

福建 10 月适应性练习

数 学

全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

- 1.答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
- 2.请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
- 3.选择题用 2B 铅笔在答题卡上把所选答案的标号涂黑；非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答；字体工整，笔迹清楚。
- 4.考试结束后，请将试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 2x \geq 3\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{-1\}$ B. $\{3, 4\}$ C. $\{-1, 4\}$ D. $\{-1, 3, 4\}$

2.已知角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合，终边落在射线 $y = 3x (x \leq 0)$ 上，则 $\sin \alpha =$

- A. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ B. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

3.已知命题 $p: \forall x \in [1, +\infty), x^2 + 3x - 4 \geq 0$, 则命题 p 的否定为

- A. $\exists x \in [1, +\infty), x^2 + 3x - 4 \geq 0$ B. $\exists x \in (-\infty, 1), x^2 + 3x - 4 \geq 0$
C. $\exists x \in [1, +\infty), x^2 + 3x - 4 < 0$ D. $\exists x \in (-\infty, 1), x^2 + 3x - 4 < 0$

4.已知 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) =$

- A. $-\frac{14}{25}$ B. $\frac{7}{25}$ C. $-\frac{7}{25}$ D. $\frac{14}{25}$

5.函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{4x+9}$ 的最大值为

- A. 1 B. 1 C. 3 D. 3

6.已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x+3-6a, & x < 0 \\ -x^2+2a, & x \geq 0 \end{cases}$. 若对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$, 都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$, 则实数 a 的取值范围为

A. $\{a \mid a \geq \frac{3}{4}\}$ B. $\{a \mid a \leq \frac{3}{4}\}$ C. $\{a \mid a < 1\}$ D. $\{a \mid a \leq \frac{3}{8}\}$

7.已知函数 $f(x) = 2x^2 - ae^{2x}$ 在区间 $(1, 2)$ 单调递增, 则实数 a 的取值范围是

A. $[-\infty, \frac{2}{e^2}]$ B. $[-\infty, \frac{4}{e^4}]$ C. D.

8.在锐角 $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 的中点, 点 E 在线段 AD 上, 若 $\vec{AE} = \vec{ED}, \vec{EB} \cdot \vec{EC} = 0$, 则 $\cos A$ 的取值范围是

A. $[\frac{3}{5}, 1)$ B. $[\frac{\sqrt{21}}{7}, 1)$ C. $[\frac{3}{5}, \frac{\sqrt{21}}{7}]$ D. $(0, \frac{3}{5}]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

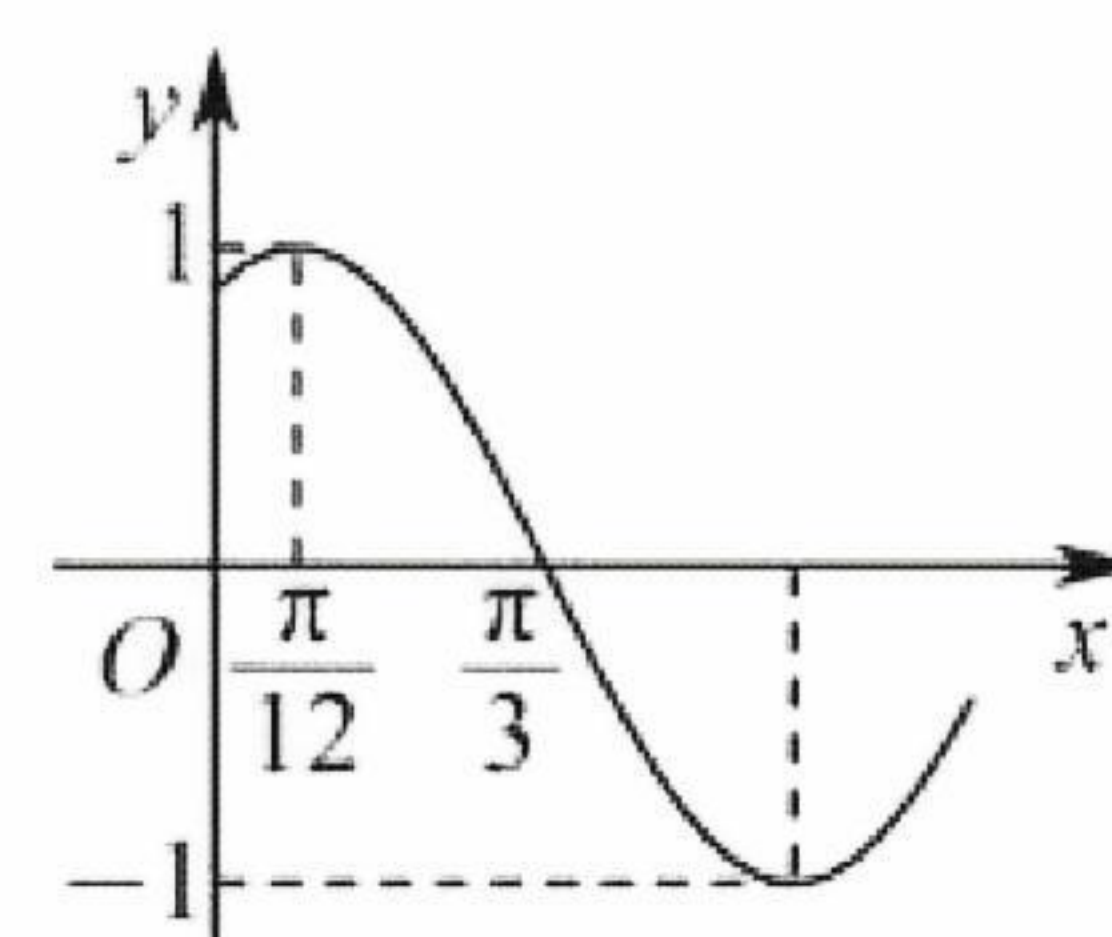
9.设 a, b 均为正数, 且 $a+b=2$, 则

A. $0 < ab \leq 1$ B. $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$

C. $\log_2 \sqrt{a} + \log_4 b \leq 0$ D. $2^a + 2^b \geq 4$

10.已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则

- A. $\omega = 2$
- B. $\varphi = \frac{\pi}{3}$
- C. $f(x)$ 在区间 $[\pi, \frac{5\pi}{4}]$ 上单调递减
- D. 当 x_1, x_2 为方程 $f(x) = \frac{1}{2}$ 的两个不同的解时, $|x_2 - x_1|$ 的最小值为 $\pi/3$



11. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的增函数, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 均满足 $f(x+1)=f(x)+1, f(x)+f(1-x)=1$, 则

A. $f(0)=1$

B. 对任意 $m \in \mathbb{Z}$, 均有 $f\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m}{2}$

C. 对任意正整数 n , 均有 $\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n+1}{2}$

D. 对任意正整数 n , 均有 $\sum_{k=0}^n kf\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n(n+1)}{4}$

【高三数学 第 2 页(共 4 页)】

FJ

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB \cdot AC = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 1, 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设非空集合 $A = \{x \mid 2a-1 \leq x \leq a+3\}$, $B = \{x \mid x^2 - 3x - 4 \leq 0\}$, 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分条件, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x - x, & x \geq 1 \\ \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3}, & 0 < x < 1 \end{cases}$, 记 $P(x_1, f(x_1)), Q(x_2, f(x_2))$, 其中 $0 < x_2 < 1 \leq x_1$, 设曲线 $y=f(x)$

在点 P, Q 处的切线分别为 l_1, l_2 , 且 l_1, l_2 分别交 y 轴于 M, N 两点. 则当 $l_1 \parallel l_2$ 时, $\frac{|PM|}{|QN|}$ 的取值范围

是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \cos(2x+\varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称.

(1) 求 φ ;

(2) 设函数 $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, 求函数 $g(x)$ 的单调递增区间.

16.(本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ 在 $x=0$ 和 $x=2$ 处取得极值.

(1)求 a, b 的值,并求函数 $f(x)$ 的极值;

(2)若函数 $g(x) = f(x) + 3x^2 - 3mx$ 有三个零点, 求实数 m 的取值范围.

17.(本小题满分 15 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,已知 $a \sin B = 2\sqrt{3}(2c-b)$, $B + C = 2A$.

(1)求 $\tan B$;

(2)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$, 求 BC 边上的中线长.

18.(本小题满分 17 分)

已知函数 $f(x) = \log_p x + q$, 其中 $p > 0$ 且 $p \neq 1$, 曲线 $y = f(x)$ 经过 $P(1, 2), Q(2, 3)$ 两点.

(1) 求 p, q 的值;

(2) 求函数 $y = [f(x)]^2 - f(x) - 2$ 在区间 $[\frac{1}{4}, 4]$ 上的值域;

(3) 设 $g(x) = f(x) \cdot [f(x) - 2]$, 若 $|\lg(a)| = |\lg(b)| = |\lg(c)| = |\lg(d)|$, 且 $a < b < c < d$, 求 $ad(b+c)$ 的取值范围.

19.(本小题满分 17 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间及零点;

(2) 若对任意 $x > 1$, 都有 $f(x) \leq \frac{p(x-1)^3}{x(x+1)}$, 求实数 p 的取值范围;

(3) 设 $S_n = \ln(n+1) - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1}$, 证明: 数列 $\{S_n\}$ 单调递增, 且 $0 < S_n < \frac{1}{24}(1 - \frac{1}{2n+1})$.

福建 10 月适应性练习·数学
参考答案、提示及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6
答案	D	A	C	B	A	D
题号	7	8	9	10	11	
答案	B	C	ACD	ABD	BCD	

1. D 【解析】由题意有 $x^2 - 2x \geq 3$, 解得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 3$, 且 $x \in \mathbb{Z}$, 因此 $A \cap B = \{-1, 3, 4\}$. 故选 D.
2. A 【解析】在角 α 的终边上取点 $P(-1, -3)$, 可得 $\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{1+3^2}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 故选 A.
3. C 【解析】全称量词命题的否定是存在量词命题, 故 p 的否定为“ $\exists x \in [1, +\infty), x^2 + 3x - 4 < 0$ ”. 故选 C.
4. B 【解析】 $\cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = -\left[2\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - 1\right] = \frac{7}{25}$, 故选 B.
5. A 【解析】由题意若 $f(x)$ 取最大值必有 $x=2$, 可得 $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{4x+9} = \frac{\sqrt{x+2}}{4(x+2)+1} = \frac{1}{4\sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}} \leq \frac{1}{4}$, 当且仅当 $x = -\frac{7}{4}$ 时等号成立. 故选 A.
6. D 【解析】由 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ 可得: 当 $x_1 - x_2 > 0 (x_1 > x_2)$ 时, 有 $f(x_1) - f(x_2) < 0 (f(x_1) < f(x_2))$, 当 $x_1 - x_2 < 0 (x_1 < x_2)$ 时, 有 $f(x_1) - f(x_2) > 0 (f(x_1) > f(x_2))$, 说明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递减. 已知可知 $x < 0$ 时, $f(x) = -x + 3 - 6a$ 是一个斜率为 -1 的一次函数, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $x \geq 0$ 时, $f(x) = -x^2 + 2a$ 是一个开口向下的二次函数, 对称轴为 y 轴, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故满足 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \geq f(0)$ 即可实现 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递减. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -x + 3 - 6a = 3 - 6a, f(0) = -0^2 + 2a = 2a$, 则 $3 - 6a \geq 2a$, 解得 $a \leq \frac{3}{8}$. 故选 D.
7. B 【解析】 $f'(x) = 4x - 2ae^{2x} \geq 0$ 在 $x \in (1, 2)$ 恒成立, 即 $a \leq \frac{2x}{e^{2x}}$ 对任意 $x \in [1, 2]$ 恒成立, 设函数 $g(x) = \frac{2x}{e^{2x}} (1 \leq x \leq 2)$, 求导得 $g'(x) = \frac{2-4x}{e^{2x}}$, 可得当 $x \in [1, 2)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减, 且 $a \leq \left(\frac{2x}{e^{2x}}\right)_{\min}$, 所以 $a \leq g(2) = \frac{4}{e^4}$. 故选 B.
8. C 【解析】记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 由 $\vec{EB} \cdot \vec{EC} = 0$ 可知, $EB \perp EC$, 所以 $ED = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$, 所以 $AD = a$, 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理, $c^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} - 2a \times \frac{a}{2} \cos \angle ADB$, 同理 $b^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} - 2a \times \frac{a}{2} \cos(\pi - \angle ADB)$, 所以 $b^2 + c^2 = \frac{5a^2}{2}$, 由余弦定理, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 所以 $\cos A = \frac{3}{10} \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \right)$, 因为 B 为锐角, 所以 $b^2 < a^2 + c^2$, 所以 $b^2 < a^2 + c^2 = \frac{2}{5}(b^2 + c^2) + c^2$, 解得 $\frac{b}{c} < \sqrt{\frac{7}{3}}$, 同理, 因为 C 为锐角, 所以 $\frac{b}{c} > \sqrt{\frac{3}{7}}$, 所以故选 C.

【高三数学参考答案 第 1 页(共 6 页)】

$$\frac{3}{5} \leq \cos A = \frac{3}{10} \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c} \right) < \frac{\sqrt{21}}{7}. \text{FJ}$$

9. ACD 【解析】对于 A,由题意得 $(a+b=2 \geq 2\sqrt{ab})$,当且仅当 $a=b=1$ 时取等号,即 $ab \in (0,1]$,A 选项正确;对于 B, $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = (a+b) \times \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{b}{2a} + \frac{a}{b} + \frac{3}{2} \geq 2\sqrt{\frac{b}{2a} \times \frac{a}{b}} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$,当且仅当 $\frac{b}{2a} = \frac{a}{b}$ 时取等号,且 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$,故 $\frac{3}{2} + \sqrt{2} < 3$,B 选项错误;

对于 C, $\log_2 \sqrt{a} + \log_4 b = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b) = \frac{\log_2(ab)}{2}$,且 $ab \in (0,1]$,故 $\log_2 \sqrt{a} + \log_4 b \leq 0$,C 选项正确;对于 D $2^a + 2^b = 2^a + 2^{2-a} = 2^a + \frac{4}{2^a} \geq 2\sqrt{2^a \times \frac{4}{2^a}} = 4$,当且仅当 $a=b=1$ 时取等号, D 选项正确.故选 ACD.

10. ABD 【解析】对于 A,由图可知 $A=1$,且 $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{2\pi}{\omega}$,所以 $\omega=2$, A 选项正确;

对于 B,由 A 项分析知 $f(x) = \sin(2x+\varphi)$,将点 $\left(\frac{\pi}{12}, 1\right)$ 代入解析式可得 $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1$,得 $\frac{\pi}{6} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,即 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,又 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$,B 选项正确;

对于 C,由 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,则 $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ 时, $f(x)$ 单调递减,可得 $x \in \left[\frac{7\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi\right]$,其中 $k \in \mathbb{Z}$,所以 $f(x)$ 在区间 $\left[\pi, \frac{13\pi}{12}\right]$ 单调递增,在区间 $\left[\frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 单调递减, C 选项错误;

对于 D,当 x_1, x_2 为方程 $f(x) = \frac{1}{2}$ 的两个解时,令 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$,所以 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ 或 $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$,其中 $k \in \mathbb{Z}$,可得 $|2x_2 - 2x_1| \geq \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$,即 $|x_2 - x_1| \geq \frac{\pi}{3}$,故 $|x_2 - x_1|$ 的最小值为 $\pi/3$, D 选项正确.故选 AB

D.

11. BCD 【解析】对于 A,由题意,取 $x=0$,得 $f(1)=f(0)+1, f(0)+f(1)=1$,所以 $f(0)=0$,A 选项错误; $f(m)=m$.取 $x = \frac{1}{2}$,由

$f(x)+f(1-x)=1$,得 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.于是对任意 $m \in \mathbb{Z}$,有 $f\left(m + \frac{1}{2}\right) = m + \frac{1}{2}$.因而对任意 $m \in \mathbb{Z}$,均有 $f\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m}{2}$,B 选项正

确;

对于 C,由 $f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{n-k}{n}\right) = 1$.所以 $2\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = n+1$,c 选项正确;

对于 D,记 $T = \sum_{k=0}^n k f\left(\frac{k}{n}\right)$.由 C 选项知 $\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n+1}{2}$,故 $T - \frac{n(n+1)}{4} = \sum_{k=0}^n \left(k - \frac{n}{2}\right) f\left(\frac{k}{n}\right)$.将第 k 项与第 $n-k$ 项配对.

当 $0 < k < \frac{n}{2}$ 时, $\frac{k}{n} < \frac{1}{2}$ 及函数递增,得 $f\left(\frac{k}{n}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.又 $f\left(\frac{n-k}{n}\right) = 1 - f\left(\frac{k}{n}\right)$,所以 $\left(k - \frac{n}{2}\right) f\left(\frac{k}{n}\right) + \left[(n-k) - \frac{n}{2}\right] f\left(\frac{n-k}{n}\right) = \left(k - \frac{n}{2}\right) f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(k - \frac{n}{2}\right) \left[1 - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = 2f\left(\frac{k}{n}\right) - 1 > 0$,因此 $T - \frac{n(n+1)}{4} > 0$,D 选项正确.故选 BCD.

12. $\pi/4$ (5 分,结果正确均得分)

【解析】由题意得 $AB \cdot AC = cb \cos A = 2$, $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = 1$,则 $bc \sin A = 2$,所以 $\tan A = 1$,其中

$A \in (0, \pi)$,则 $A = \frac{\pi}{4}$.

13. $[0,1]$ (5 分,结果正确均得分)

【解析】由题意得 $B=\{x|-1\leq x\leq 4\}$, 且 $A\subseteq B$, 则 $\begin{cases} 2a-1\geq -1 \\ a+3\leq 4 \end{cases}$, 解得 $0\leq a\leq 1$. 综上, a 的取值范围是 $[0,1]$.

$$2a-1\leq a+3$$

14. $[\sqrt{2e}+\infty)$ (5 分, 结果正确均得分)

【解析】由 $f'(x)=\frac{1}{x}$ 则 $\ln x_1 = x_2^2$, 设切线斜率为 k , 则 $\frac{|PM|}{|QN|} = \frac{\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1|}{\sqrt{1+k^2}\cdot|x_2|} = \frac{|x_1|}{|x_2|} = e^{\ln x_1 - \ln x_2}$, 所以 $\ln x_1 - \ln x_2 = x_2^2 - \ln x_2$, 设 $g(x) = x^2 - \ln x (0 < x < 1)$, 则 $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$, 故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 单调递减, 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ 单调递增, 则 $g(x) \geq g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1+\ln 2}{2}$, 于是 $e^{\ln x_1 - \ln x_2} \geq e^{\frac{1+\ln 2}{2}} = \sqrt{2e}$, 故 $\frac{|PM|}{|QN|}$ 的取值范围是 $[\sqrt{2e}+\infty)$.

15. 【答案】(1) $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ (2) $[\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})]$

【命题意图】考查三角函数综合.

【试题分析】(1)由题意得 $f(\frac{\pi}{6}) = \cos(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi) = \pm 1$, (2 分)

所以 $\frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 解得 $\varphi = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, (4 分)

又 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. (5 分)

(2)由(1)得 $f(x) = \cos(2x + \frac{2\pi}{3})$, 所以 $g(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) + \cos(2x + \pi)$,

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) - \cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x,$$

化简得 $g(x) = -\cos(2x - \frac{\pi}{3})$, (9 分)

所以 $2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \pi + 2k\pi$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$, (11 分)

可得 $k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$, 则 $g(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}]$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$. (13 分)

16. 【答案】(1) $a=-3, b=0$, 极小值为 -2 , 极大值为 2 (2) $(1, +\infty)$

【命题意图】考查函数与导数.

【试题分析】(1)由 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 及题意, 得 $f'(0)=0, f'(2)=0$.

所以 $b=0$ 且 $12+4a+b=0$, 解得 $a=-3, b=0$. (2 分)

因此 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, f'(x) = 3x(x-2)$.

当 $x < 0$ 或 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0), (2, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, 2)$. (4 分)

又 $f(0)=2, f(2)=-2$, 所以函数 $f(x)$ 的极大值为 2 , 极小值为 -2 . (6 分)

(2)①当 $m > 0$ 时, 由 $g(x) = x^3 - 3mx + 2$, 有 $g'(x) = 3x^2 - 3m = 3(x - \sqrt{m})(x + \sqrt{m})$. (8 分)

令 $g'(x) = 0$, 可得 $x = \sqrt{m}$ 或 $x = -\sqrt{m}$, 可得函数 $g(x)$ 的增区间为 $(-\infty, -\sqrt{m}), (\sqrt{m}, +\infty)$, 减区间为 $(-\sqrt{m}, \sqrt{m})$.

(10 分)

又由 $g(\sqrt{m}) = 2 - 2m\sqrt{m}, g(-\sqrt{m}) = 2 + 2m\sqrt{m}$ 及函数 $g(x)$ 有三个零点,

即 $\begin{cases} g(\sqrt{m}) < 0 \\ g(-\sqrt{m}) > 0 \end{cases}$ 可得 $m > 1$. (14 分)

②当 $m \leq 0$ 时, $g'(x) \geq 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增, 不可能有三个零点, 不合题意, 舍去. 由上知, 实数 m 的取值范围为 $(1, +\infty)$. (15 分)

17. 【答案】 (1) $4\sqrt{3}$ (2) $\frac{\sqrt{129}}{2}$

【命题意图】考查解三角形与正、余弦定理.

【试题分析】(1)由正弦定理可得 $\sin A \sin B = 2\sqrt{3}(2\sin C - \sin B)$, (1 分)

由题意得 $A+B+C=\pi, B+C=2A$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$, (2 分)

所以 $\sin C = \sin(\pi - A - B) = \sin(A+B) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + B\right)$, (3 分)

所以 $\frac{\sqrt{3}\sin B}{2} = 2\sqrt{3}\left[2\sin\left(\frac{\pi}{3} + B\right) - \sin B\right]$, 整理可得 $\frac{\sin B}{2} = 2\sqrt{3}\cos B$, (5 分)

所以 $\tan B = 4\sqrt{3}$. (6 分)

(2)依题意得, $\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$, 解得 $bc=40$, (7 分)

由 $\tan B = 4\sqrt{3}$ 可知 $0 < B < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7}, \cos B = \frac{1}{7}$, (8 分)

所以 $\sin C = \sin\left(\frac{\pi}{3} + B\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B + \frac{1}{2}\sin B = \frac{5\sqrt{3}}{14}$. (9 分)

所以 $\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{7}}{\frac{5\sqrt{3}}{14}} = \frac{8}{5}$, $\therefore b=8, c=5$, (11 分)

设边 BC 的中点为 D , 则 $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$, (12 分)

所以 $AD^2 = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC})^2 = \frac{b^2 + c^2 + bc}{4} = \frac{129}{4}$, (14 分)

所以 BC 边上的中线长为 $\frac{\sqrt{129}}{2}$. (15 分)

18. 【答案】 (1) $p=2, q=2$ (2) $\left[\frac{9}{4}, 10\right]$ (3) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$

【命题意图】考查函数综合.

【试题分析】(1)由题意得 $\begin{cases} f(1) = q = 2 \\ f(2) = \log_p 2 + q = 3 \end{cases}$ 解得 $p=2, q=2$ (2 分)

(2)当 $x \in \left[\frac{1}{4}, 4\right]$ 时, $f(x) \in [0, 4]$ (4 分)

设 $f(x)=t, t \in [0, 4]$, $\varphi(t) = t^2 - t - 2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$, (5 分)

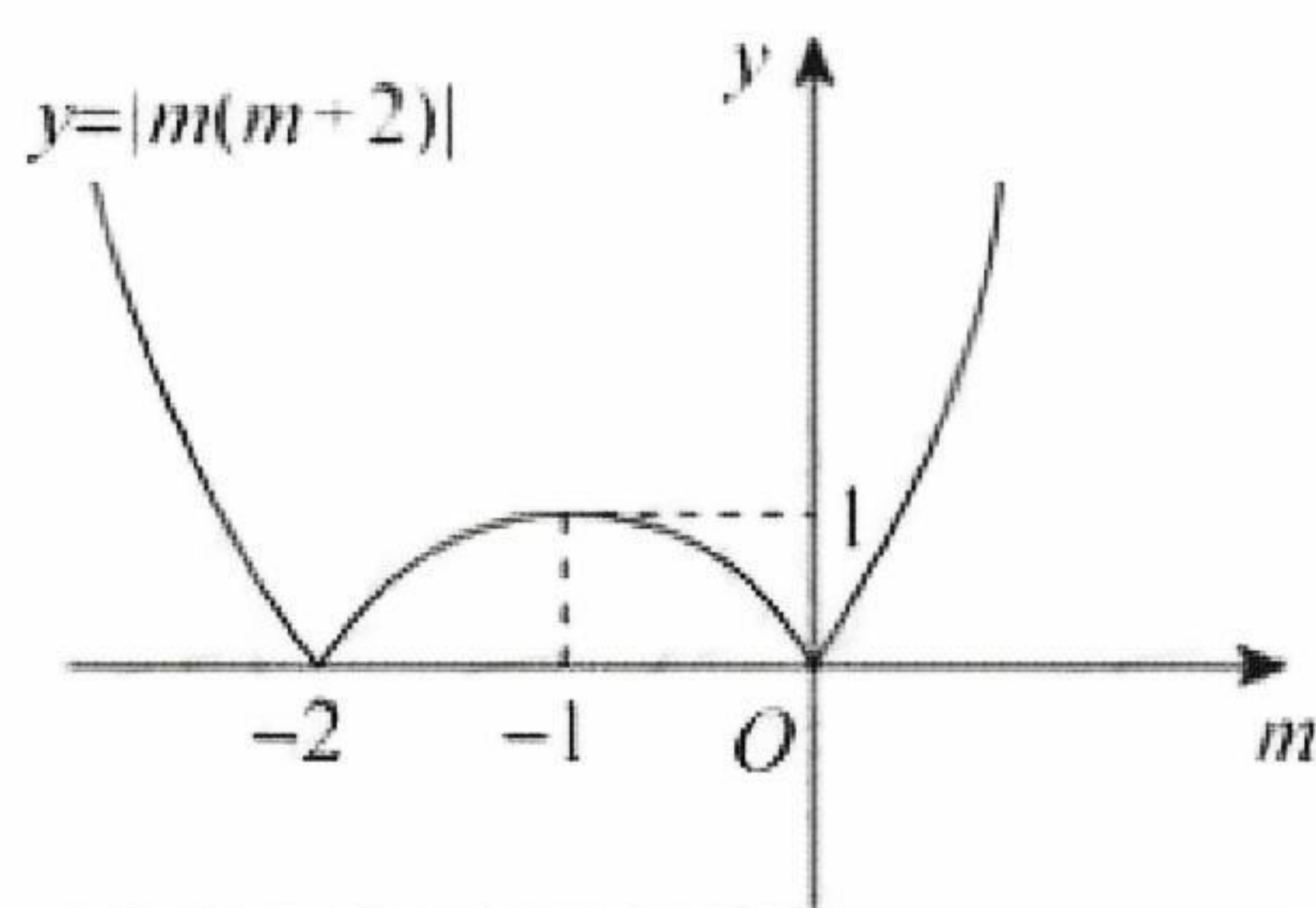
则当 $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 时, $\varphi(t)$ 单调递减; 当 $t \in \left[\frac{1}{2}, 4\right]$ 时, $\varphi(t)$ 单调递增 (6 分)

则当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $\varphi(t)$ 取得最小值 $-\frac{9}{4}$; 当 $t=4$ 时, $\varphi(t)$ 取得最大值 10. (7 分)

故函数 $y = [f(x)]^2 - f(x) - 2$ 在区间 $\left[\frac{1}{4}, 4\right]$ 上的值域为 $\left[-\frac{9}{4}, 10\right]$. (9 分)

(3)不妨设 $|\lg(x)|=k$, 令 $\log_2 x=m$, 则 $f(x) \cdot [f(x)-2] = m(m+2) = m^2 + 2m$. (10 分)

画出 $y = |m^2 + 2m|$ 的图象如下.



由图可得 $k \in (0, 1)$, 所以方程 $m^2 + 2m = k$ 和 $m^2 + 2m = -k$ 各有两个不同的根,

其中方程 $m^2 + 2m - k = 0$ 的两根为 $m = -1 \pm \sqrt{1+k}$, 方程 $m^2 + 2m + k = 0$ 的两根为 $m = -1 \pm \sqrt{1-k}$, 所以: $m_1 = -1 - \sqrt{1-k}$, $m_2 = -1 - \sqrt{1+k}$, $m_3 = -1 + \sqrt{1-k}$, $m_4 = -1 + \sqrt{1+k}$, 且 $m_1 < m_2 < m_3 < m_4$, 由 $m = \log_2 x$, 则对应的 $x = 2^m$, 故 $a = 2^{m_1}$, $b = 2^{m_2}$, $c = 2^{m_3}$, $d = 2^{m_4}$, ... (12 分)

$\therefore ad = 2^{m_1+m_4} \times 2^{m_2+m_3} = 2^{(-1-\sqrt{1-k})+(-1+\sqrt{1+k})} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$, (13 分)

$b + c = 2^{m_2} + 2^{m_3} = \frac{2^{-1-\sqrt{1-k}} + 2^{-1+\sqrt{1-k}}}{2}$, (14 分)

令 $s = \sqrt{1-k}$, 其中 $s \in (0, 1)$, 则 $b + c = \frac{1}{2}(2^{-s} + 2^s)$,

设函数 $y = 2^s + \frac{1}{2^s}$, 令 $r = 2^s \in (1/2, 1)$, 所以 $y = r + \frac{1}{r}$ 在 $(1/2, 1)$ 上单调递增, (15 分)

所以函数 $y = 2^s + \frac{1}{2^s}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 故 $y = 2^s + \frac{1}{2^s} \in \left(2, \frac{5}{2}\right)$, (16 分)

故 $b + c = \frac{2^{-s} + 2^s}{2} \in \left(1, \frac{5}{4}\right)$, $ad(b+c) = \frac{b+c}{4} \in$ 即 $ad(b+c)$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{16}\right)$. (17 分)

19. 【答案】(1) 详见解析 (2) $\left[\frac{1}{6}, +\infty\right)$ (3) 详见解析

【命题意图】考查函数与导数综合.

【试题分析】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0$.

因为等号仅在 $x=1$ 时成立, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无减区间. (2 分)

又 $f(1)=0$, 所以 $f(x)$ 的零点为 $x=1$. (4 分)

(2) 令 $g(x) = \frac{p(x-1)^3}{x(x+1)} - f(x)$, $x \geq 1$.

则 $g'(x) = \frac{(x-1)^2[p(x^2+4x+1)-x]}{x^2(x+1)^2}$.

当 $p = \frac{1}{6}$ 时, $g'(x) = \frac{(x-1)^4}{6x^2(x+1)^2} \geq 0$.

又 $g(1)=0$, 所以当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \leq \frac{(x-1)^3}{6x(x+1)}$. (6 分)

又当 $x \geq 1$ 时, $\frac{(x-1)^3}{x(x+1)} \geq 0$, 故 $p \geq \frac{1}{6}$ 时, 题设不等式成立.

下面证明 $p < \frac{1}{6}$ 时, 题设不等式不恒成立.

当 $p \leq 0$ 时, 由第(1)问知当 $x \geq 1$ 时 $f(x) \geq 0$, 而 $\frac{p(x-1)^3}{x(x+1)} \leq 0$, 故不符合题意, 舍去.

当 $0 < p < \frac{1}{6}$ 时, 令 $d=1-6p$, 则 $d>0$, 且 $p(x^2+4x+1)-x = p(x-1)^2 - dx$.

当 $1 < x < 1 + \sqrt{\frac{d}{p}}$ 时, $p(x-1)^2 < d < dx$, 从而 $g'(x) < 0$. 由于 $g(1)=0$, 故在上述区间内 $g(x) < 0$, 题设不等式不成立, 舍去.

综上, 实数 p 的取值范围为 $\left[\frac{1}{6}, +\infty\right)$. (10 分)

(3) 由 $\ln(n+1) = \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)$,

得 $S_n = \sum_{k=1}^n \left[\ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{2}{2k+1} \right] = \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

由第(1)问, $S_{n+1} - S_n = f\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0$, (12 分)

所以数列 $\{S_n\}$ 单调递增.

又由该求和式及第(1)问, 得 $S_n > 0$.

在第(2)问所得不等式中令 $x = 1 + \frac{1}{k}$, 得 $0 < f\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{6k(k+1)(2k+1)}$.

对 $k=1, 2, \dots, n$ 求和, 得 $0 < S_n < \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(2k+1)}$

(14 分)

对任意正整数 k 有 $\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) - \frac{1}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{(k-1)(k-2)}{2k(k+1)(2k-1)(2k+1)} \geq 0$.

因此 $\frac{1}{k(k+1)(2k+1)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$.

结合上述两个不等式 $0 < S_n < \frac{1}{24} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{24} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$ (17 分)