保密★启用前

准考证号________________ 姓名________

（在此卷上答题无效）

三明市2026年普通高中高三毕业班质量检测

数学试题

本试卷共5页，满分150分.

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若$z=\dfrac{1-i}{1+i}$，则$z^6=$

A. $-i$　　B. i　　C. -1　　D. 1

2. 已知集合$M=\{x|x^2-3x-4<0\}$，$N=\{x|2x>a\}$，若$M\subseteq N$，则实数a的取值范围为

A. $(-\infty,8)$　　B. $(-\infty,8]$　　C. $(-\infty,-2)$　　D. $(-\infty,-2]$

3. 已知$|\boldsymbol{a}|=3$，向量$\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{a}$上的投影向量为$\boldsymbol{a}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$的值为

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

4. 下列区间是函数$y=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$的一个单调递增区间的是

A. $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$　　B. $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$　　C. $[-\pi,0]$　　D. $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$

5. 已知直线$l:y=x+m(m\neq0)$与圆$O:x^2+y^2=4$交于A,B两点，当$\triangle OAB$的面积最大时，点O到直线l的距离为

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R, $f(x+1)=f(1-x)$, $f(x+2)=f(x)+2$, 且当 $x\in[0,1]$时, $f(x)=e^x$, 则$f\left(\frac{2027}{2}\right)$的值为

A. $e^{\frac{1}{2}}+1011$　　B. $e^{\frac{1}{2}}+1012$　　C. $e^{-\frac{1}{2}}+1011$　　D. $e^{-\frac{1}{2}}+1012$

7. 已知四棱锥$P-ABCD$的底面为矩形, $AB=4\sqrt{3}$, $BC=8$, 侧面PAB为正三角形且垂直于底面$ABCD$, M为四棱锥$P-ABCD$内切球表面上的一点, 则点M到直线CD距离的最小值为

A. $2\sqrt{10}-2$　　B. $2\sqrt{10}-1$　　C. $4\sqrt{3}-2$　　D. $4\sqrt{3}-1$

8. 已知函数 $y=e^x$ 与 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 函数$f(x)=g(x)+(a-1)x(a>1)$, 若方程$f(f(x))=x$在区间$[2,5]$上有两解, 则实数a的取值范围为

A. $\left(2-\frac{1}{e},2-\frac{\ln5}{5}\right]$　　B. $\left(2-\frac{1}{e},2-\frac{\ln2}{2}\right]$

C. $\left[2-\frac{1}{e},2-\frac{\ln2}{2}\right]$　　D. $\left[2-\frac{1}{e},2-\frac{\ln5}{5}\right]$

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 下列命题正确的是

A. 若样本数据$x_1,x_2,\cdots,x_6$的平均数为2, 则数据$2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_6-1$的平均数为4

B. 根据小概率值$\alpha=0.05$的独立性检验, 当$\chi^2\geqslant x_{0.05}=3.841$时, 可以推断两变量不独立, 该推断犯错误的概率不超过0.05

C. 在一组样本数据$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots(x_n,y_n)$($n\geqslant2,x_1,x_2,\cdots,x_n$不全相等)的散点图中, 若所有样本点$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$都在直线$y=-\frac{1}{3}x+1$上, 则这组样本数据的线性相关系数为$-\frac{1}{3}$

D. 若$P(A)=0.5$, $P(B|A)=0.6$, $P(B|\overline{A})=0.2$, 则$P(B)=0.4$

10. 记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$S_n = ma_n - 1$，则

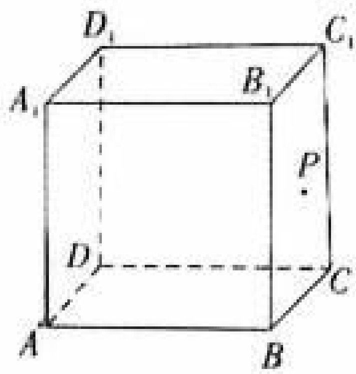
A. 当$\{a_n\}$是等比数列时，$m \neq 0$且$m \neq 1$

B. 当$m = -1$时，$a_n + a_{n+2} > 2a_{n+1}$

C. 当$m = 2$时，数列$\left\{\frac{1}{\log_2 a_{n+1} \cdot \log_2 a_{n+2}}\right\}$的前$n$项和为$\frac{n}{n+1}$

D. 当$m = 3$时，数列$\left\{\frac{n^2}{a_n}\right\}$中，第5项的值最大

11. 如图，在棱长为2的正方体$ABCD - A_1B_1C_1D_1$中，P(与点C_1不重合)是正方体侧面BCC_1B_1内的动点，下列说法正确的是



A. 平面$A_1BD \perp$平面APC_1

B. 若动点P到直线AB的距离等于它到直线CC_1的距离，则点P的轨迹为抛物线的一部分

C. 当$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC_1}$时，过点$P$作该正方体的外接球的截面，其截面面积的最小值为$\frac{16\pi}{9}$

D. 线段AD绕AD_1旋转一周的过程中，AD与AC_1所成角的正切值的取值范围为$\left[3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}\right]$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. $(x - 2y)^6$的展开式中x^2y^4的系数为______.(结果用数字表示)

13. 设椭圆$E:\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$长轴的两个顶点分别为$A$、$B$，点$C$为椭圆$E$上不同于$A$，$B$的一点，若$\triangle ABC$的三个内角$A$，$B$，$C$满足$2\tan A + 2\tan B + \tan C = 0$，则椭圆$E$的离心率为______.

14. 定义：平面内，图形Γ上的所有点在直线l上的射影所组成的图形称为Γ在l上的射影．若边长为m的正三角形在某一矩形的四条边所在直线上的射影长度之和为8，则m的取值范围为______.

四、解答题：本题共5小题，共77分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13分）

袋子中有5个大小质地完全相同的球，其中有2个红球和3个白球，从中随机摸出2个球.

（1）求摸到的两个球颜色相同的概率；

（2）用X表示摸出的球为白球的个数，求X的分布列及均值.

16.（15分）

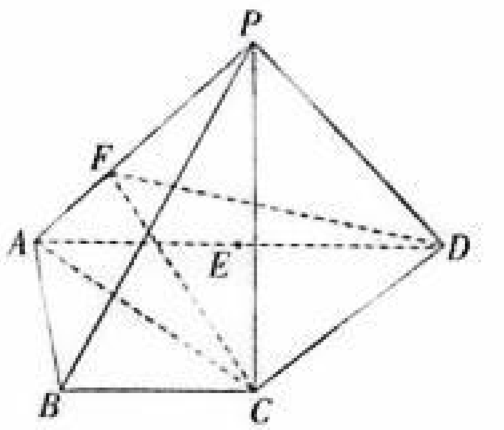
已知锐角$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$a=4$，$b+8\cos B=2c$.

（1）求A；

（2）若点H在$\triangle ABC$所在平面内，且满足$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$，求$\triangle HBC$面积的取值范围.

17.（15分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$PA\perp PD$，$PA=PD$，底面$ABCD$为等腰梯形，且$AD\parallel BC$，$AD=2BC=2AB=4$，$\overrightarrow{AF}=t\overrightarrow{AP}(0\leqslant t\leqslant 1)$，且四面体$AFDC$的体积为$\frac{4\sqrt{3}}{9}$.



（1）求t的值；

（2）若E为AD的中点，过点E,F的平面α与AC平行，交PC于点G，求平面ABG与平面$ABCD$夹角的余弦值.

18.（17分）

已知函数$f(x) = x\ln x - ax^2$.

（1）若函数$f(x)$有两个零点，求实数a的取值范围；

（2）若$a \leqslant 1$，求证：$f(x) \geqslant -e^{x-1}$；

（3）若$a = 3$，$m \neq -3$，关于x的不等式$\dfrac{f(x)}{x} \leqslant -(m+2)\ln x - n + 2$恒成立，求$\dfrac{n-8}{m+3}$的最大值.

19.（17分）

在平面直角坐标系xOy中，M是一个动点，MA与直线$l_1: y = x$垂直，垂足A位于第一象限，MB与直线$l_2: y = -x$垂直，垂足B位于第四象限，若四边形$OAMB$的面积为2.

（1）求动点M的轨迹C的方程；

（2）直线$y = 2x - 6$与曲线C交于点A_1，B_1（A_1在B_1的上方），过点A_1，B_1分别作l_2，l_1的平行线，交于点P_1，过点P_1且斜率为2的直线与曲线C交于点A_2，B_2（A_2在B_2的上方），再过点A_2，B_2分别作l_2，l_1的平行线，交于点P_2，这样一直操作下去，可以得到一列点P_1，P_2，$\cdots$，P_n，$n \geqslant 3$，$n \in \mathbf{N}^*$.

证明：①P_1，P_2，$\cdots$，P_n共线；

②$|OP_i|^2 - |P_iP_{i+1}|^2$为定值，$1 \leqslant i \leqslant n-1$，$i \in \mathbf{N}^*$.

三明市2026年普通高中高三毕业班质量检测
数学参考答案及评分细则

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则.

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

4. 只给整数分数．选择题和填空题不给中间分.

一、选择题：本大题考查基础知识和基本运算．每小题5分，满分40分.

1. C　2. D　3. D　4. B　5. D　6. B　7. A　8. B

二、选择题：本大题考查基础知识和基本运算．每小题6分，满分18分．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. BD　　10. ACD　　11. ABD

三、填空题：本大题考查基础知识和基本运算．每小题5分，满分15分.

12. 240　　13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　14. $\left[2\sqrt{6}-2\sqrt{2},16-8\sqrt{3}\right]$

四、解答题：本大题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.解：（1）设事件$A=$“摸到的两个球颜色相同”，事件A_1=“摸到的两个球为红球”，事件A_2=“摸到的两个球为白球”，则$A=A_1\cup A_2$……………………2分

因为A_1，A_2互斥，所以根据互斥事件的概率加法公式，可得

$P(A)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}+\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$……………………6分

(2) X的可能取值为0，1，2……………………7分

根据古典概型的知识可得

$$P(X=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10},\ P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{3}{5},\ P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$$

X的分布列如表所示.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

……………………11分

X的均值为

$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$ ………………………………………………………………… 13 分

16.解法一：（1）因为$a=4$，$b+8\cos B=2c$，由余弦定理，得

$b+8\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=2c$，………………………………………………………………… 1 分

整理得

$b^2+c^2-a^2=bc$，…………………………………………………………………………3 分

则$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，…………………………………………………………………5 分

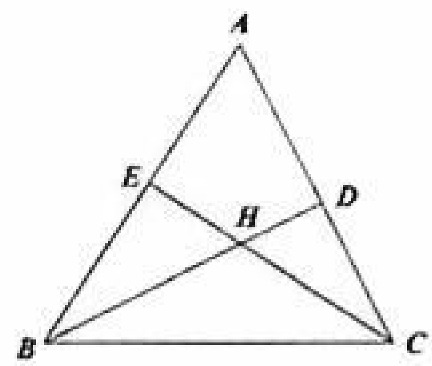
因为$A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$ ………………………………………………………………6 分

（2）因为$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$，所以

$\overrightarrow{HB}\cdot(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HC})=0$，$\overrightarrow{HC}\cdot(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB})=0$，

即$\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$，故$\overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{HC}\perp\overrightarrow{BA}$.

所以H为$\triangle ABC$的垂心. ……………………………………………8 分



连接BH并延长交AC于点D,连接CH并延长交AB于点E,则$BD\perp AC,CE\perp AB$.

在四边形$ADHE$中，由

$\angle A+\angle HDA+\angle HEA+\angle DHE=2\pi$,得

$\angle DHE=\frac{2\pi}{3}$，则$\angle BHC=\frac{2\pi}{3}$,………………………………………………………………9 分

在$\triangle HBC$中，设$\angle HBC=\alpha$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，则$\angle HCB=\frac{\pi}{3}-\alpha$，

由正弦定理，得

$$\frac{HC}{\sin\alpha}=\frac{HB}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\frac{BC}{\sin\angle BHC}=\frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

所以$HC=\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin\alpha$，$HB=\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$，………………………………… 10 分

则 $S_{\triangle HBC}=\frac{1}{2}\times HB\times HC\times\sin\angle BHC=\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\times\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin\alpha\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{16\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\sin\alpha=\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{4\sqrt{3}}{3}$. ……………………12 分

因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $2\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，……………………13 分

所以 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，所以 $S_{\triangle HBC}\in\left(0,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$.

即 $\triangle HBC$ 面积的取值范围为 $\left(0,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$ ……………………15 分

解法二：（1）因为 $a=4,b+8\cos B=2c$，所以 $b+2a\cos B=2c$，……………1 分

由正弦定理，得

$\sin B+2\sin A\cos B=2\sin C$，……………………2 分

即 $\sin B+2\sin A\cos B=2\sin(A+B)=2\sin A\cos B+2\sin B\cos A$，……………………4 分

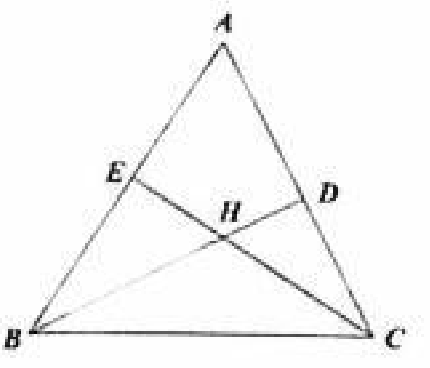
整理，得 $\sin B=2\sin B\cos A$，……………………4 分

因为 $\sin B\neq 0$，所以 $2\cos A=1$，即 $\cos A=\frac{1}{2}$，……………………5 分

因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$ ……………………6 分

（2）因为 $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$，所以 $\overrightarrow{HB}\cdot(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HC})=0$，$\overrightarrow{HC}\cdot(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB})=0$，

即 $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$，故 $\overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{HC}\perp\overrightarrow{BA}$.



所以 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心. ……………………8 分

连接 BH 并延长交 AC 于点 D，连接 CH 并延长交 AB 于点 E，则 $BD\perp AC,CE\perp AB$.

在四边形 $ADHE$ 中，由

$\angle A+\angle HDA+\angle HEA+\angle DHE=2\pi$，得

$\angle DHE=\frac{2\pi}{3}$，则 $\angle BHC=\frac{2\pi}{3}$，……………………9 分

在 $\triangle HBC$ 中，由余弦定理，得

（i）当$a\le 0$时，$g'(x)>0$，则$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，　$g(x)$至多有一个零点，不合题意，舍去……………………………………………………………2 分

（ii）当$a>0$时，令$g'(x)=0$，解得$x=\frac{1}{a}$.当$0<x<\frac{1}{a}$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增；当$x>\frac{1}{a}$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$单调递减.

所以$g(x)$在$x=\frac{1}{a}$处取得最大值，最大值为$g\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1$……………………………3 分

①当$a=\frac{1}{e}$时，由于$g\left(\frac{1}{a}\right)=0$，故$g(x)$只有一个零点；

②当$a>\frac{1}{e}$时，由于$g\left(\frac{1}{a}\right)<0$，故$g(x)$没有零点；

③当$0<a<\frac{1}{e}$时，$\ln\frac{1}{a}-1>0$，即$g\left(\frac{1}{a}\right)>0$，又$x\to 0^+$时，$g(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$时，$g(x)\to-\infty$.所以$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上有一个零点，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上有一个零点，故$g(x)$在$(0,+\infty)$上有两个零点……………………………………………4 分

综上，实数a的取值范围为$\left(0,\frac{1}{e}\right)$. ……………………………………………………5 分

（2）因为$a\le 1$，所以$f(x)\ge x\ln x-x^2$，

故要证$f(x)\ge -e^{x-1}$，只需证$x\ln x-x^2\ge -e^{x-1}$，即证$\ln x-x\ge\frac{-e^{x-1}}{x}$，……………6 分

令$h(x)=\ln x-x+\frac{e^{x-1}}{x}$，则$h'(x)=\frac{1}{x}-1+\frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}=\frac{(x-1)(e^{x-1}-x)}{x^2}\ (x>0)$，

……………………………………………………………………………………………7 分

令$r(x)=e^{x-1}-x(x>0)$，则$r'(x)=e^{x-1}-1$，当$0<x<1$时，$r'(x)<0$，$r(x)$在$(0,1)$上单调递减；当$x\ge 1$时，$r'(x)>0$，$r(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

故$r(x)\ge r(1)=0$，即$e^{x-1}-x\ge 0$……………………………………………………8 分

因为$\dfrac{AF}{AP}=\dfrac{CG}{CP}$，所以$FG// AC$，

又因为$FG\subset$平面EFG，$AC\not\subset$平面EFG，所以$AC//$平面EFG ....9 分

取BC的中点M，连接EM，则$EM\perp AD$，

由（1）知$PE\perp$平面$ABCD$，所以$PE\perp EM$，$PE\perp ED$，

以E为原点，EM，ED，EP所在直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系. ....10 分

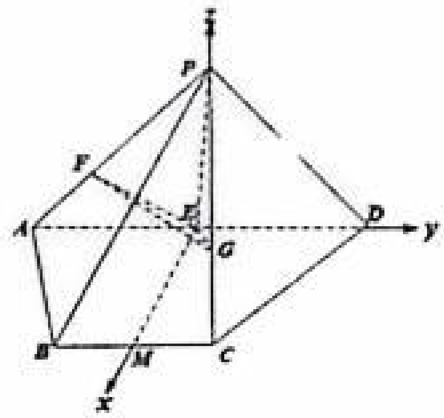
则$E(0,0,0)$，$A(0,-2,0)$，$B(\sqrt{3},-1,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$P(0,0,2)$ ....11 分

所以$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},1,0)$，因为$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AP}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PC}=(0,2,2)+\dfrac{2}{3}(\sqrt{3},1,-2)=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{8}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

....12 分

设平面ABG的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AG}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0.\end{cases}$$



所以

$$\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{8}{3}y+\dfrac{2}{3}z=0,\\ \sqrt{3}x+y=0.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}y=-\sqrt{3}x,\\ z=3\sqrt{3}x.\end{cases}$$

取$x=1$，则$y=-\sqrt{3}$，$z=3\sqrt{3}$.

所以，$\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},3\sqrt{3})$是平面$ABG$的一个法向量 ....13 分

因为$PE\perp$平面$ABCD$，所以平面$ABCD$的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(0,0,1)$.

....14 分

设平面ABG与平面$ABCD$的夹角为θ，则

$$\cos\theta=\left|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle\right|=\left|\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}\times 1}\right|=\dfrac{3\sqrt{93}}{31}.$$

即平面 ABG 与平面 $ABCD$ 角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{93}}{31}$. .... 15 分

解法二：（1）同解法一..7 分

（2）由（1）知 O 点即为 E 点，F 为线段 AP 上靠近 A 的一个三等分点，在线段 PC 上取一点 G，使 $CG=\frac{1}{3}CP$ ....8 分

因为 $\frac{AF}{AP}=\frac{CG}{CP}$，所以 $FG//AC$、

又因为 $FG\subset$ 平面 EFG，$AC\not\subset$ 平面 EFG，所以 $AC//$ 平面 EFG ....9 分

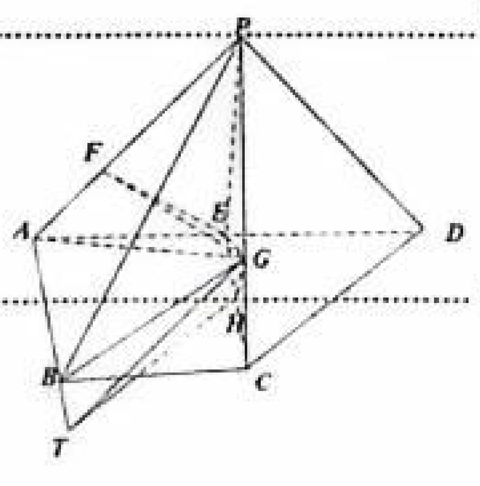
连接 CE，则 $AB=AE=BC$，又 $AE//BC$，所以四边形 $ABCE$ 为菱形.

在线段 CE 上取点 H，使得 $CH=\frac{1}{3}CE$，连接 GH，则 $GH//PE$，由（1）知 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $GH\perp$ 平面 $ABCD$，因为 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $GH\perp AB$.

在平面 $ABCD$ 内过点 H 作 $HT\perp AB$，交 AB 的延长线于点 T，则 HT 为菱形 $ABCE$ AB 边上的高. 连接 GT，则 $AB\perp$ 平面 GHT，所以 $AB\perp GT$，所以 $\angle GTH$ 为二面角 $G-AB-C$ 的一个平面角..12 分

在菱形 $ABCE$ 中，$\angle BAE=60°$，$AB=AE=2$，所以 AB 边上的高为

$AE\cdot\sin\angle BAE=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，即 $HT=\sqrt{3}$，.. 13 分



又 $GH=\frac{1}{3}PE=\frac{2}{3}$，

所以 $GT=\sqrt{GH^2+HT^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+3}=\frac{\sqrt{31}}{3}$，.. 14 分

所以 $\cos\angle GTH=\frac{HT}{GT}=\sqrt{3}\times\frac{3}{\sqrt{31}}=\frac{3\sqrt{93}}{31}$

所以平面 ABG 与平面 $ABCD$ 角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{93}}{31}$. .... 15 分

18.解法一：（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，令 $f(x)=0$，即

$f(x)=x(\ln x-ax)=0$，即 $\ln x-ax=0$.

令 $g(x)=\ln x-ax$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-a(x>0)$ ....1 分

（i）当$a\le 0$时，$g'(x)>0$，则$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$g(x)$至多有一个零点，不合题意，舍去……………………………………………………2 分

（ii）当$a>0$时，令$g'(x)=0$，解得$x=\frac{1}{a}$.当$0<x<\frac{1}{a}$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增；当$x>\frac{1}{a}$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$单调递减.

所以$g(x)$在$x=\frac{1}{a}$处取得最大值，最大值为$g\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1$……………………3 分

①当$a=\frac{1}{\mathrm{e}}$时，由于$g\left(\frac{1}{a}\right)=0$，故$g(x)$只有一个零点；

②当$a>\frac{1}{\mathrm{e}}$时，由于$g\left(\frac{1}{a}\right)<0$，故$g(x)$没有零点；

③当$0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$时，$\ln\frac{1}{a}-1>0$，即$g\left(\frac{1}{a}\right)>0$，又$x\to 0^+$时，$g(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$时，$g(x)\to-\infty$.所以$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上有一个零点，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上有一个零点，故$g(x)$在$(0,+\infty)$上有两个零点……………………………………4 分

综上，实数a的取值范围为$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$. ……………………………………………5 分

（2）因为$a\le 1$，所以$f(x)\ge x\ln x-x^2$，

故要证$f(x)\ge-\mathrm{e}^{x-1}$，只需证$x\ln x-x^2\ge-\mathrm{e}^{x-1}$，即证$\ln x-x\ge\frac{-\mathrm{e}^{x-1}}{x}$，……………6 分

令$h(x)=\ln x-x+\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x}$，则$h'(x)=\frac{1}{x}-1+\frac{\mathrm{e}^{x-1}(x-1)}{x^2}=\frac{(x-1)(\mathrm{e}^{x-1}-x)}{x^2}$ $(x>0)$，

……………………………………………………………………………………7 分

令$r(x)=\mathrm{e}^{x-1}-x(x>0)$，则$r'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-1$，当$0<x<1$时，$r'(x)<0$，$r(x)$在$(0,1)$上单调递减；当$x\ge 1$时，$r'(x)>0$，$r(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

故$r(x)\ge r(1)=0$，即$\mathrm{e}^{x-1}-x\ge 0$……………………………………………8 分

因此当$0<x<1$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在$(0,1)$上单调递减，当$x\geq 1$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以当$x=1$时，$h(x)$取得最小值，最小值为$h(1)=0$.

……………………………………………………………………9 分

所以$h(x)=\ln x-x+\dfrac{e^{x-1}}{x}\geq 0$，即$\ln x-x\geq\dfrac{-e^{x-1}}{x}$.

故$f(x)\geq -e^{x-1}$……………………………………………………10 分

（3）$a=3$时，$\dfrac{f(x)}{x}\leq-(m+2)\ln x-n+2$恒成立，

即$\ln x-3x\leq-(m+2)\ln x-n+2$恒成立，即$(m+3)\ln x-3x+n-2\leq 0$恒成立.

……………………………………………………………………11 分

设函数$H(x)=(m+3)\ln x-3x+n-2$，则$H(x)\leq 0$恒成立，

（i）当$m<-3$时，因为函数$y=(m+3)\ln x$，$y=-3x+n-2$在$(0,+\infty)$上均为减函数，所以函数$H(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

且当$x\to 0^{+}$时，$H(x)\to+\infty$，与题意不符……………………………13 分

（ii）当$m>-3$时，$H'(x)=\dfrac{m+3}{x}-3\ (x>0)$，令$H'(x)=0$，则$x=\dfrac{m+3}{3}$.

当$0<x<\dfrac{m+3}{3}$时，$H'(x)>0$，$H(x)$在$\left(0,\dfrac{m+3}{3}\right)$上单调递增；当$x>\dfrac{m+3}{3}$时

$H'(x)<0$，$H(x)$在$\left(\dfrac{m+3}{3},+\infty\right)$上单调递减. 所以当$x=\dfrac{m+3}{3}$时，$H(x)$取得最大值，最大值为$H\left(\dfrac{m+3}{3}\right)=(m+3)\ln\dfrac{m+3}{3}-(m+3)+n-2$……………………14 分

依题意，$H\left(\dfrac{m+3}{3}\right)\leq 0$，即$(m+3)\ln\dfrac{m+3}{3}-(m+3)+n-2\leq 0$，

所以$\dfrac{n-8}{m+3}\leq 1-\ln\dfrac{m+3}{3}-\dfrac{6}{m+3}$，……………………………15 分

令$\varphi(x)=1-\ln x-\dfrac{2}{x}$，则$\varphi'(x)=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{-x+2}{x^2}$，当$0<x<2$时，$\varphi'(x)>0$，

$\varphi(x)$在$(0,2)$上单调递增；当$x>2$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$在$(2,+\infty)$上单调递减．所以当$x=2$时，$\varphi(x)$取得最大值，最大值为$\varphi(2)=-\ln 2$．

故$1-\ln x-\dfrac{2}{x}\le -\ln 2$……………………………………………………16分

所以$\dfrac{n-8}{m+3}\le 1-\ln\dfrac{m+3}{3}-\dfrac{6}{m+3}\le -\ln 2$，当$m=3$，$n=-6\ln 2+8$时，等号成立．

综上所述，$\dfrac{n-8}{m+3}$的最大值为$-\ln 2$……………………………………………17分

解法二：（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，令$f(x)=0$，即

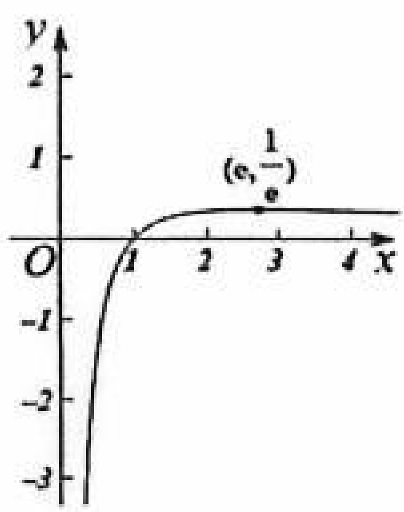
$f(x)=x(\ln x-ax)=0$，即$\ln x-ax=0$，即$a=\dfrac{\ln x}{x}$……………………………………1分

设$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$．令$g'(x)=0$，则$x=\mathrm{e}$．当$0<x<\mathrm{e}$时，

$g'(x)>0$，$g(x)$在$(0,\mathrm{e})$上单调递增；当$x>\mathrm{e}$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(\mathrm{e},+\infty)$单调递减．所以$g(x)$在$x=\mathrm{e}$处取得最大值，最大值为$g(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$．

又$g(1)=0$，当$x\to 0^+$时，$g(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$时，$g(x)\to 0$．

画出$g(x)$的大致图象如图所示．



……………………………………………………………………………………3分

函数$f(x)$有两个零点，等价于函数$y=g(x)$的图象与直线$y=a$有两个交点．

由图象可得，实数a的取值范围为$\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$……………………………………5分

（2）因为 $a\le 1$，所以 $f(x)\ge x\ln x-x^2$，故要证 $f(x)\ge -e^{x-1}$，只需证 $x\ln x-x^2\ge -e^{x-1}$，即证 $\ln x-x\ge \dfrac{-e^{x-1}}{x}$，即证 $x-\ln x\le e^{x-\ln x-1}$ ……………………………7 分

令 $h(x)=x-\ln x-1$，则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}$. 令 $h'(x)<0$，则 $0<x<1$；令 $h'(x)>0$，则 $x>1$. 所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 故 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值，最小值为 $h(1)=0$ ……………………………………………………………… 8 分

令 $t=x-\ln x-1$（$t\ge 0$），从而只需证 $e^t\ge t+1\,(t\ge 0)$.

令 $r(t)=e^t-t-1$，则 $r'(t)=e^t-1$，因为 $t\ge 0$，所以 $r'(t)\ge 0$ 恒成立，所以 $r(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $r(t)_{\min}=r(0)=0$，所以 $e^t\ge t+1$，从而 $f(x)\ge -e^{x-1}$ 成立.

……………………………………………………………………………………………10 分

（3）同解法一……………………………………………………………………17 分

19. 解：（1）设 $M(x,y)$，由 $y=x$ 与 $y=-x$ 垂直，得四边形 $OAMB$ 是矩形，

……………………………………………………………………………………………1 分

故 $|MA|\cdot|MB|=2$，即 $\dfrac{|x-y|}{\sqrt{2}}\times\dfrac{|x+y|}{\sqrt{2}}=2$，整理得 $|x^2-y^2|=4$，………………………… 3 分

因为 A，B 两点分别在第一、四象限，所以动点 M 的轨迹 C 的方程是：

$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1(x\ge 2)$ ……………………………………………………………………4 分

（2）证明①：设斜率为 2，与曲线 C 相交于 A_k,B_k 两点的直线方程为 $y=2x+m_k$，其中 $1\le k\le n,k\in\mathbf{N}^*$，

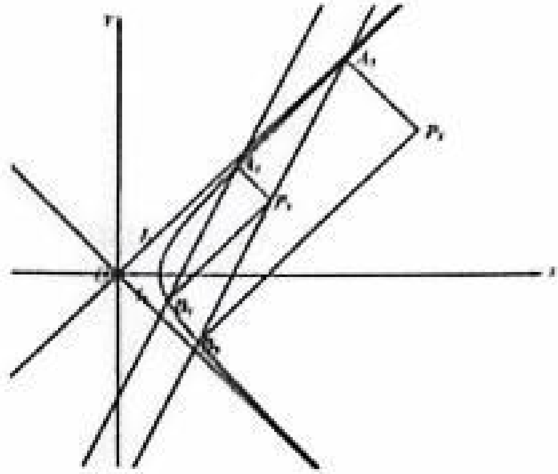
联立方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1,\\ y=2x+m_k,\end{cases}$ 消去 y 可得 $3x^2+4m_kx+m_k^2+4=0$，………………………… 5 分

因为该方程有两个正根，所以 $\begin{cases}\Delta>0,\\ -\dfrac{4m_k}{3}>0,\end{cases}$ 解得 $m_k<-2\sqrt{3}$，…………………………6 分

根据韦达定理：$x_{A_k}+x_{B_k}=-\frac{4m_k}{3}, x_{A_k}x_{B_k}=\frac{m_k^2+4}{3}$，……………………………7 分

直线 A_kP_k 的方程为 $y-y_{A_k}=-\left(x-x_{A_k}\right)$，又 $y_{A_k}=2x_{A_k}+m_k$，

故 $y=-x+3x_{A_k}+m_k$，



直线 B_kP_k 的方程为 $y-y_{B_k}=x-x_{B_k}$，又

$y_{B_k}=2x_{B_k}+m_k$，故 $y=x+x_{B_k}+m_k$，…………8 分

联立方程 $\begin{cases} y=-x+3x_{A_k}+m_k, \\ y=x+x_{B_k}+m_k, \end{cases}$ 两式相加得

$2y_{P_k}=3x_{A_k}+x_{B_k}+2m_k$，

代回方程组得 $x_{P_k}=\frac{3x_{A_k}-x_{B_k}}{2}$，……………………………………………………9 分

于是，$2y_{P_k}-x_{P_k}=3x_{A_k}+x_{B_k}+2m_k-\frac{3x_{A_k}-x_{B_k}}{2}$

$=\frac{3(x_{A_k}+x_{B_k})}{2}+2m_k=\frac{3}{2}\times(-\frac{4m_k}{3})+2m_k=-2m_k+2m_k=0$，

故 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 都在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上，所以 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 共线……………………11 分

证明②：设 P_i 坐标为 $\left(x_i,\frac{1}{2}x_i\right)$，则直线 $A_{i+1}B_{i+1}$ 方程为 $y=2x-\frac{3}{2}x_i$，

故①中 $m_k=-\frac{3}{2}x_i$，……………………………………………………………12 分

所以 $x_{A_{i+1}}+x_{B_{i+1}}=-\frac{4m_k}{3}=2x_i$，$x_{A_{i+1}}x_{B_{i+1}}=\frac{m_k^2+4}{3}=\frac{9x_i^2+16}{12}$，……………………13 分

又 $x_{i+1}=\frac{3x_{A_{i+1}}-x_{B_{i+1}}}{2}$，

于是，$|OP_i|^2=(1+\frac{1}{4})x_i^2=\frac{5}{4}x_i^2$，…………………………………………………14 分

$|P_iP_{i+1}|^2=(1+\frac{1}{4})\left(x_{i+1}-x_i\right)^2=\frac{5}{4}\left(x_{i+1}-x_i\right)^2$

$=\frac{5}{4}\left(\frac{3x_{A_{i+1}}-x_{B_{i+1}}}{2}-\frac{x_{A_{i+1}}+x_{B_{i+1}}}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\left(x_{A_{i+1}}-x_{B_{i+1}}\right)^2$

$=\frac{5}{4}\left[\left(x_{A_{i+1}}+x_{B_{i+1}}\right)^2-4x_{A_{i+1}}x_{B_{i+1}}\right]=\frac{5}{4}\left[\left(2x_i\right)^2-\frac{9x_i^2+16}{3}\right]=\frac{5}{4}x_i^2-\frac{20}{3}$， .... 16 分

所以$|OP_i|^2-|P_iP_{i+1}|^2=\frac{5}{4}x_i^2-\left(\frac{5}{4}x_i^2-\frac{20}{3}\right)=\frac{20}{3}$

故$|OP_i|^2-|P_iP_{i+1}|^2$为定值，$1\le i\le n-1, i\in \mathbf{N}^*$ ....17 分