保密★启用前

准考证号____________________________姓名____________

（在此卷上答题无效）

福建省部分地市2025届高中毕业班第一次质量检测

数学试题

2025.1

本试卷共4页，19小题，满分150分，考试用时120分钟。

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将答题卡交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．在复平面内，$i(1+i)$对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．设集合$A=\{x\in N|\frac{10}{10-x}\in N\}$，$B=\{0,1,2,3,4,5\}$，则$A\cap B=$

A．$\{0,5\}$　　B．$\{2,5\}$　　C．$\{0,1,5\}$　　D．$\{1,3,5\}$

3．已知等轴双曲线C的焦点到其渐近线的距离为1，则C的焦距为

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$2\sqrt{2}$　　D．4

4．已知m，n是两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，$\alpha\cap\beta=n$，则下列说法正确的是

A．若$m/\!/\alpha$，则$m/\!/n$　　B．若$m/\!/n$，则$m/\!/\alpha$

C．若$m\perp n$，则$m\perp\beta$　　D．若$m\perp\beta$，则$m\perp n$

5．已知随机变量X服从正态分布$N(1,\sigma^2)$，若$P(X\leqslant a)=0.3$，且$P(a\leqslant X\leqslant a+2)=0.4$，则$a=$

A．-1　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．0　　D．$\frac{1}{2}$

6. 已知$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，若$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=2(\sin\alpha+\cos\alpha)$，则$\sin 2\alpha=$

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

7. 过抛物线$C:y^2=4x$的焦点F的直线l交C于A，B两点，交直线$x=-1$于点P，若$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AB}$，则$\triangle OAF$与$\triangle OBF$的面积之比为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

8. 若函数$f(x)=\ln(e^{ax-6}+1)-x$的图象关于直线$x=3$对称，则$f(x)$的值域为

A. $[\ln2-3,0)$　　B. $[\ln2-3,+\infty)$　　C. $[\ln3-2,0)$　　D. $[\ln3-2,+\infty)$

二、多项选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9. 已知平面向量$\overrightarrow{a}=(2,\sin\theta)$，$\overrightarrow{b}=(1,\cos\theta)$，则

A. $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$不可能垂直

B. $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$不可能共线

C. $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$不可能为5

D. 若$\theta=\frac{\pi}{2}$，则$\overrightarrow{a}$在$\overrightarrow{b}$方向上的投影向量为$2\overrightarrow{b}$

10. 药物临床试验是验证新药有效性和安全性必不可少的步骤．在某新药的临床实验中，志愿者摄入一定量药物后，在较短时间内，血液中药物浓度将达到峰值，当血液中药物浓度下降至峰值浓度的20%时，需要立刻补充药物．已知血液中该药物的峰值浓度为120 mg/L，为探究该药物在人体中的代谢情况，研究人员统计了血液中药物浓度y(mg/L)与代谢时间x(h)的相关数据，如下表所示：

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\bar{x}=4$
y	120	110	103	93	82	68	59	47	38	$\bar{y}=80$

根据表中数据可得到经验回归方程$\hat{y}=-10.5x+\hat{a}$，则

A. $\hat{a}=122$

B. 变量y与x的相关系数$r>0$

C. 当$x=5$时，残差为-1.5

D. 代谢约10小时后才需要补充药物

11. 已知定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足$f(x+1)=2f(x)+[x]$，其中$[x]$表示不超过x的最大整数，如$[1.9]=1$，$[3]=3$. 当$0<x\leq 1$时，$f(x)=x\ln x$，设x_n为$f(x)$从小到大的第n个极小值点，则

A. $f(2)=2$

B. $f(n)=2^n-n-1(n\in N^*)$

C. 数列$\{x_n\}$是等差数列

D. $f(x_n)<0$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 已知圆锥的母线长为6，且其轴截面为等边三角形，则该圆锥的体积为________.

13. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$的图象经过$(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{2})$，$(\frac{4\pi}{3},-\frac{1}{2})$两点，若$f(x)$在区间$(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3})$上单调递减，则$\omega=$________；$\varphi=$________.

14. 从集合$U=\{1,2,3,4\}$的所有非空子集中任选两个，则选中的两个子集的交集为空集的概率为________.

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13分）

在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a\cos C=(\sqrt{2}b-c)\cos A$.

（1）求A；

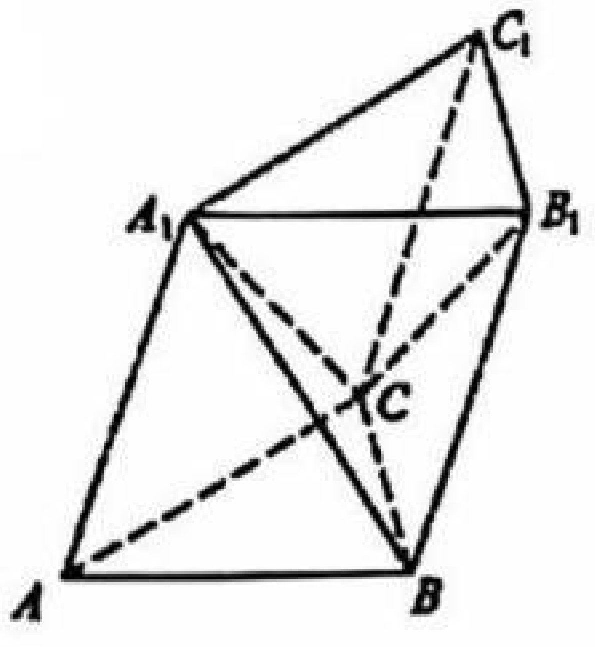
（2）设D为边AB的中点，若$c=2$，且$\sin\angle CDB=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，求$a$.

16.（15分）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$A_1B=A_1C=A_1A=2$，$BA\perp BC$，$BA=BC$.

（1）证明：平面$ABC\perp$平面ACC_1A_1；

（2）若直线A_1B与平面ABC所成角为$60°$，求平面A_1B_1C与平面ABC夹角的余弦值.



17.（15分）

已知动圆M与圆$C_1:(x+1)^2+y^2=9$内切，且与圆$C_2:(x-1)^2+y^2=1$外切，记圆心M的轨迹为曲线C.

（1）求C的方程；

（2）设点P，Q在C上，且以PQ为直径的圆E经过坐标原点O，求圆E面积的最小值.

18.（17分）

设函数$f(x)=x(e^x-a)^2$.

（1）当$a=0$时，求$f(x)$的单调区间；

（2）若$f(x)$是增函数，求a的取值范围；

（3）当$0<a<1$时，设x_0为$f(x)$的极小值点，证明：$-\frac{1}{2e}<f(x_0)<0$.

19.（17分）

若数列$\{a_n\}$满足数列$\{|a_{n+1}-a_n|\}$是等差数列，则称$\{a_n\}$为"绝对等差数列"，$\{|a_{n+1}-a_n|\}$的公差称为$\{a_n\}$的"绝对公差".

（1）若"绝对等差数列"$\{a_n\}$的"绝对公差"为2，且$a_3-a_1=4$，求a_2-a_1的值；

（2）已知"绝对等差数列"$\{d_n\}$满足$d_1=0$，$|d_2-d_1|=1$，且$\{d_n\}$的"绝对公差"为1，记S_n为$\{d_n\}$的前n项和.

（i）若$d_{n+1}-d_n=(-1)^{n-1}n$，求S_{2n}；

（ii）证明：对任意给定的正整数m，总存在d_1，d_2，…，d_m，使得$|S_m|\leq 4$.

福建省部分地市 2025 届高中毕业班第一次质量检测
数学评分标准及解析

选择填空题答案：

1-5. BACDC　6-8. CBB

9. ACD　10. AC　11. BC

12. $9\sqrt{3}\pi$　　13. 答案：$\frac{1}{2}$；$\frac{\pi}{2}$　（第一空 3 分，第二空 2 分，其他结果均不得分）

14.答案：$\frac{5}{21}$（没有化成最简分数如 $\frac{25}{105}$ 同样得分）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8
B	A	C	D	C	C	B	B

1．在复平面内，$\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$ 对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

答案：B

解析：易知 $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})=\mathrm{i}-1$，所以 $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$ 对应的点为 $(1,-1)$，位于第二象限，故选 B.

2．设集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid\frac{10}{10-x}\in\mathbf{N}\}$，$B=\{0,1,2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,5\}$　　B. $\{2,5\}$　　C. $\{0,1,5\}$　　D. $\{1,3,5\}$

答案：A

解析：易知集合 $A=\{0,5,8,9\}$，所以 $A\cap B=\{0,5\}$，故选 A.

3．已知等轴双曲线 C 的焦点到其渐近线的距离为 1，则 C 的焦距为

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$2\sqrt{2}$　　D．4

答案：C

解析：设等轴双曲线的焦距为 $2c$，因为焦点到其渐近线的距离为 $b=1$，所以 $c=\sqrt{2}$，双曲线的焦距为 $2\sqrt{2}$，故选 C.

4．已知 m，n 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，$\alpha\cap\beta=n$，则下列说法正确的是

A．若 $m\parallel\alpha$，则 $m\parallel n$　　B．若 $m\parallel n$，则 $m\parallel\alpha$

C．若 $m\perp n$，则 $m\perp\beta$　　D．若 $m\perp\beta$，则 $m\perp n$

答案：D

解析：若 $m\parallel\alpha$，则 m，n 平行或异面，A 选项错误；

若 $m\parallel n$，则 $m\parallel\alpha$ 或 $m\subset\alpha$，B 选项错误；

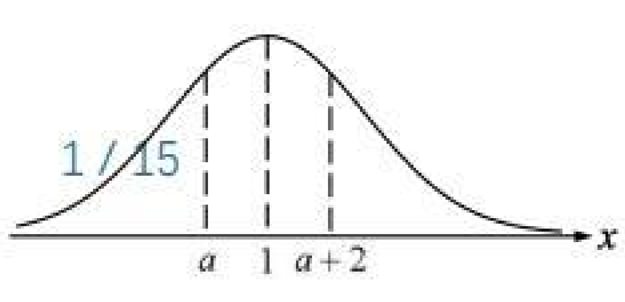
若 $m\perp n$，则 m，β 不一定垂直，也可能平行或相交，C 选项错误；

若 $m\perp\beta$，则 $m\perp n$，D 选项正确；故选 D.

5．已知随机变量 $X\sim N(1,\sigma^2)$，若 $P(X\le a)=0.3$，且 $P(a\le X\le a+2)=0.4$，则 $a=$

A．-1　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．0　　D．$\frac{1}{2}$

答案：C



解析：如图所示，$P(X \geq a+2)=0.3$，
所以 $a+a+2=2\times 1$，
解得 $a=0$，故选 C.

6．已知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，若 $\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=2(\sin\alpha+\cos\alpha)$，则 $\sin 2\alpha=$

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{3}{4}$　　D．$\dfrac{4}{5}$

答案：C

解析：$\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=2(\sin\alpha+\cos\alpha)$，因为 $\sin\alpha+\cos\alpha\neq 0$，

所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，$(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-\sin 2\alpha=\dfrac{1}{4}$，解得 $\sin 2\alpha=\dfrac{3}{4}$，故选 C.

7．过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 F 的直线 l 交 C 于 A，B 两点，交直线 $x=-1$ 于点 P，若 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AB}$，则 $\triangle OAF$ 与 $\triangle OBF$ 的面积之比为

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{3}{4}$　　D．1

答案：B

解析：易知 $x=-1$ 为 C 的准线，过 A，B 分别作 $x=-1$ 的垂线，垂足分别为 M，N，
因为 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AB}$，所以 $2|AM|=|BN|$，即 $2|AF|=|BF|$，

所以 $\triangle OAF$ 与 $\triangle OBF$ 的面积之比为 $\dfrac{1}{2}$，故选 B.

8．若函数 $f(x)=\ln(e^{ax-6}+1)-x$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称，则 $f(x)$ 的值域为

A．$[\ln 2-3,0)$　　B．$[\ln 2-3,+\infty)$　　C．$[\ln 3-2,0)$　　D．$[\ln 3-2,+\infty)$

答案：B

解析：$f(x)=\ln(e^{ax-6}+1)-x=\ln(e^{(a-1)x-6}+e^{-x})$，依题意，$f(0)=f(6)$，
所以 $\ln(e^{-6}+e^{0})=\ln(e^{6a-6}+e^{-6})$，所以 $e^{-6}+e^{0}=e^{6a-12}+e^{-6}$，解得 $a=2$，

所以 $f(x)=\ln(e^{x-6}+e^{-x})$，因为 $e^{x-6}+e^{-x}\geq 2\sqrt{e^{x-6}\times e^{-x}}=\dfrac{2}{e^3}$，所以 $f(x)\geq 2-\ln 3$，

故选 B.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9	10	11
ACD	AC	BC

9．已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(2,\sin\theta)$，$\boldsymbol{b}=(1,\cos\theta)$，则

A．$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不可能垂直

B．$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不可能共线

C．$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 不可能为 5

D．若 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量为 $2\boldsymbol{b}$

答案：ACD

解析：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2+\sin\theta\cos\theta\geq 2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，A 选项正确；

若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，则 $2\cos\theta-\sin\theta=0$，解得 $\tan\theta=2$，所以向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 可能共线，

B 选项错误；

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,\sin\theta+\cos\theta)$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{9+(\sin\theta+\cos\theta)^2}\le\sqrt{11}<5$，C 选项正确；

若 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量为 $\dfrac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=2\boldsymbol{b}$，

D 选项正确；综上所述，应选 ACD.

10. 药物临床试验是确证新药有效性和安全性必不可少的步骤. 在某新药的临床实验中，志愿者摄入一定量药物后，在较短时间内，血液中药物浓度将达到峰值，当血液中药物浓度下降至峰值浓度的 20%时，需要立刻补充药物. 已知某药物的峰值浓度为 $120\,\text{mg/L}$，为探究某药物在人体中的代谢情况，研究人员统计了血液中药物浓度 $y(\text{mg/L})$ 与代谢时间 $x(\text{h})$ 的相关数据，如下表所示：

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\bar{x}=4$
y	120	110	103	93	82	68	59	47	38	$\bar{y}=80$

已知根据表中数据可得到经验回归方程 $\hat{y}=-10.5x+\hat{a}$，则

A. $\hat{a}=122$

B. 变量 y 与 x 的相关系数 $r>0$

C. 当 $x=5$ 时，残差为 -1.5

D. 代谢约 10 小时后才需要补充药物

答案：AC

解析：因为样本中心点 $(4,80)$ 在直线 $y=-10.5x+\hat{a}$ 上，所以 $\hat{a}=80+4\times10.5=122$，A 选项正确；

血液中药物浓度 $y(mg/L)$ 随代谢时间 $x(h)$ 的增大而减小，所以变量 y 与 x 的相关系数 $r>0$，B 选项错误；

当 $x=5$ 时，$\hat{y}=-10.5\times5+122=69.5$，残差为 $68-69.5=-1.5$，C 选项正确；

令 $-10.5\times x+122=120\times0.2$，解得 $x\approx9.33$，D 选项错误；综上所述，应选 AC.

11. 已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=2f(x)+[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[1.9]=1$，$[3]=3$. 当 $0<x\le1$ 时，$f(x)=x\ln x$，设 x_n 为 $f(x)$ 从小到大的第 n 个极小值点，则

A. $f(2)=2$

B. $f(n)=2^n-n-1(n\in\mathbf{N}^*)$

C. 数列 $\{x_n\}$ 是等差数列

D. $f(x_n)<0$

答案：BC

解析：$f(2)=2f(1)+1=1$，故 A 选项错误；

当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(n+1)=2f(n)+n$，等式两边同时加 $n+2$，得

$f(n+1)+(n+1)+1=2(f(n)+n+1)$，故 $f(n)+n+1=2^{n-1}(f(1)+2)=2^n$，

$f(n)=2^n-n-1$，故 B 选项正确；

当 $n-1<x<n$ 时，设 $f(x)=F(x)$，则 $F(x)$ 极小值点为 x_n，

所以当 $n<x<n+1$ 时，$f(x)=2F(x-1)+n-1$，此时，$f(x)$ 的极小值点为 x_n+1，即 $x_{n+1}=x_n+1$，所以 $x_{n+1}-x_n=1$，数列 $\{x_n\}$ 是等差数列，故 C 选项正确；

所以设 $f(x_n)=a_n$，则 $a_1=-\frac{1}{\mathrm{e}}$，$a_{n+1}=2a_n+n-1$，$a_{n+1}+n+1=2(a_n+n)$，

所以 $a_n=(1-\frac{1}{\mathrm{e}})2^{n-1}-n$，当 $n\to+\infty$ 时，$f(x_n)\to+\infty$，故 D 选项错误.

综上所述，应选 BC.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．已知圆锥的母线长为 6，且其轴截面为等边三角形，则该圆锥的体积为________.

答案：$9\sqrt{3}\pi$ （其他结果均不得分）

解析：设圆锥的底面半径为 r，则 $2r=6$，解得 $r=3$，所以圆锥的高为 $3\sqrt{3}$，

所以圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}\pi$，应填 $9\sqrt{3}\pi$；

13. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的图象经过 $(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{2})$，$(\frac{4\pi}{3},-\frac{1}{2})$ 两点，若 $f(x)$ 在区间 $(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3})$ 上单调递减，则 $\omega=$________；$\varphi=$________.

答案：$\frac{1}{2}$；$\frac{\pi}{2}$ （第一空 3 分，第二空 2 分，其他结果均不得分）

解析：依题意，$f(\pi)=0$，所以 $\begin{cases}\sin(\omega\pi+\varphi)=0\\ \sin(\omega\frac{2\pi}{3}+\varphi)=\frac{1}{2}\end{cases}$，即 $\begin{cases}\omega\pi+\varphi=(2k+1)\pi\\ \omega\frac{2\pi}{3}+\varphi=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}$，

解得 $\omega=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\pi}{2}+\varphi=(2k+1)\pi$，因为 $|\varphi|<\pi$，所以 $|\varphi|=\frac{\pi}{2}$，应填 $\frac{1}{2}$，$\frac{\pi}{2}$；

14．从集合 $U=\{1,2,3,4\}$ 的所有非空子集中任选两个，则选中的两个子集的交集为空集的概率为________.

答案：$\frac{5}{21}$（没有化成最简分数如 $\frac{25}{105}$ 同样得分）

解析：设 $A\subseteq U$，$B\subseteq U$，且 $A\cap B=\varnothing$，

易知集合 U 的非空子集个数为 $2^4-1=15$，任取两个集合 A,B 共有 $C_{15}^2=105$ 种选法.

（方法一）①若 $\mathrm{card}(A\cup B)=2$，则共有 $C_4^2=6$ 种选法.；

②若 $\mathrm{card}(A\cup B)=3$，从 4 个元素里选 3 个，再分成两组（不平均），有 $C_4^3C_3^1=12$ 种选法；

③若 $\mathrm{card}(A\cup B)=4$， 4 个元素平均分为两组共有 $\frac{C_4^2}{A_2^2}=3$ 种；不平均分组共有 $C_3^1=3$ 种，小计共有 7 种选法；

所以选中的两个子集的交集为空集的概率为 $P=\frac{6+12+7}{105}=\frac{5}{21}$.

（方法二）①当 $\mathrm{card}(A)=1$ 时，4 个元素里任选一个放入集合 A 中，集合 B 共有 $2^3-1=7$ 种情况，故有 $C_4^1\times7=28$ 种情况；

②当 $\mathrm{card}(A)=2$ 时，4 个元素里任选两个放入集合 A 中，集合 B 共有 $2^2-1=3$ 种情况，故有 $C_4^2\times3=18$ 种情况；

③当 $\mathrm{card}(A)=3$ 时，4 个元素里任选三个放入集合 A 中，集合 B 共有 $2^1-1=1$ 种情况，故有 $C_4^3\times1=4$ 种情况；

总共有 $\frac{1}{2}(28+18+4)=25$ 种情况，

所以选中的两个子集的交集为空集的概率为$P=\dfrac{25}{105}=\dfrac{5}{21}$.

（方法三）对于集合U中的任意元素x均有$x\in A$，且$x\notin B$；$x\in B$，且$x\notin A$；$x\notin (A\bigcup B)$这三种选法，再减去集合A，B其中一个为空集的情况，故共有$\dfrac{1}{2}(3^4-2^4-2^4+1)=25$种，

所以选中的两个子集的交集为空集的概率为$P=\dfrac{25}{105}=\dfrac{5}{21}$. 应填$\dfrac{5}{21}$；

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．（13 分）

在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a\cos C=(\sqrt{2}b-c)\cos A$.

（1）求A；

（2）设D为边AB的中点，若$c=2$，且$\sin\angle CDB=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，求$a$.

解：（1）方法 1：由正弦定理可得$\sin A\cos C-\sqrt{2}\sin B\cdot\cos A+\sin C\cdot\cos A=0$，……2 分

即$\sin\left(A+C\right)-2\sin B\cdot\cos A=0$，即$\sin B-\sqrt{2}\sin B\cdot\cos A=0$. ……………………3 分

因为$B\in(0,\pi)$，可得$\sin B\neq 0$，所以$\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ……………………………4 分

因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{4}$. ………………………………………………5 分

评分细则：

方法 1：分两个过程（3 分+2 分）

过程 1：边化角：利用两角和的正弦公式及$\sin B=\sin(A+C)$化解（3 分）.

过程 2：求值：求出$\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（1 分），求出$A=\dfrac{\pi}{4}$（1 分）

方法 2：由余弦定理可得，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，……………1 分

所以$a\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=(\sqrt{2}b-c)\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，整理得，$b^2+c^2-a^2=\sqrt{2}bc$，…………3 分

所以$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{bc}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ……………………………………………4 分

因为$0<A<\pi$，所以$A=\dfrac{\pi}{4}$. ………………………………………………5 分

评分细则：

方法 2：分两个过程（3 分+2 分）

过程 1：余弦定理角化边：化解整理结果正确（3 分）.

过程 2：求值：求出$\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（1 分），求出$A=\dfrac{\pi}{4}$（1 分）.

说理过程酌情给分.

（2）$\angle CDB+\angle CDA=\pi$，所以$\sin\angle CDA=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以$\cos\angle CDA=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，或$\cos\angle CDA=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，　……………………………………7 分

（写出$\angle CDA$的两个余弦值，得 2 分）

（i）当$\cos\angle CDA=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$时，因为$\angle ACD=\pi-\angle CDA-\angle BAC$，

所以$\sin\angle ACD=\sin(\angle CDA+\angle BAC)=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{10}}{10}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，………9 分

（由正弦和角公式得到$\angle ACD$的正弦值（2 分），过程正确结果错误扣 1 分）

在△ACD中，由正弦定理得，$\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}=\dfrac{AC}{\sin\angle CDA}$，即$AC=\dfrac{AD\cdot\sin\angle CDA}{\sin\angle ACD}$，

所以$AC=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，　……………………………………………………………10 分

在△ABC中，由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

解得，$a=\sqrt{(\dfrac{3\sqrt{2}}{4})^2+2^2-2\times2\times\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{34}}{4}$，　……………………………………11 分

（求出AC得 1 分，求a得 1 分）

（ii）当$\cos\angle CDA=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$时，同理得$\sin\angle ACD=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$AC=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$a=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，

所以$a=\dfrac{\sqrt{34}}{4}$，或$a=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$．……………………………………………………13 分

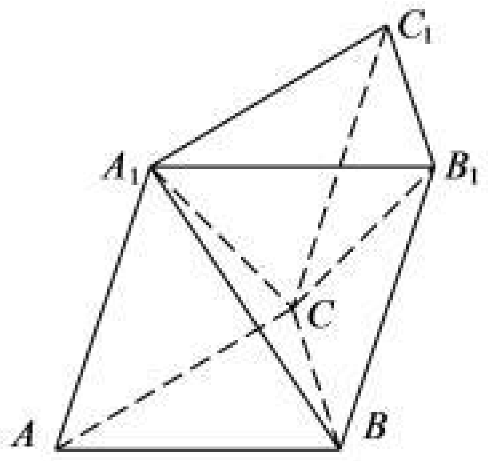
（漏一种情况，扣两分，AC和a值各占 1 分）

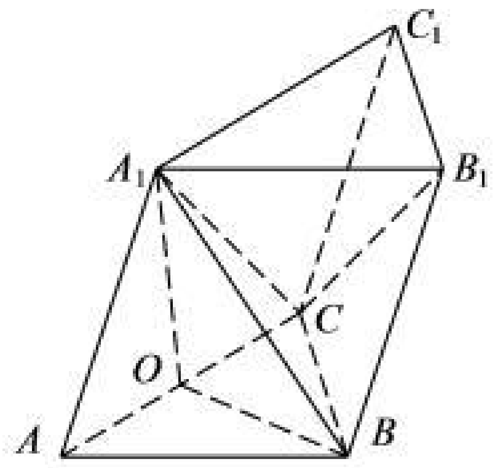
16.（15 分）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$A_1B=A_1C=A_1A=2$，$BA\perp BC$，$BA=BC$．

（1）证明：平面$ABC\perp$平面ACC_1A_1；

（2）若A_1B与平面ABC所成角为$60°$，求平面A_1B_1C与平面ABC夹角的余弦值.





解：（1）方法 1：取AC的中点O，连接A_1O，BO，

因为$A_1A=A_1C$，所以$A_1O\perp AC$，且$A_1O^2+OA^2=AA_1{}^2=4$，　…………………………1 分

因为$AB\perp BC$，$BA=BC$，O为AC的中点，所以$OA=OB=OC$，

所以$A_1O^2+OA^2=A_1O^2+OB^2=4=A_1B^2$，所以$A_1O\perp BO$，　……………………3 分

因为$OA\cap OB=O$，$OA\subset$平面ABC，$OB\subset$平面ABC，

所以$A_1O\perp$平面ABC，　…………………………………………………………5 分

因为$A_1O\subset$平面ACC_1A_1，所以平面$ABC\perp$平面ACC_1A_1．……………………………6 分

评分细则：

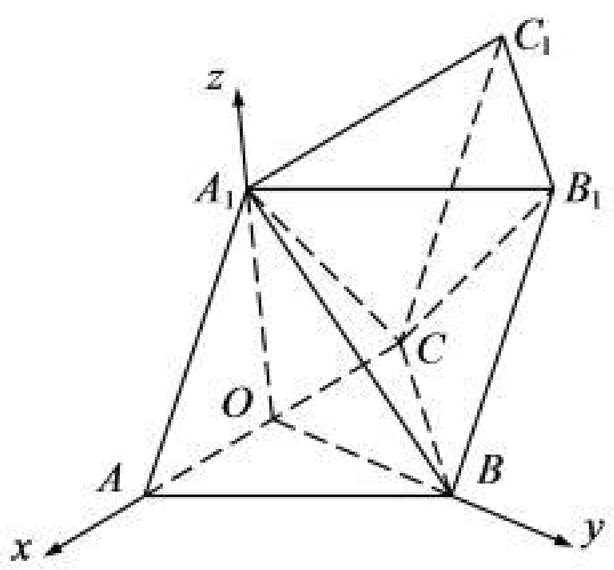
方法 1：A_1O，BO 垂直关系证明（3 分），说理过程酌情给分.
线面垂直证明（2 分），线面垂直$\Rightarrow$面面垂直（1 分）.说理过程酌情给分.

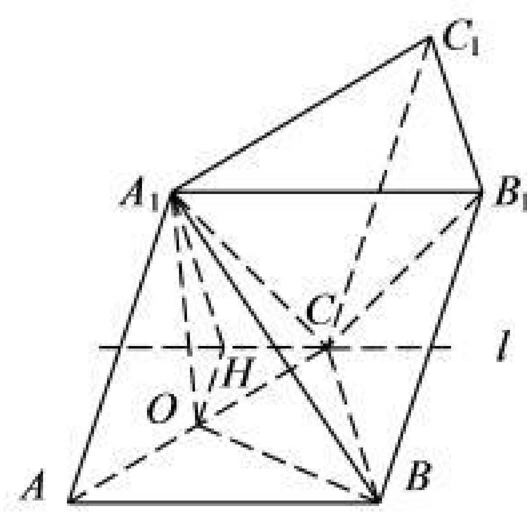
方法 2：设 O 为 A_1 在底面 ABC 的射影，则 A_1O 与 OA，OB，OC 均垂直，……………1 分
因为 $A_1B=A_1C=A_1A$，所以 $OA=OB=OC$ ……………………………………………3 分
射影 O 为底面 $\triangle ABC$ 的外心，又 $\triangle ABC$ 为直角三角形，
所以 O 恰为斜边 AC 的中点，……………………………………………………5 分
因为 $A_1O\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1. ……………………6 分

评分细则：
方法 2：设 O 为投影，得出 $OA=OB=OC$（3 分），说理过程酌情给分.
证明 O 恰为斜边 AC 的中点（2 分），面面垂直证明（1 分）.

（2）由（1）可知，$A_1O\perp$ 平面 ABC，
所以 A_1B 与平面 ABC 所成角即为 $\angle A_1BO$，所以 $\angle A_1BO=60°$， ……………………7 分
因为 $\triangle A_1AO\cong\triangle A_1BO$，所以 $\angle A_1BO=\angle A_1AO=60°$，所以 $A_1O=\sqrt{3}$，$AO=1$，……8 分
$\angle A_1BO=60°$（1 分）无推理过程直接写出不扣分. 求出 $A_1O=\sqrt{3}$，$AO=1$（1 分）.

方法 1：如图所示，以 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OA_1}$ 所在方向为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立空间直角坐标系，则 $A_1(0,0,\sqrt{3})$，$C(-1,0,0)$，$B_1(-1,1,\sqrt{3})$，
所以 $\overrightarrow{A_1B_1}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{CB_1}=(0,1,\sqrt{3})$， ……………………………………10 分
建系及点 A_1，C，B_1 的坐标，向量 $\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{CB_1}$（2 分），建系正确（1 分）
设平面 A_1B_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，





则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CB_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y=0,\\ y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $y=-\sqrt{3}$，$x=-\sqrt{3}$，
所以 $\boldsymbol{n}_1=(-\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$， ……………………………………………………12 分
易知平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$， ……………………………………13 分
设平面 A_1B_1C 与平面 ABC 的夹角为 θ，
所以 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{7}\times 1}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，
所以平面 A_1B_1C 与平面 ABC 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. ……………………………15 分
法向量 $\boldsymbol{n}_1=(-\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$（2 分）需要有求解过程. $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$（1 分），
$\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}$ 代入运算（1 分），结论（1 分）.
若有其他建系方法，仿照上述方案给分.

方法 2：如图，过 C 作 AB 的平行线 l，因为 $AB // A_1B_1$，所以 $l // A_1B_1$，

过 O 作 $OH \perp l$，垂足为 H，……10 分

因为 $A_1O \perp CH$，$OH \perp CH$，$A_1O \cap OH = O$，

所以 $CH \perp$ 平面 A_1OH，因为 $A_1H \subset$ 平面 A_1OH，所以 $A_1H \perp CH$，……12 分

所以平面 A_1B_1C 与平面 ABC 的夹角即为 $\angle A_1HO$，

易知 $OH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\tan\angle A_1HO = \dfrac{A_1O}{OH} = \dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6}$，……14 分

所以 $\cos\angle A_1HO = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$，平面 A_1B_1C 与平面 ABC 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$．……15 分

作出平行线 l（1 分），垂足（1 分），

证明 $A_1H \perp CH$ （2 分），证明过程酌情给分；

写明 $\angle A_1HO$ 即为所求夹角（1 分），求出 $\tan\angle A_1HO$ （1 分），结论（1 分）．

17．（15 分）

已知动圆 M 与圆 $C_1:(x+1)^2+y^2=9$ 内切，且与圆 $C_2:(x-1)^2+y^2=1$ 外切，记圆心 M 的轨迹为曲线 C．

（1）求 C 的方程；

（2）设点 P，Q 在 C 上，且以 PQ 为直径的圆 E 经过坐标原点 O，求圆 E 面积的最小值．

解：（1）设圆 M 的半径为 r，则由题意可知 $|MC_1| = 3-r$，且 $|MC_2| = 1+r$，……2 分

所以 $|MC_1|+|MC_2| = 4 > 2 = |C_1C_2|$，所以圆心 M 的轨迹为椭圆，……3 分

易知椭圆 C 的长轴长为 $2a=4$，焦距为 $2c=2$，所以 $a=2$，$c=1$，

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$，……5 分

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．……6 分

设圆 M 半径表达 $|MC_1|$，$|MC_2|$（2 分）

由椭圆定义证明 M 轨迹为椭圆（1 分）

计算出 a，b，c，（2 分）有计算错误酌情给分

写出 C 的方程（1 分）．

（2）方法 1：设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，由 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ 可知，$x_1x_2+y_1y_2=0$，

当直线 PQ 的斜率不存在时，设直线 $PQ: x=t$，则 $P(t,y)$，$Q(t,-y)$，

由 $\begin{cases} x=t, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 可得，$y^2 = 3-\dfrac{3t^2}{4}$，

所以 $x_1x_2+y_1y_2 = t^2-(3-\dfrac{3t^2}{4})=0$，解得 $t^2=\dfrac{12}{7}$，

此时，圆 E 的面积为 $\dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{48}{7}=\dfrac{12\pi}{7}$．……8 分

当直线 PQ 的斜率存在时，设直线 $PQ: y=kx+m$，

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 可得，$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{-8km}{3+4k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}$， ……………………………………………10 分

所以 $x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=(k^2+1)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$$=(k^2+1)\frac{4m^2-12}{3+4k^2}+km\frac{-8km}{3+4k^2}+m^2=\frac{-12k^2+7m^2-12}{3+4k^2}=0，$$

所以 $-12k^2+7m^2-12=0$，即 $7m^2=12+12k^2$，……………………………………………12 分

代入 $\triangle=64k^2m^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)=16(12k^2+9-3m^2)>0$，

所以 $|PQ|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\,\dfrac{\sqrt{16(12k^2+9-3m^2)}}{3+4k^2}=\sqrt{\dfrac{48}{7}}\sqrt{1+k^2}\,\dfrac{\sqrt{16k^2+9}}{3+4k^2}$，

$$=\sqrt{\frac{48}{7}}\sqrt{1+\frac{k^2}{(3+4k^2)^2}}\geq\sqrt{\frac{48}{7}}，$$ ……………………………………………14 分

当且仅当 $k^2=0$ 时，$|PQ|$ 取得最小值 $\sqrt{\dfrac{48}{7}}$，

所以圆 E 面积的最小值为 $\dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{48}{7}=\dfrac{12\pi}{7}$. ……………………………………………15 分

考虑直线 PQ 的斜率不存在的情况，并计算圆 E 的面积（2 分）

联立直线 PQ 与椭圆，设点写出韦达关系（2 分）

由 OP，OQ 垂直关系，得到 k，m 的关系式（2 分）

写出 $|PQ|$ 的表达式（1 分），求出最小值（1 分），结论（1 分）

方法 2：因为以 PQ 为直径的圆 E 经过坐标原点 O，所以 $OP\perp OQ$，………………7 分

①当直线 OP，OQ 中有一条斜率不存在时，则另一条斜率为 0，

易知 $|PQ|^2=a^2+b^2=7$，所以圆 E 的半径为 $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，所以圆 E 的面积为 $\dfrac{7\pi}{4}$.……………8 分

②若直线 OP，OQ 的斜率均存在，设直线 $OP:y=kx$，直线 $OQ:y=-\dfrac{1}{k}x$， $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

所以由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=kx\end{cases}$ 可得 ${x_1}^2=\dfrac{12}{4k^2+3}$，

同理可得 ${x_2}^2=\dfrac{12k^2}{4+3k^2}$， ……………………………………………………10 分

所以 $|PQ|^2=|OP|^2+|OQ|^2=(1+k^2){x_1}^2+(1+\dfrac{1}{k^2}){x_2}^2$，

$$=\frac{12(1+k^2)}{4k^2+3}+(1+\frac{1}{k^2})\frac{12k^2}{4+3k^2}=7-\frac{7k^2}{(4k^2+3)(4+3k^2)}，$$ ………………………12 分

所以 $|PQ|^2=7-\dfrac{7}{12k^2+\dfrac{12}{k^2}+25}\geq 7-\dfrac{7}{2\sqrt{12k^2\times\dfrac{12}{k^2}}+25}=\dfrac{48}{7}$， ………………………14 分

当且仅当 $k^2=1$ 时，$|PQ|^2$ 取得最小值 $\dfrac{48}{7}$，所以此时，圆 E 面积的最小值为 $\dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{48}{7}=\dfrac{12\pi}{7}$，

因为 $\dfrac{7\pi}{4}>\dfrac{12\pi}{7}$，所以圆 E 面积的最小值为 $\dfrac{12\pi}{7}$.……………………………………15 分

考虑直线 OP 或者 OQ 斜率不存在的情况，并计算圆 E 的面积（2 分）

若计算错误，写出了 OP 与 OQ 的垂直关系，给 1 分.

联立直线 OP 与椭圆，得到 x_1^2，x_2^2 与 k 的关系（2 分）

写出 $|PQ|$ 的表达式（2 分），求出最小值（2 分），结论（1 分）

方法 3：设 $P(2\cos\alpha,\sqrt{3}\sin\alpha)$，$Q(2\cos\beta,\sqrt{3}\sin\beta)$， ……………………………7 分

因为 $OP\perp OQ$，所以

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=4\cos\alpha\cos\beta+3\sin\alpha\sin\beta=0$，…………………………………………8 分

所以 $|PQ|^2=(2\cos\alpha-2\cos\beta)^2+(\sqrt{3}\sin\alpha-\sqrt{3}\sin\beta)^2$

$=6+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-(8\cos\alpha\cos\beta+6\sin\alpha\sin\beta)=6+\cos^2\alpha+\cos^2\beta$， ……………10 分

因为 $4\cos\alpha\cos\beta=-3\sin\alpha\sin\beta$，所以

$16\cos^2\alpha\cos^2\beta=9\sin^2\alpha\sin^2\beta=9(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$，

整理得，$7\cos^2\alpha\cos^2\beta=9[1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)]$， ……………………………11 分

由基本不等式，得 $\cos^2\alpha\cos^2\beta\le\dfrac{(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)^2}{4}$，

所以 $9[1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)]\le\dfrac{7(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)^2}{4}$， ……………………………13 分

设 $t=\cos^2\alpha+\cos^2\beta>0$，则 $9(1-t)\le\dfrac{7t^2}{4}$，即 $(7t-6)(t+6)\ge0$，解得 $t\ge\dfrac{6}{7}$， ………14 分

所以 $|PQ|^2=6+\cos^2\alpha+\cos^2\beta=6+t\ge\dfrac{48}{7}$，

所以圆 E 面积的最小值为 $\dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{48}{7}=\dfrac{12\pi}{7}$. ……………………………………………15 分

由参数方程分别写出 P，Q 的坐标（1 分）

由 OP 与 OQ 的垂直关系，得到两参数关系（1 分）

写出 $|PQ|$ 的表达式（2 分），求出最小值（4 分）计算过程酌情给分，结论（1 分）

方法 4：设 $|OP|=m$，$P(m\cos\alpha,m\sin\alpha)$，

因为 $OP\perp OQ$，所以可设 $|OQ|=n$，且

$Q(n\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{2}),m\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{2}))$，……………………………………………………8 分

因为点 $P(m\cos\alpha,m\sin\alpha)$ 在 C 上，

所以 $\dfrac{m^2\cos^2\alpha}{4}+\dfrac{m^2\sin^2\alpha}{3}=1$，所以 $\dfrac{1}{m^2}=\dfrac{\cos^2\alpha}{4}+\dfrac{\sin^2\alpha}{3}$，

同理可得，$\dfrac{n^2\cos^2(\alpha+\dfrac{\pi}{2})}{4}+\dfrac{n^2\sin^2(\alpha+\dfrac{\pi}{2})}{3}=1$，所以 $\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\sin^2\alpha}{4}+\dfrac{\cos^2\alpha}{3}$， …………10 分

所以 $\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\cos^2\alpha}{4}+\dfrac{\sin^2\alpha}{3}+\dfrac{\sin^2\alpha}{4}+\dfrac{\cos^2\alpha}{3}=\dfrac{7}{12}$， ……………………………12 分

所以 $|PQ|^2=|OP|^2+|OQ|^2=m^2+n^2=\dfrac{12}{7}(m^2+n^2)(\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2})$

$=\dfrac{12}{7}(2+\dfrac{n^2}{m^2}+\dfrac{m^2}{n^2})\ge\dfrac{12}{7}(2+2\sqrt{\dfrac{n^2}{m^2}\times\dfrac{m^2}{n^2}})=\dfrac{48}{7}$， …………14 分

当且仅当$m=n$，$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，或$\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$，$\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$，$\alpha=\dfrac{7\pi}{4}$时等号成立，

所以圆E面积的最小值为$\dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{48}{7}=\dfrac{12\pi}{7}$. ……………………………………………15分

写出P，Q的坐标（2分）

分别写出m^2与n^2的表达式（2分），得到$\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{7}{12}$（2分）

求出$|PQ|$的最值（2分），结论（1分）.

18.（17分）

设函数$f(x)=x(e^x-a)^2$.

（1）当$a=0$时，求$f(x)$的单调区间；

（2）若$f(x)$单调递增，求a的取值范围；

（3）当$0<a<1$时，设x_0为$f(x)$的极小值点，证明：$-\dfrac{1}{2e}<f(x_0)<0$.

解：（1）当$a=0$时，$f(x)=xe^{2x}$，$f'(x)=(2x+1)e^{2x}$，……………………………………1分

当$x\in(-\infty,-\dfrac{1}{2})$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

当$x\in(-\dfrac{1}{2},+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，……………………………………3分

所以$f(x)$的单调递增区间为$(-\dfrac{1}{2},+\infty)$，单调递减区间为$(-\infty,-\dfrac{1}{2})$. ………………4分

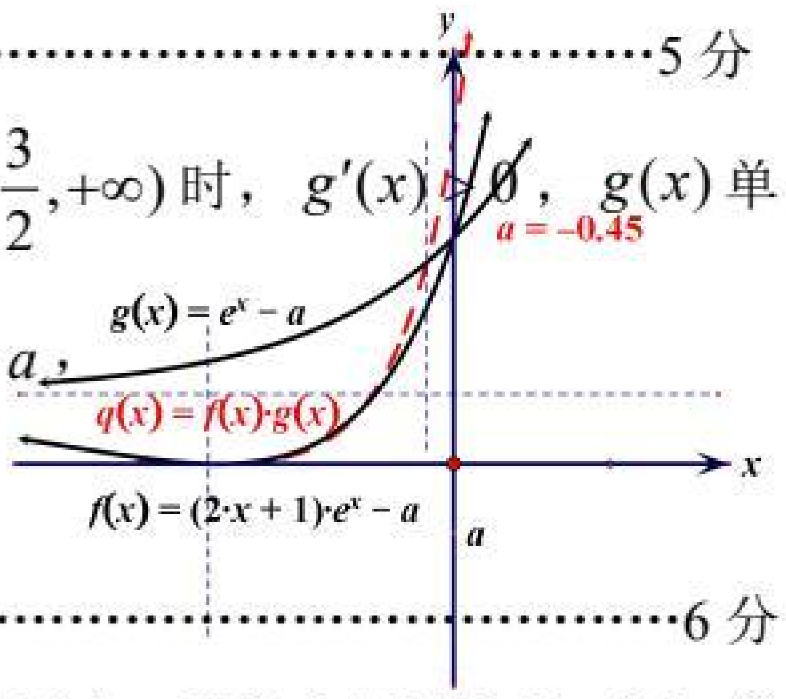
求导正确（1分），

$f(x)$单调性（2分），可根据具体书写形式酌情给分，

结论（1分）.

（2）$f'(x)=(e^x-a)(2xe^x+e^x-a)$，

设$g(x)=2xe^x+e^x-a$，$g'(x)=2xe^x+e^x=(2x+3)e^x$，……………………………5分



当$x\in(-\infty,-\dfrac{3}{2})$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，当$x\in(-\dfrac{3}{2},+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，当$x=-\dfrac{3}{2}$时，$g(x)$取得极小值$g(-\dfrac{3}{2})=-2e^{-\frac{3}{2}}-a$，

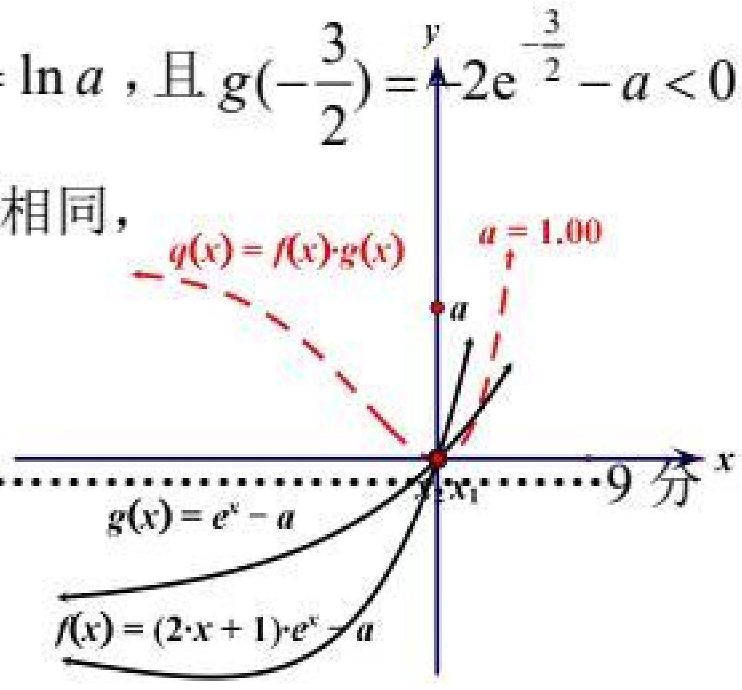
（i）所以当$a\le-2e^{-\frac{3}{2}}$时，$g(x)\ge0$，$e^x-a>0$，

所以$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，符合题意；……………………………………………6分

（ii）当$-2e^{-\frac{3}{2}}<a\le0$时，$y=e^x-a>0$，又$g(x)$存在两个零点，即存在区间使得$g(x)<0$

所以$f'(x)\ge0$不恒成立，不合题意；……………………………………………………7分

（iii）当$a>0$时，若$f'(x)\ge0$，因为 $y=e^x-a$的零点为$x=\ln a$，且$g(-\dfrac{3}{2})=-2e^{-\frac{3}{2}}-a<0$



则$g(x)$与$y=e^x-a$有唯一相同零点且零点两侧函数值符号相同，

所以$g(\ln a)=2a\ln a=0$，解得$a=1$，

此时，当$x>0$时$2xe^x+e^x-1>e^x-1>0$；

当$x<0$时$2xe^x+e^x-1<e^x-1<0$，则$f'(x)\ge0$ ………………………………………9分

所以综上 a 的取值范围为 $(-\infty,-2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}]\cup\{1\}$ ……………………………………………………10 分

$g'(x)$ 求导（1 分）

情形（i）（1 分），情形（ii）（1 分）情形（iii）（2 分）求出 $a=1$ （1 分），说理过程酌情给分，结论（1 分）.

（3）当 $0<a<1$ 时，$g(-\frac{1}{2})=-a<0$，$g(0)>0$，设 x_1 为 $g(x)$ 的零点，则 $-\frac{1}{2}<x_1<0$，

因为 $g(\ln a)=2a\ln a<0$，所以 $x_1>\ln a$， ……………………………………………………11 分

所以当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$y=\mathrm{e}^x-a<0$，$g(x)<0$，所以 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(\ln a,x_1)$ 时，$y=\mathrm{e}^x-a>0$，$g(x)<0$，所以 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$y=\mathrm{e}^x-a>0$，$g(x)>0$，所以 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，……13 分

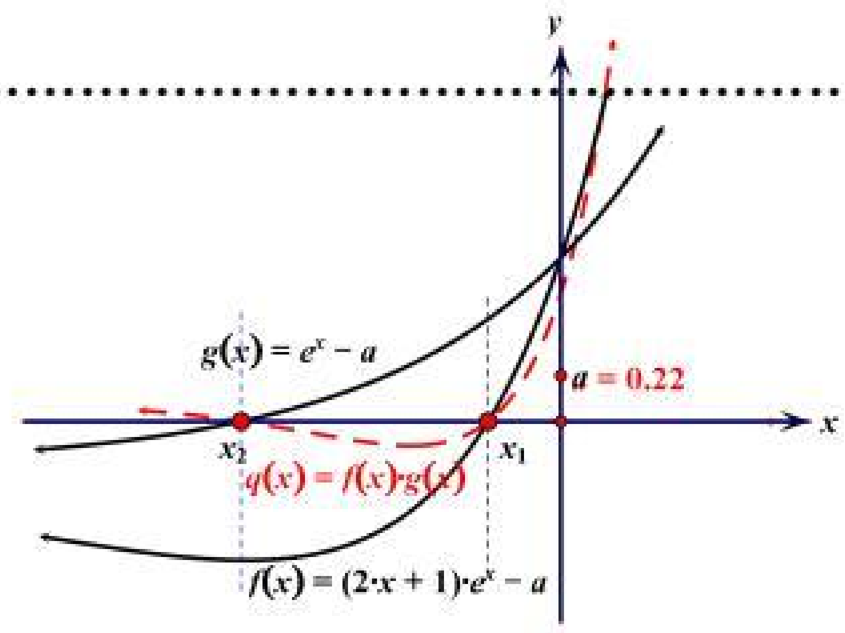
所以 $x_1=x_0$，且 $2x_0\mathrm{e}^{x_0}+\mathrm{e}^{x_0}-a=0$，即 $\mathrm{e}^{x_0}-a=-2x_0\mathrm{e}^{x_0}$， ……………………………14 分

所以 $f(x_0)=(\mathrm{e}^{x_0}-a)^2x_0=(-2x_0\mathrm{e}^{x_0})^2x_0=4{x_0}^3\mathrm{e}^{2x_0}$，

设 $h(x)=4x^3\mathrm{e}^{2x}(-\frac{1}{2}<x<0)$，则 $h'(x)=4(2x+3)x^2\mathrm{e}^{2x}>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)<h(0)=0$，$h(x)>h(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2\mathrm{e}}$， ……………………………………………………16 分

所以 $-\frac{1}{2\mathrm{e}}<f(x_0)<0$. ……………………………………………………………………………17 分



判断 $x_1>\ln a$ （1 分），讨论 $f(x)$ 单调性（2 分），说理过程酌情给分；

判断 $x_1=x_0$ （1 分），写出 $f(x_0)$ 的表达式（1 分），求导判断单调性（1 分），

结论（1 分）.

19.（17 分）若数列 $\{a_n\}$ 满足数列 $\{|a_{n+1}-a_n|\}$ 是等差数列，则称 $\{a_n\}$ 为“绝对等差数列”，$\{|a_{n+1}-a_n|\}$ 的公差称为 $\{a_n\}$ 的“绝对公差”.

（1）若“绝对等差数列” $\{a_n\}$ 的“绝对公差”为 2，且 $a_3-a_1=4$，求 a_2-a_1 的值；

（2）已知“绝对等差数列” $\{d_n\}$ 满足 $d_1=0$，$|d_2-d_1|=1$，且 $\{d_n\}$ 的“绝对公差”为 1，记 S_n 为 $\{d_n\}$ 的前 n 项和，

（i）若 $d_{n+1}-d_n=(-1)^{n-1}n$，求 S_{2n}；

（ii）证明：对任意给定的正整数 m，总存在 d_1，d_2，…，d_m 满足 $|S_m|\le 4$.

解：（1）设 $|a_2-a_1|=x\ge 0$，则 $|a_3-a_2|=x+2$，

因为 $a_3-a_1=(a_3-a_2)+(a_2-a_1)=4$， ……………………………………………………………2 分

若a_2-a_1 与a_3-a_2 均为负数，则$-x-x-2=4$，解得$x=-3$，不合题意；
若a_2-a_1 与a_3-a_2 一正一负，则$a_3-a_1=2$或-2，不合题意；
所以$a_2-a_1=x$，$a_3-a_2=x+2$， ……………………………………………………4 分
所以$2x+2=4$，解得$x=1$，故$a_2-a_1=1$． ……………………………………………5 分
a_3-a_1拆解成$a_3-a_2+a_2-a_1$（2 分），有设参过程正确理解题意给 1 分，
a_2-a_1 与a_3-a_2 正负讨论（2 分），直接判断为正可扣 1 分，结论（1 分）．

（2）（i）$d_{2n}=d_1+(d_2-d_1)+\cdots+(d_{2n}-d_{2n-1})=1-2+3-4+\cdots+(2n-1)=n$， ………6 分
因为$d_{2n-1}=d_{2n}-(2n-1)=1-n$． ……………………………………………………………7 分
所以$S_{2n}=(d_1+d_2)+(d_3+d_4)+\cdots+(d_{2n-1}+d_{2n})=n$． ……………………………………8 分
求得$d_{2n}=n$ （1 分），$d_{2n-1}=1-n$ （1 分），结论（1 分）
若有其他求解方法，酌情给分.
（ii）依题意，$|d_{n+1}-d_n|=n$，记$d_{n+1}-d_n=nb_n$，其中$b_n\in\{-1,1\}$，
①若m为奇数，
令$b_n=(-1)^{n-1}$，由（i）可知，$S_{m-1}=\dfrac{m-1}{2}$， ………………………………………9 分
因为$d_m=d_1+(d_2-d_1)+\cdots+(d_m-d_{m-1})=0+1-2+3-4+\cdots+m-2-(m-1)=-\dfrac{m-1}{2}$，
所以$S_m=S_{m-1}+d_m=\dfrac{m-1}{2}-\dfrac{m-1}{2}=0\le 4$，符合题意；
所以对任意给定的奇数m，存在满足$a_{n+1}-a_n=(-1)^{n-1}n$的$\{a_n\}$使得$|S_m|\le 4$． ………10 分
m为奇数情形（2 分），其中$S_{m-1}=\dfrac{m-1}{2}$ （1 分），$S_m=0$ （1 分）
②若m为偶数，
因为$d_m=d_1+(d_2-d_1)+\cdots+(d_m-d_{m-1})=b_1+2b_2+\cdots+(m-1)b_{m-1}$，
$d_{m-1}=d_1+(d_2-d_1)+\cdots+(d_{m-1}-d_{m-2})=b_1+2b_2+\cdots+(m-2)b_{m-2}$，
……
$d_2=d_1+(d_2-d_1)=b_1$，
$d_1=0$，
累加得$S_m=(m-1)b_1+2(m-2)b_2+...+k(m-k)b_k+...+(m-1)b_{m-1}=\sum_{k=1}^{m-1}k(m-k)b_k$ ……11 分
由（i）知，令$b_n=(-1)^{n-1}$可得，$S_m=\dfrac{m}{2}$.
若$m\le 8$，则$|S_m|=\dfrac{m}{2}\le 4$，符合题意，故下面只讨论$m\ge 10$的情况. …………………12 分
写出$S_m=\sum_{k=1}^{m-1}k(m-k)b_k$ （1 分），讨论$m\le 8$的情况满足题意（1 分）
易知$S_m=\sum_{k=1}^{m-1}k(m-k)b_k=\dfrac{m^2}{4}\sum_{k=1}^{m-1}b_k-\sum_{k=1}^{m-1}(\dfrac{m}{2}-k)^2b_k$， ……………………………13 分
当k为大于 1 的奇数时，$b_{k-1}=-1$，$b_k=1$，设此时的$k=j=\dfrac{m}{2}-i$，即$b_{j-1}=-1$，$b_j=1$，

构造新数列$\{c_n\}$，其中$c_{j-1}=-b_{j-1}=1$，$c_j=-b_j=-1$，其余各项均不变即$c_k=b_k\ (k\neq j-1,j)$，

所以$\sum\limits_{k=1}^{m-1}c_k=\sum\limits_{k=1}^{m-1}b_k$，记$\{b_n\}$调整为$\{c_n\}$后该数列的前$m$项和为$S_m{}'$，

$$\sum_{k=1}^{m-1}(\frac{m}{2}-k)^2c_k=\sum_{k=1}^{m-1}(\frac{m}{2}-k)^2b_k-2(\frac{m}{2}-j+1)^2b_{j-1}-2(\frac{m}{2}-k)^2b_j=\sum_{k=1}^{m-1}(\frac{m}{2}-k)^2b_k+2(i+1)^2-2(i)^2$$

则$S_m{}'=\dfrac{m^2}{4}\sum\limits_{k=1}^{m-1}c_k-\sum\limits_{k=1}^{m-1}(\dfrac{m}{2}-k)^2c_k$

$=[\dfrac{m^2}{4}\sum\limits_{k=1}^{m-1}b_k-\sum\limits_{k=1}^{m-1}(\dfrac{m}{2}-k)^2b_k]-4i-2=\dfrac{m}{2}-4i-2$，……………………………15 分

写出$S_m=\dfrac{m^2}{4}\sum\limits_{k=1}^{m-1}b_k-\sum\limits_{k=1}^{m-1}(\dfrac{m}{2}-k)^2b_k$（1 分），构造新数列$\{c_n\}$，得到$S_m{}'$的表达式（2 分）

有调整相邻两项的思路给 1 分，其他表达书写过程酌情给分.

令$-4\le\dfrac{m}{2}-4i-2\le4$，解得$\dfrac{m-12}{8}\le i\le\dfrac{m+4}{8}$，……………………………16 分

则对任意给定的偶数m，当$j=\dfrac{m}{2}-[\dfrac{m-12}{8}]-1$，或$j=\dfrac{m}{2}-[\dfrac{m+4}{8}]$时，其中$[x]$为不超过$x$的最大整数，即存在$\{c_n\}$满足$|S_m|\le4$，

所以综上所述，对任意给定的正整数m，总存在一个$\{a_n\}$满足$|S_m|\le4$………………17 分

依题意，解得i的范围（1 分），说明存在满足题意的j和结论（1 分）

（3）参数方法二：依题意$|d_{n+1}-d_n|=n$，

设$d_{n+1}-d_n=nb_n$，其中$b_n\in\{-1,1\}$．因为$d_n=d_1+(d_2-d_1)+\cdots+(d_n-d_{n-1})$，

所以$S_m=(d_m-d_{m-1})+2(d_{m-1}-d_{m-2})+\cdots+(m-1)(d_2-d_1)=\sum\limits_{i=1}^{m-1}i(m-i)b_i$．…………10 分

写出$|d_{n+1}-d_n|=n$（1 分），写出$S_m=\sum\limits_{i=1}^{m-1}i(m-i)b_i$的表达式（1 分）

（i）若$m=2k+1$为奇数．因为$i(m-i)=(m-i)[m-(m-i)]$，

所以当$b_n=(-1)^{n-1}$时，$|S_m|=0\le4$，符合题意；……………………………12 分

m为奇数情形（2 分）

（ii）若$m=2k$为偶数．由（2）知，当$b_n=(-1)^{n-1}$时，$S_m=k$．若$k\le4$，当$b_n=(-1)^{n-1}$时，$|S_m|=k\le4$，符合题意，故下面只讨论$k>4$的情况．……………………13 分

讨论$m\le8$的情况满足题意（1 分）

设正整数j满足$2j+1\le k$．若将$b_{2j}=-1$和$b_{2j+1}=1$的值对调，S_m的改变量

$\Delta S_m=2[2j(m-2j)-(2j+1)(m-2j-1)]=8j-2m+2$，

所以此时的前m项和为

$S_m'=S_m+\Delta S_m=8j+2-3k$．…………………………………………15 分

调整相邻两项系数为相反数，求得$S_m{}'$（2 分）

有调整相邻两项的思路给 1 分，其他表达书写过程酌情给分

记$[x]$为不超过x的最大整数.

当j取遍1，2，…，$[\dfrac{k-1}{2}]$时，S_m'取遍$10-3k$，$18-3k$，……，$8[\dfrac{k-1}{2}]+2-3k$．

因为$10-3k \le -5$，$8[\frac{k-1}{2}]+2-3k \ge k-2 \ge 3$，且上述序列中相邻两数之差为 8，

所以存在$j \in \{1,2,\cdots,[\frac{k-1}{2}]\}$，使得$S'_m \in \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$，符合题意．………17 分

证明存在满足题意的调整方案（1 分），结论（1 分）．