所以 $a=b$, 6 分

所以 $A=B$ 7 分

(2) 由 (1) 可得, $a=b=2$, 8 分

所以 $\triangle ABC$ 是以 C 为顶点的等腰三角形, 9 分

因为 $a+c = 2+\sqrt{2}$, 所以 $c = \sqrt{2}$ 10 分

过 C 作 $CD \perp AB$ 于 D , 则 $CD = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$, 11 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{14}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ 13 分

16. 本小题主要考查条件概率, 独立性检验等基础知识; 考查逻辑推理能力, 运算求解能力, 应用意识等; 考查统计与概率思想, 转化与化归思想等; 考查逻辑推理, 数学运算, 数学抽象, 数学建模等核心素养; 体现基础性、综合性. 满分15分.

解: (1) 零假设 H_0 : 购买 AI 艺术品的意愿与性别无关联. 2 分

根据列联表中的数据，经计算得到

$$\chi^2 = \frac{100 \times (45 \times 15 - 15 \times 25)^2}{60 \times 40 \times 70 \times 30} = \frac{25}{14}$$
4分

$$\approx 1.786 < 2.706 \dots\dots\dots$$
5分

根据小概率值 $\alpha = 0.100$ 的独立性检验，

没有充分证据推断 H_0 不成立，因此可以认为 H_0 成立，

6分

即认为购买 AI 艺术品的意愿与性别无关联.

7分

(2) 设事件 $A =$ “所选的两名顾客至少有一名是女性”，

8分

$B =$ “这两名顾客都愿意购买 AI 艺术品”，

9分

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{n(AB)}{n(A)}$$
11分

$$= \frac{C_{70}^2 - C_{25}^2}{C_{100}^2 - C_{40}^2}$$
12分

$$= \frac{70 \times 69 - 25 \times 24}{100 \times 99 - 40 \times 39}$$
13分

$$= \frac{141}{278}$$
14分

所以所求的概率为 $\frac{141}{278}$

15分

17. 本小题主要考查椭圆的标准方程及简单几何性质，直线与椭圆的位置关系等基础知识；考查逻辑推理能力，运算求解能力等；考查转化与化归思想，数形结合思想，函数与方程思想等；考查逻辑推理，数学运算，直观想象等核心素养；体现基础性和综合性. 满分 15 分.

解：(1) 依题意得，
$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{6}{4b^2} = 1, \\ \frac{4}{a^2} = 1, \end{cases}$$

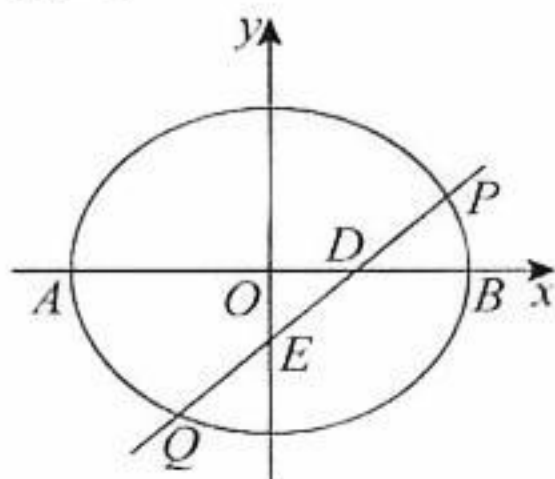
2分

解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=\sqrt{2}. \end{cases}$ 4 分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 5 分

(2)

法一:



依题意可知, 直线 l 的斜率存在且不为零.

设直线 $l: x = my + 1$ ($m \neq 0$), $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 6 分

所以 $E\left(0, -\frac{1}{m}\right)$, 7 分

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ x = my + 1 \end{cases}$, 整理得 $(m^2 + 2)y^2 + 2my - 3 = 0$, 8 分

所以 $y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 2}$, 9 分

设原点 O 到 l 的距离为 d ,

因为 $\triangle ODP$ 的面积与 $\triangle OEQ$ 的面积相等,

所以 $\frac{1}{2} \cdot |DP| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot |EQ| \cdot d$, 得 $|DP| = |EQ|$ 10 分

所以 $\sqrt{1+m^2} |y_1 - 0| = \sqrt{1+m^2} \left| y_2 - \left(-\frac{1}{m}\right) \right|$, 得 $|y_1| = \left| y_2 + \frac{1}{m} \right|$ 11 分

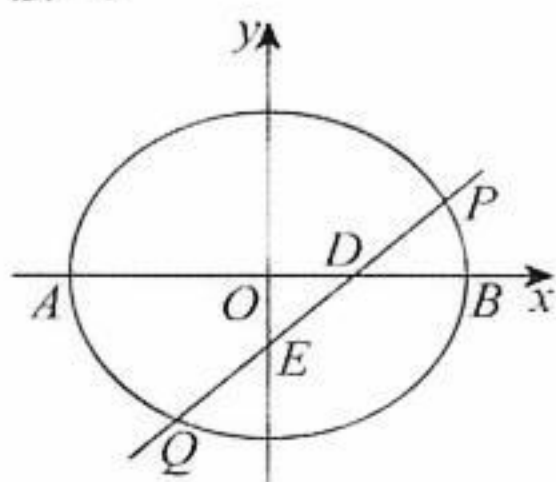
依题意, y_1 与 $y_2 + \frac{1}{m}$ 异号, 12 分

所以 $y_1 + y_2 = -\frac{1}{m}$, 13 分

所以 $\frac{2m}{m^2 + 2} = \frac{1}{m}$, 解得 $m = \pm\sqrt{2}$, 14 分

所以直线 l 的方程为 $x - \sqrt{2}y - 1 = 0$ 或 $x + \sqrt{2}y - 1 = 0$ 15 分

法二:



依题意可知, 直线 l 的斜率存在且不为零.

设直线 $l: y = k(x-1) (k \neq 0)$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,6 分

所以 $E(0, -k)$,7 分

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = k(x-1) \end{cases}$, 得 $(2k^2 + 1)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 4 = 0$,8 分

所以 $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{2k^2 + 1}$,9 分

因为 $\triangle ODP$ 的面积与 $\triangle OEQ$ 的面积相等,

所以 $\frac{1}{2}|OD||y_1| = \frac{1}{2}|OE||x_2|$ 10 分

所以 $|y_1| = |-k||x_2|$, 则 $|k(x_1 - 1)| = |kx_2|$, 即 $|x_1 - 1| = |x_2|$ 11 分

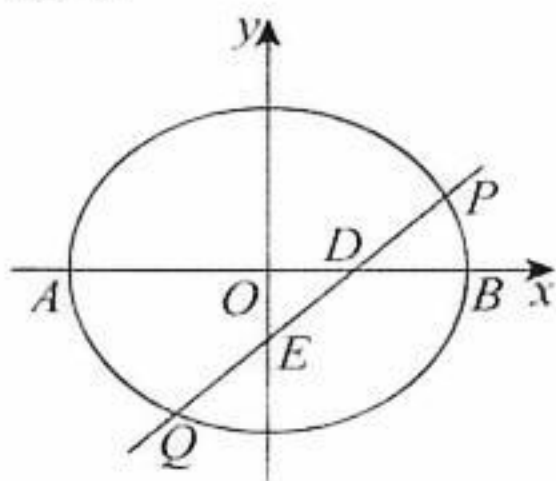
依题意, $x_1 - 1$ 与 x_2 异号,12 分

所以 $x_1 - 1 + x_2 = 0$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{2k^2 + 1} = 1$,13 分

解得 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$,14 分

所以直线 l 的方程为 $x - \sqrt{2}y - 1 = 0$ 或 $x + \sqrt{2}y - 1 = 0$15 分

法三:



依题意可知, 直线 l 的斜率存在且不为零.

设直线 $l: x = my + 1$ ($m \neq 0$), $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 6 分

所以 $E\left(0, -\frac{1}{m}\right)$, 7 分

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ x = my + 1 \end{cases}$, 得 $(m^2 + 2)y^2 + 2my - 3 = 0$, 8 分

所以 $y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 2}$, 9 分

设原点 O 到 l 的距离为 d ,

因为 $\triangle ODP$ 的面积与 $\triangle OEQ$ 的面积相等,

所以 $\frac{1}{2} \cdot |DP| \cdot d = \frac{1}{2} \cdot |EQ| \cdot d$, 得 $|DP| = |EQ|$ 10 分

所以 DE 与 PQ 的中点重合, 11 分

又因为 PQ 的中点 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, DE 的中点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2m}\right)$, 12 分

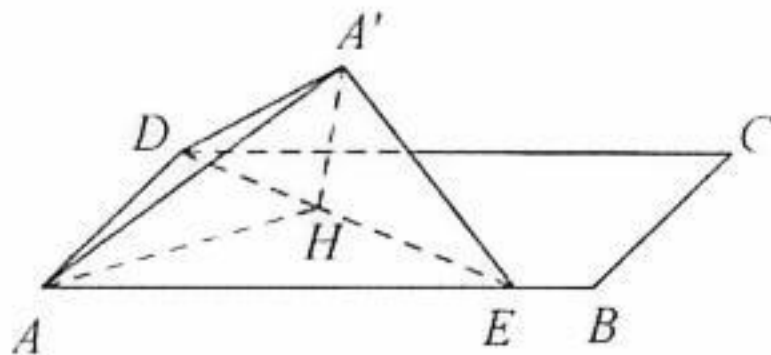
所以 $y_1 + y_2 = -\frac{1}{m}$, 13 分

所以 $\frac{2m}{m^2 + 2} = \frac{1}{m}$, 解得 $m = \pm\sqrt{2}$, 14 分

所以直线 l 的方程为 $x - \sqrt{2}y - 1 = 0$ 或 $x + \sqrt{2}y - 1 = 0$ 15 分

18. 本小题主要考查直线与直线, 直线与平面, 平面与平面, 空间角等基础知识; 考查空间想象能力, 逻辑推理能力, 运算求解能力, 创新意识等; 考查转化与化归思想, 数形结合思想, 函数与方程思想等; 考查逻辑推理, 数学运算, 直观想象, 数学抽象等核心素养; 体现基础性、综合性和创新性. 满分 17 分.

解:



作 $AH \perp DE$ 于 H , 连接 $A'H$, 由翻折性质知, $A'H \perp DE$ 1 分

(1) 连接 AA' .

$\because AH \perp DE$, $A'H \perp DE$, 2 分

又 $AH, A'H \subset \text{平面 } A'AH, A'H \cap AH = H$,3 分

$\therefore DE \perp \text{平面 } A'AH$,4 分

又 $\because A'A \subset \text{平面 } A'AH$,

$\therefore DE \perp AA'$5 分

(2)

法一:

$\because \text{平面 } A'DE \perp \text{平面 } BCDE, \text{平面 } A'DE \cap \text{平面 } BCDE = DE$,

$A'H \subset \text{平面 } A'DE, A'H \perp DE$,6 分

$\therefore A'H \perp \text{平面 } BCDE$,

H 为点 A' 在平面 $BCDE$ 上的射影.7 分

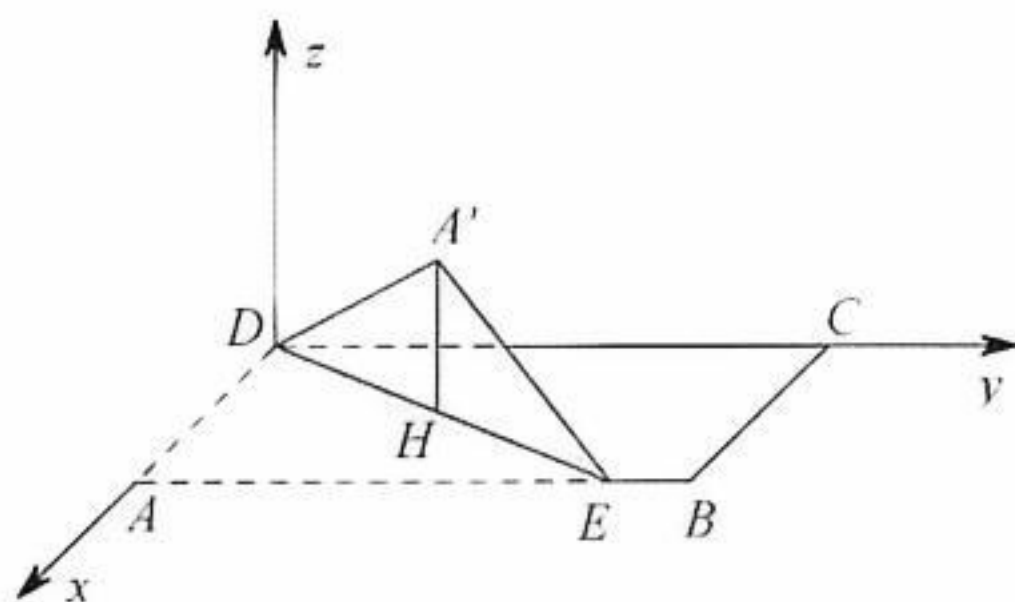
又 $AH \perp DE$, 可知 H 的轨迹是以 AD 为直径的一段圆弧,8 分

当点 E 从 A 移动至 B 时, H 的轨迹长度从 0 增长至最大

$\because$ 点 E 与 B 重合, $AB = \sqrt{3}$, 又 $AD = 1, \angle EAD = \frac{\pi}{2}, \angle ADB = \frac{\pi}{3}$,9 分

$\therefore A'$ 在平面 $BCDE$ 的射影的轨迹长度为 $l = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ 10 分

法二:



以 D 为原点, 以向量 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$ 的方向为 x 轴, y 轴正方向, 如图建立空间直角坐标系, 则

$D(0,0,0), A(1,0,0)$6 分

$\because \text{平面 } A'DE \perp \text{平面 } BCDE, \text{平面 } A'DE \cap \text{平面 } BCDE = DE$,

$A'H \subset \text{平面 } A'DE, A'H \perp DE$,7 分

$\therefore A'H \perp \text{平面 } BCDE$,

$$\begin{cases} x + \sqrt{3}y = 0, \\ \frac{1-3\cos\theta}{4}x + \frac{\sqrt{3}(1+\cos\theta)}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z\sin\theta = 0. \end{cases} \quad 13 \text{ 分}$$

令 $x = \sqrt{3}$, 则 $y = -1$, 代入解得 $z = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}$,

即平面 $A'DE$ 的一个法向量 $\mathbf{n} = \left(\sqrt{3}, -1, \frac{2\cos\theta}{\sin\theta} \right)$. 14 分

直线 BC 的方向向量 $\overrightarrow{CB} = (1, 0, 0)$, 设直线 BC 与平面 $A'DE$ 所成角为 φ ,

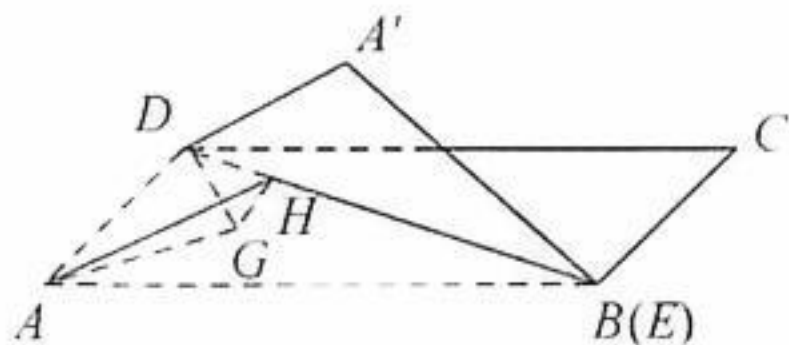
$$\text{则 } \sin\varphi = |\cos\langle \overrightarrow{BC}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+1+\frac{4\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\theta. \quad 15 \text{ 分}$$

$$\because \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right], \sin\theta \text{ 单调递增}, \sin\theta \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right],$$

$$\therefore \sin\varphi \in \left[\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]. \quad 16 \text{ 分}$$

即直线 BC 与平面 $A'DE$ 所成角的正弦值的取值范围为 $\left[\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$. 17 分

法二:



作 $AG \perp$ 平面 $A'DE$ 于点 G , 连接 GH , GD .

$$\because DE \subset \text{平面 } A'DE, \therefore AG \perp DE. \quad 11 \text{ 分}$$

又 $AH \perp DE$, $AG, AH \subset$ 平面 AGH , $AG \cap AH = A$,

$$\therefore DE \perp \text{平面 } AGH, \quad 12 \text{ 分}$$

又 $GH \subset$ 平面 AGH ,

$$\therefore DE \perp GH, \quad 13 \text{ 分}$$

$\angle GHA$ 是二面角 $A'-DE-A$ 的平面角,

14 分

$\angle GHA = \theta$.

在 $\triangle AGH$ 中, $\sin \theta = \frac{AG}{AH}$.

又 $AH = AD \sin 60^\circ = \sin 60^\circ$,

设直线 BC 与平面 $A'DE$ 所成角为 φ , 又 $BC \parallel AD$, 所以 $\sin \varphi = \frac{AG}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$. 15 分

$\because \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$, $\sin \theta$ 单调递增, $\sin \theta \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right]$,

$\therefore \sin \varphi \in \left[\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$. 16 分

即直线 BC 与平面 $A'DE$ 所成角的正弦值的取值范围为 $\left[\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$. 17 分

19. 本小题主要考查导数及其应用等基础知识; 考查逻辑推理能力, 运算求解能力, 创新意识等; 考查函数与方程思想, 转化与化归思想, 分类与整合思想, 数形结合思想等; 考查逻辑推理, 数学运算, 直观想象等核心素养; 体现基础性、综合性和创新性. 满分17分.

解: (1) 当 $k=1$ 时, $f(x) = \ln(1+x) - x$, 其定义域为 $(-1, +\infty)$,

$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$ 1 分

由 $f'(x) > 0$ 得 $-1 < x < 0$, $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增; 2 分

由 $f'(x) < 0$ 得 $x > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 3 分

综上, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1, 0)$, 单调递增区间是 $(0, +\infty)$. 4 分

(2) 由 (1) 知, $f(x) = \ln(1+x) - x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = \ln(1+x) - x < f(0) = 0$, 即 $x > \ln(1+x)$. 5 分

由 $x > \ln(1+x)$ 得 $2x > \ln(1+2x)$, 即 $x > \frac{1}{2} \ln(1+2x)$. 6 分

令 $x = \frac{1}{2i-1}$, $i \in \mathbf{N}$, 得

$\frac{1}{2i-1} > \frac{1}{2} \ln(1+2 \cdot \frac{1}{2i-1})$, 即 $\frac{1}{2i-1} > \frac{1}{2} [\ln(2i+1) - \ln(2i-1)]$, 7 分

所以, $\frac{1}{1} > \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1)$, $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 3)$, $\cdots$, $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2}[\ln(2n+1) - \ln(2n-1)]$,

累加, 得 $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2}[\ln 3 - \ln 1 + \ln 5 - \ln 3 + \cdots + \ln(2n+1) - \ln(2n-1)]$, 8 分

所以, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2i-1} > \frac{1}{2} \ln(2n+1)$, 证毕. 9 分

(3) 当 $x > 0$ 时, $g(x) - f(x) \geq 1$, 则有

$\ln(1 + \frac{1}{x}) + x(e^x - 2) - [\ln(1+x) - kx] \geq 1$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $k \geq \frac{1+\ln x}{x} - e^x + 2$ 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ 上恒成立. 10 分

令 $\varphi(x) = \frac{1+\ln x}{x} - e^x + 2$, 则 $\varphi'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1+\ln x)}{x^2} - e^x = \frac{-\ln x}{x^2} - \frac{x^2 e^x}{x^2}$, 11 分

令 $\mu(x) = -\ln x - x^2 e^x$.

则 $\mu'(x) = -\frac{1}{x} - (2xe^x + x^2 e^x) = -\frac{1}{x} - xe^x(2+x) < 0$ ($x > 0$),

所以 $\mu(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 12 分

又 $\mu\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - e^{\frac{1}{e}} > 0$, $\mu(1) = -e < 0$, 由零点存在性定理知,

存在唯一零点 $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, 使 $\mu(x_0) = 0$, 即 $-\ln x_0 = x_0^2 e^{x_0}$, 13 分

即 $\frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0} = x_0 e^{x_0}$, 即 $(\ln \frac{1}{x_0}) e^{\ln \frac{1}{x_0}} = x_0 e^{x_0}$ 14 分

由函数 $y = xe^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增函数,

可得 $\ln \frac{1}{x_0} = x_0$, 即 $x_0 = -\ln x_0$, $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$, 15 分

所以当 $0 < x < x_0$ 时, $\mu(x) > 0$, $\varphi'(x) > 0$; 当 $x > x_0$ 时, $\mu(x) < 0$, $\varphi'(x) < 0$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减, 16 分

所以, $\varphi(x) \leq \varphi(x_0) = \frac{1+\ln x_0}{x_0} - e^{x_0} + 2 = \frac{1-x_0}{x_0} - \frac{1}{x_0} + 2 = 1$,

所以 $k \geq \varphi(x_0) = 1$, 即 k 的取值范围为 $k \geq 1$ 17 分