高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{(x,y)\mid y=x\}$，$N=\{(x,y)\mid y=\sqrt{x}\}$，则 $M\cap N=$

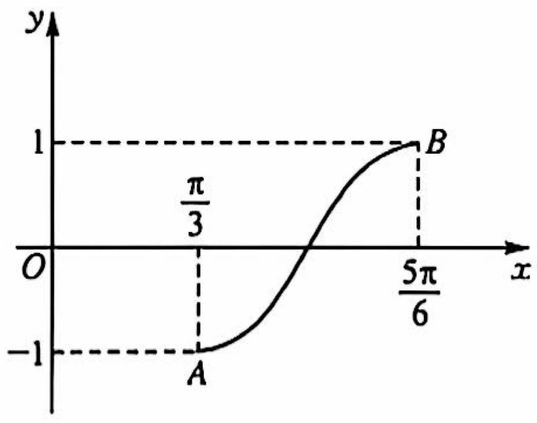
A. $\{(0,1)\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{(0,0),(1,1)\}$　　D. $\{(1,1)\}$

2. 椭圆 $x^2+2y^2=6a(a>0)$ 的离心率为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<2\pi)$ 从点 $A\left(\frac{\pi}{3},-1\right)$ 到点 $B\left(\frac{5\pi}{6},1\right)$ 的一段图象如图所示，则 $\varphi=$



A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{5\pi}{6}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

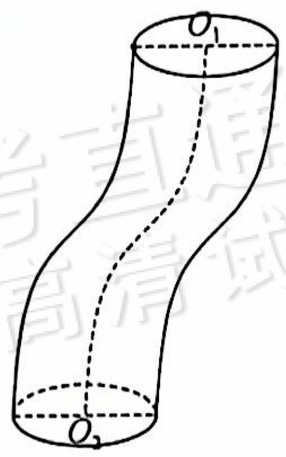
4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{c}=(-1,-3)$，若向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\parallel\boldsymbol{b}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，则 $|\boldsymbol{b}|=$

A. 3　　B. $\frac{7}{3}$　　C. $\frac{5}{3}$　　D. 7

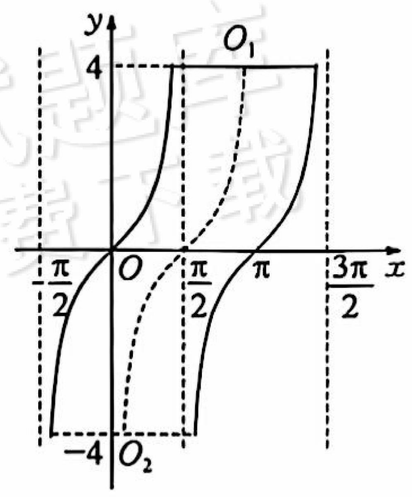
5. 已知 β 为锐角，$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{12}{5}$，则 $\sin\beta=$

A. $\frac{23}{65}$　　B. $\frac{16}{65}$　　C. $\frac{63}{65}$　　D. $\frac{33}{65}$

6. 我国南北朝时期的数学家祖暅提出了著名的原理："幂势既同，则积不容异"，这句话的意思是：夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的这两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等. 一段弯曲的水管，如图(1)，其横截面为圆面，最大纵截面是由曲线 $y=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\right)$ 与两直线 $y=\pm 4$ 围成的平面区域，如图(2). 根据祖暅原理，计算该段水管的体积为



图(1)



图(2)

A. $8\pi^2$　　B. $4\pi^2$　　C. $4\pi^3$　　D. $2\pi^3$

7. 若 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, x\leqslant a,\\ \ln(x+1)-x-1, x>a\end{cases}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，则 a 的取值范围为

A. $[0,1]$　　B. $(-1,0]$　　C. $[1,2]$　　D. $(-1,1]$

8. 在斜△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $b=2$，$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{2}{\tan B}$，则△$ABC$ 面积的最大值为

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 在复数范围内，方程 $z^2+z+1=0$ 的两根分别为 z_1,z_2，且 $(z_1-z_2)\mathrm{i}<0$，则

A. z_1 与 z_2 互为共轭复数　　B. $z_1=\frac{1}{z_2}$

C. $z_1\cdot\overline{z_2}=1$　　D. z_1^3 为实数

10. 设 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，其公比为 $q(q\neq 1)$，正整数 m,k,p,r 满足 $m<p<r<k$，且 $m+k=p+r$，则

A. $a_m+a_k<a_p+a_r$　　B. $|a_m-a_k|>|a_p-a_r|$

C. $a_m^3+a_k^3>a_p^3+a_r^3$　　D. $|a_m^3-a_k^3|>|a_p^3-a_r^3|$

11. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的以 2 为周期的奇函数，且当 $1<x<2$ 时，$f(x)=\ln\frac{3-x}{x-1}$，则

A. $f(-5)=0$

B. 曲线 $y=f(x)$ 的对称中心为 $(2k,0)$，$k\in\mathbf{Z}$

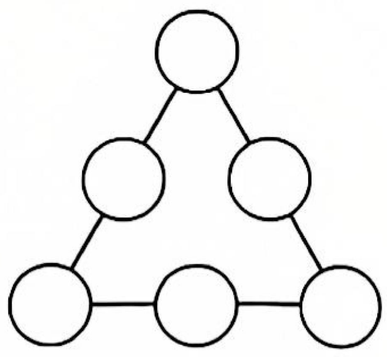
C. 当 $-1<x<1$ 时，$f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$

D. 当 $a>-2$ 时，函数 $y=f(x)-a(x-2)$ 在区间 $(1,3)$ 上仅有三个零点

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. $(1-\sqrt{x})^8$ 的展开式中 x^2 的系数是_____.（用数字作答）

13. 已知抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，$P(x_0,y_0)$ 是 E 上异于原点 O 的一点，过点 P 的直线 l 的方程为 $y_0y=p(x+x_0)$，设 l 与 x 轴交于 M 点，则 $\frac{|PF|}{|MF|}$ 的值为_____.



第 14 题图

14. 将 1，2，3，4，5，6 随机填入如图所示的三角形图形中的 6 个圈中，每个数恰好出现一次，则三角形三边上的数字之和均相等的概率为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本小题满分 13 分）

某超市经营一种进价为 60 元/千克的干货，在市场试销中，市场观察员统计了 9 天此干货的销售单价 x（单位：元/千克）与日销售量 y（单位：千克）的数据，得到如下统计表：

x	89	88	87	86	85	84	83	82	81
y	4.2	4.3	4.6	4.8	5.1	5.3	5.4	5.6	5.7

(1)根据表中和题后所给出的统计数据，求 y 关于 x 的线性回归方程；

(2)设经营此干货的日销售利润为 P（单位：元），根据(1)中的线性回归方程，试预测：当销售单价为多少元/千克时，可以获得最大日销售利润？

附：①对于一组数据 (u_1,v_1)，(u_2,v_2)，…，(u_n,v_n)，其回归直线 $v=\hat{\beta}u+\hat{\alpha}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})(v_i-\overline{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2}$，$\hat{\alpha}=\overline{v}-\hat{\beta}\overline{u}$.

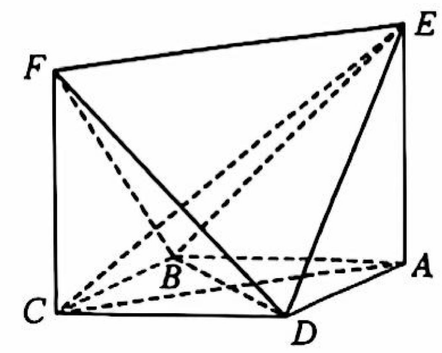
②参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{9}(x_i-\overline{x})^2=60$，$\sum\limits_{i=1}^{9}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=-12$.

16.（本小题满分 15 分）

如图，四边形 $ABCD$ 为菱形，$AE\perp$ 平面 $ABCD$，$CF\perp$ 平面 $ABCD$.

(1)证明：平面 $BDE\perp$ 平面 CEF；

(2)若 $AB=AE=CF=2$，$\angle BAD=60^\circ$，求平面 BEF 与平面 CEF 夹角的余弦值.



17.(本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x)=3e^x-2$.

(1)证明:$f(x)>2x$;

(2)若 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant 2x^2+ax$,求 a 的取值范围.

18.(本小题满分 17 分)

已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,过点 F_1 的直线与 E 的左支交于 P,Q 两点,设点 I 为$\triangle PQF_2$ 内切圆的圆心,O 为坐标原点.

(1)证明:直线 PQ 与圆 I 相切于焦点 F_1;

(2)设 E 的渐近线方程为 $x\pm\sqrt{3}y=0$,求$\frac{|IF_1|}{|OF_1|}$的取值范围.

19.(本小题满分 17 分)

设关于 x 的实系数一元二次方程 $a_2x^2+a_1x+a_0=0(a_2\neq 0)$,在复数集 $\mathbf{C}$ 内的根分别为 x_1,x_2,则方程的根与系数的关系为$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{a_1}{a_2},\\ x_1x_2=\frac{a_0}{a_2}.\end{cases}$将其推广到一元 n 次方程,即:设关于 x 的实系数一元 n 次方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0(n\geqslant 2,a_n\neq 0)$,在复数集 $\mathbf{C}$ 内的根分别为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$,则方程的根与系数的关系为$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n},\\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\frac{a_{n-2}}{a_n},\\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\frac{a_{n-3}}{a_n},\\ \cdots\\ x_1x_2x_3\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}.\end{cases}$

上述结论就是著名的韦达定理,其逆定理也成立.

试运用韦达定理解答下列问题:

(1)设四个不同的实数 m_1,m_2,m_3,m_4 满足 $m_i^4-2m_i^3-m_i^2+2m_i=0(i=1,2,3,4)$,求$\sum\limits_{i=1}^{4}m_i$ 的值;

微信搜《高三答案公众号》获取全科

(2)设实数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 满足:①$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$;②$a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$;③$a_1,a_2,a_3$ 的最小者不大于 b_1,b_2,b_3 的最小者,证明:a_1,a_2,a_3 的最大者不大于 b_1,b_2,b_3 的最大者;

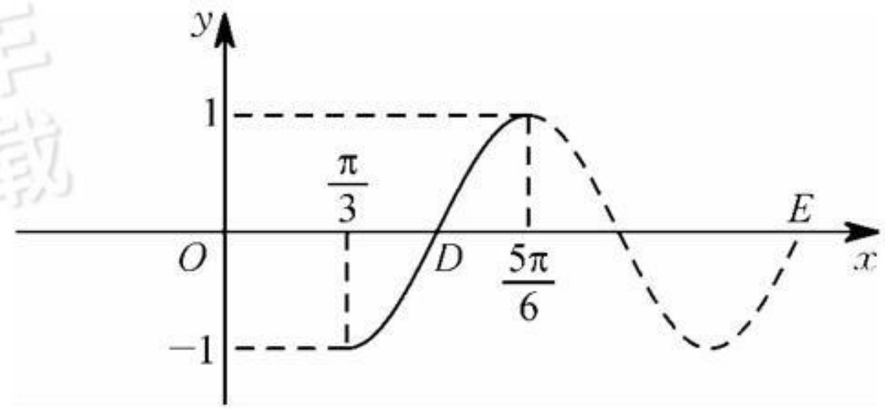
(3)记区间$(a,b]$,$[a,b)$,$[a,b]$,(a,b)的长度均为 $b-a$.若关于 x 的不等式$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\cdots+\frac{1}{x-(n-1)}+\frac{1}{x-n}\geqslant 3(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$的解集是各个区间的并集,求该不等式解集中所有区间的长度之和.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. D　根据题意，得 $M\cap N=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}y=x,\\ y=\sqrt{x},\end{cases}\right.\right\}=\{(0,0),(1,1)\}$. 故选 D.

2. A　由已知，得 $\frac{x^2}{6a}+\frac{y^2}{3a}=1$，则椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{6a-3a}}{\sqrt{6a}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.

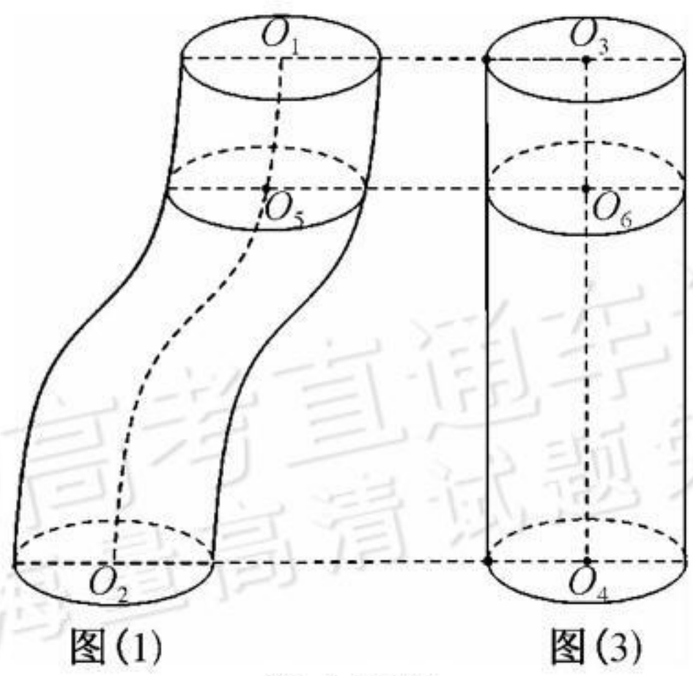
3. D　首先，根据 $f(x)$ 的图象，从点 D 到点 E 为 $f(x)$ 的一个周期，得 $T=2\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$. 由 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{5\pi}{6},1\right)$，得 $2\times\frac{5\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=2k\pi-\frac{7\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$. 由 $0<\varphi<2\pi$，得 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$. 故选 D.



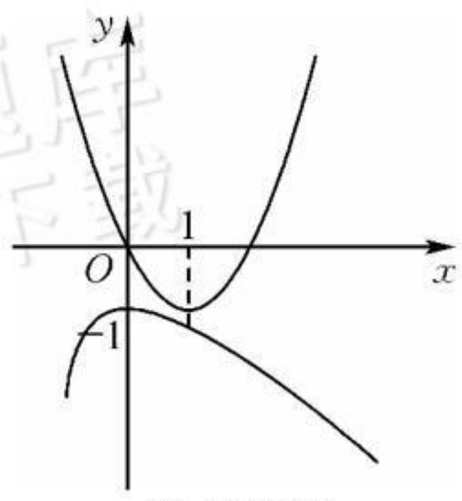
4. A　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(0,-1)$，由 $(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})/\!/\boldsymbol{b}$，可设 $\boldsymbol{b}=(0,k)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,2+k)$，由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，得 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-1-3(2+k)=0$，解得 $k=-\frac{7}{3}$，所以 $\boldsymbol{b}=\left(0,-\frac{7}{3}\right)$，于是 $|\boldsymbol{b}|=\frac{7}{3}$. 故选 A.

5. A　由 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$ 及 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{12}{5}$，得 $\tan\beta=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\frac{\frac{12}{5}-\frac{4}{3}}{1+\frac{12}{5}\times\frac{4}{3}}=\frac{16}{63}$，又 β 为锐角，所以 $\sin\beta=\frac{16}{65}$. 故选 A.

6. C　根据正切函数的周期性，在图(2)中，平行于直线 $y=4$ 的任一直线与曲线 $y=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\right)$ 两个交点的距离都为 π，这样，可以构造一个底面直径为 π，高为 8 的圆柱 O_3O_4，如图，用距离上底面为 h 的平面分别去截水管、圆柱 O_3O_4，所得截面圆 O_5、圆 O_6 的面积都为 $\frac{\pi^3}{4}$，根据祖暅原理，水管和圆柱 O_3O_4 的体积相等，而圆柱 O_3O_4 的体积为 $\pi\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\times8=2\pi^3$，所以水管的体积为 $2\pi^3$. 故选 C.



第 6 题图



第 7 题图

7. B　二次函数 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$ 的图象为抛物线，开口向上，顶点为 $(1,-1)$，且最小值为 -1；记 $g(x)=\ln(x+1)-x-1$，则 $g'(x)=-\frac{x}{x+1}$，所以当 $-1<x<0$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $x=0$ 是 $g(x)$ 的极大值点，也是最大值点，且 $g(x)_{\max}=g(0)=-1$，则 $x>-1$ 时总有 $g(x)<x^2-2x$. 如图，若满足题意，必须 $0\leqslant a\leqslant1$. 故选 B.

8. C　由 $\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{2}{\tan B}$，得 $\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{2\cos B}{\sin B}$，由余弦定理和正弦定理，得 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\cdot a}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab\cdot c}=\frac{2(a^2+c^2-b^2)}{2ac\cdot b}$，化简得 $a^2+c^2=2b^2=2AC^2=8$.

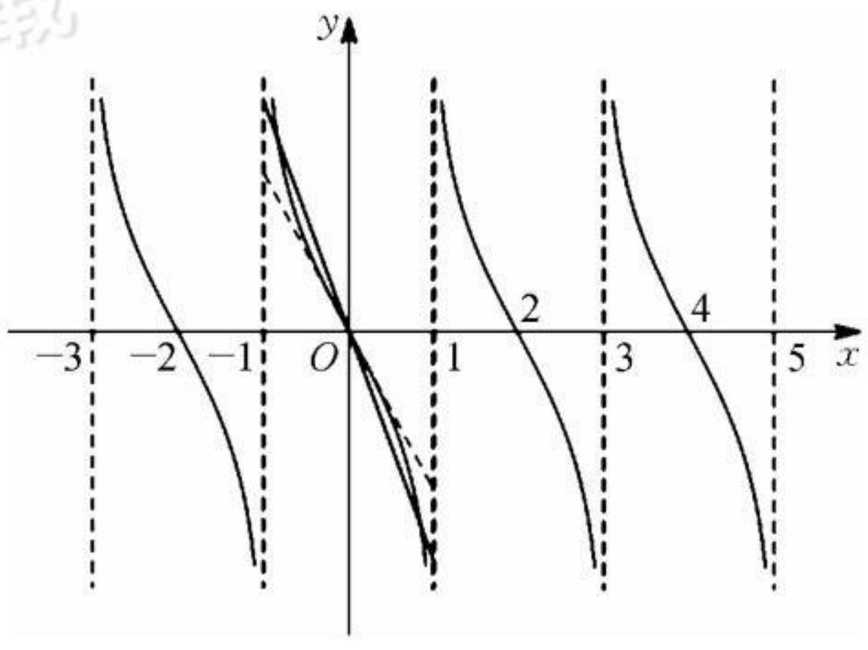
法一：以 AC 所在直线为 x 轴，以 AC 的中垂线为 y 轴，建立平面直角坐标系 xOy，则 $A(-1,0)$，$C(1,0)$. 设 $B(x,y)$，则 $a^2+c^2=(x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=2(x^2+y^2+1)=8$，即 $x^2+y^2=3(x\neq\pm1,x\neq\pm\sqrt{3})$，于是，当 B 运动到点 $(0,\pm\sqrt{3})$ 时，$\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$. 故选 C.

法二：由 $\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{2\cos B}{\sin B}$，得 $\frac{\sin B\cos A}{\sin A}+\frac{\sin B\cos C}{\sin C}=2\cos B$，由余弦定理和正弦定理，得 $\frac{b}{a}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{b}{c}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=2\cos B$，化简得 $\cos B=\frac{b^2}{2ac}$；由法一，得 $a^2+c^2=8$，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ac\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{1}{2}ac\sqrt{1-\left(\frac{b^2}{2ac}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2-\frac{b^4}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2-4}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a^2+c^2}{2}\right)^2-4}=\sqrt{3}$，当且仅当 $a=c=2$ 时取等号. 故选 C.

9. ACD　由 $z^2+z+1=0$，解得 $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，结合 $(z_1-z_2)\mathrm{i}<0$，得 $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，所以 $z_1=\overline{z_2}$，则 A 正确；$z_1\cdot\overline{z_2}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\times\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\neq1$，则 B 错误；因为 $z_1\cdot z_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\times\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=1$，所以 $z_1=\frac{1}{z_2}$，则 C 正确；$z_1^3=z_1^2\cdot z_1=(-z_1-1)\cdot z_1=-(z_1^2+z_1)=1$，则 D 正确. 综上，故选 ACD.

10. ACD　由题意知 $q>0$ 且 $q\neq1$，再由 $m+k=p+r$，得 $a_ma_k=a_pa_r$. ①当 $q>1$ 时，$\{a_n\}$ 为递增数列，所以 $a_m<a_p<a_r<a_k$，从而 $a_k-a_m>a_r-a_p>0$，所以 $|a_m-a_k|>|a_p-a_r|$，两边平方，得 $(a_k-a_m)^2>(a_r-a_p)^2$，即 $a_k^2+a_m^2>a_r^2+a_p^2$，所以 $(a_m+a_k)^2>(a_p+a_r)^2$，即 $a_m+a_k>a_p+a_r$；②当 $0<q<1$ 时，$\{a_n\}$ 为递减数列，所以 $a_m>a_p>a_r>a_k$，从而 $a_m-a_k>a_p-a_r>0$，所以 $|a_m-a_k|>|a_p-a_r|$，两边平方，得 $(a_k-a_m)^2>(a_r-a_p)^2$，即 $a_k^2+a_m^2>a_r^2+a_p^2$，所以 $(a_m+a_k)^2>(a_p+a_r)^2$，即 $a_m+a_k>a_p+a_r$. 由①②，可得 A 正确，B 错误；根据幂函数的性质和等比数列 $\{a_n\}$ 的单调性，得 $\{a_n^3\}$ 是单调数列，或为递增数列，或为递减数列，根据上面的讨论均可得 $|a_m^3-a_k^3|>|a_p^3-a_r^3|$，$a_m^3+a_k^3>a_p^3+a_r^3$，则 C，D 均正确. 综上，故选 ACD.

11. AC　对于 A，由 $f(1)=f(2-1)=f(-1)=-f(1)$，得 $f(1)=0$，则 $f(-5)=f(-6+1)=f(1)=0$，则 A 正确；对于 B，因为 $f(2k-x)=f(-x)=-f(x)$（其中 $k\in\mathbf{Z}$），所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(k,0)(k\in\mathbf{Z})$ 对称，则 B 错误；对于 C，设 $-1<x<0$，则 $1<2+x<2$，从而 $f(x)=f(2+x)=\ln\frac{3-(2+x)}{(2+x)-1}=\ln\frac{1-x}{1+x}$，又 $f(x)$ 为 $(-1,1)$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，且当 $0<x<1$ 时，$f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$. 综上，当 $-1<x<1$ 时，$f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$，则 C 正确；对于 D，法一：当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$，则 $f'(0)=-2$，所以曲线 $y=f(x)$ 在原点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=-2x$，如图，当 $a>-2$ 时，直线 $y=ax$ 与曲线 $y=f(x)(-1<x<1)$ 仅有一个交点. 根据周期性，当 $a>-2$ 时，直线 $y=a(x-2)$ 与曲线 $y=f(x)(1<x<3)$ 仅有一个交点，则 D 错误；法二：记 $g(x)=f(x)-ax(0<x<1)$，则



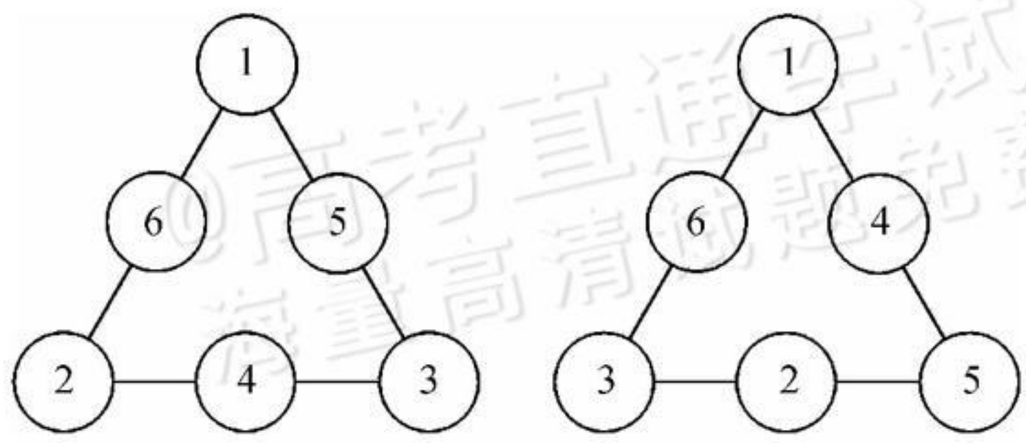
$g'(x)=\frac{2}{x^2-1}-a<0$，则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，从而 $g(x)<g(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上无零点，由 $g(x)$ 为奇函

数，得 $g(x)$ 在 $(-1,1)$ 上仅有一个零点. 根据周期性，当 $a>-2$ 时，直线 $y=a(x-2)$ 与曲线 $y=f(x)(1<x<3)$ 仅有一个交点，则 D 错误. 综上，故选 AC.

12. 70　因为 $(1-\sqrt{x})^8$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^r(-\sqrt{x})^r=C_8^r(-1)^r x^{\frac{r}{2}}$，所以 x^2 的系数是 $C_8^4=70$.

13. 1　由 $y_0y=p(x+x_0)$，令 $y=0$，得 $x=-x_0$，即 $M(-x_0,0)$，则 $|MF|=x_0+\frac{p}{2}$；根据抛物线的定义，得 $|PF|=x_0+\frac{p}{2}$，所以 $|MF|=|PF|$，从而 $\frac{|PF|}{|MF|}=1$.

14. $\frac{1}{30}$　将 1,2,3,4,5,6 填入三角形图形中的 6 个圈中的填法共有 6! 种. 设每条边上的 3 个数之和为 s，则 $3s\geqslant(1+2+3+4+5+6)+1+2+3=27$，$3s\leqslant(1+2+3+4+5+6)+4+5+6=36$，所以 $27\leqslant 3s\leqslant 36$，解得 $9\leqslant s\leqslant 12$. ①当 $s=9$ 时，3 个顶点所填的 3 个数只能为 1,2,3，如图(1). 此时共有填法 $3\times2=6$ 种；②当 $s=10$ 时，设 3 个顶点所填的 3 个数之和为 t，则 $t=3\times10-(1+2+3+4+5+6)=30-21=9$. 而 $9=2+3+4$，$9=1+3+5$，$9=1+2+6$，则 3 个顶点所填的 3 个数只能为 $\{2,3,4\}$，$\{1,3,5\}$ 或 $\{1,2,6\}$. 当 3 个顶点所填的 3 个数为 $\{2,3,4\}$ 时，由于顶点分别填 3,4 的这条边上的 3 个数之和为 10，从而这条边中间只能填 3，这与每个数恰出现一次矛盾，此时没有适合条件的填法，同样道理，3 个数为 $\{1,2,6\}$ 时也没有适合条件的填法，只能为 1,3,5，如图(2)，此时共有填法 $3\times2=6$ 种；③当 $s=11$ 时，可将 $s=10$ 时的每一种填法中的数 x 换为 $7-x$，可得 6 种填法；④当 $s=12$ 时，3 个顶点所填的 3 个数应为 4,5,6，可将 $s=9$ 时的每一种填法中的数 x 换为 $7-x$，此时有 6 种填法. 综上，满足条件的填法共有 $6\times4=24$ 种，故所求的概率为 $\frac{24}{6!}=\frac{1}{30}$.



图(1)　　图(2)

15. 解：(1)设 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，…… 1 分

$\bar{x}=\frac{89+88+87+86+85+84+83+82+81}{9}=\frac{765}{9}=85$，…… 3 分

$\bar{y}=\frac{4.2+4.3+4.6+4.8+5.1+5.3+5.4+5.6+5.7}{9}=\frac{45}{9}=5$. …… 5 分

由所给数据，得 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{-12}{60}=-0.2$，…… 7 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=5-(-0.2)\times85=22$，…… 8 分

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=-0.2x+22$. …… 9 分

(2) $P=(x-60)(-0.2x+22)=-0.2x^2+34x-1320=-0.2(x-85)^2+125$，…… 12 分

所以当 $x=85$ 时，P 取得最大值，

经预测，当销售单价为 85 元/千克时，可以获得最大日销售利润 125 元. …… 13 分

16. (1)证明：因为 $AE\perp$ 平面 $ABCD$，$CF\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $AE/\!/CF$，从而 A,C,F,E 共面. …… 2 分

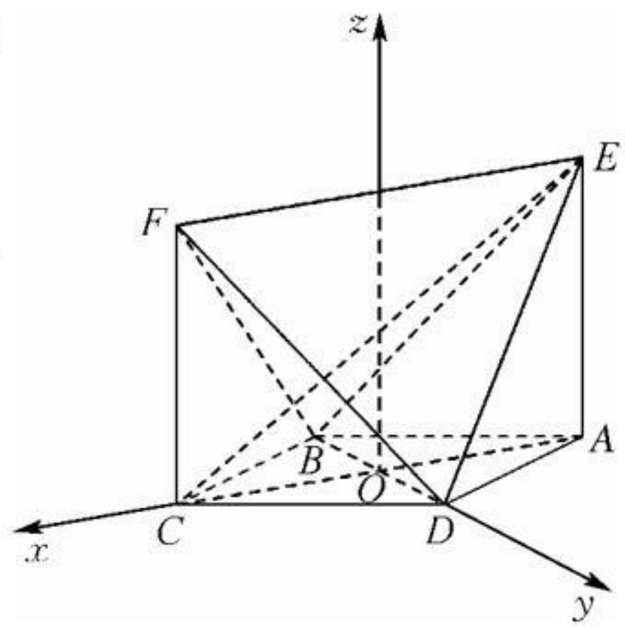
又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $CF\perp BD$，…… 3 分

又四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$， …… 4 分

又 $AC\cap CF=C$，$AC,CF\subset$平面 $ACFE$，所以 $BD\perp$平面 $ACFE$， …… 6 分

又 $BD\subset$平面 BDE，所以平面 $BDE\perp$平面 CEF. …… 7 分

(2)解：设 $AC\cap BD=O$，以 O 为原点，分别以$\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$的方向为 x 轴，y 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $B(0,-1,0)$，$D(0,1,0)$，$E(-\sqrt{3},0,2)$，$F(\sqrt{3},0,2)$，



…… 8 分

从而$\overrightarrow{BD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{EF}=(2\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-\sqrt{3},1,2)$.

设平面 BEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}2\sqrt{3}x=0,\\ -\sqrt{3}x+y+2z=0,\end{cases}$

取 $z=-1$，则 $\boldsymbol{n}=(0,2,-1)$. …… 11 分

由(1)，得平面 CEF 的法向量为$\overrightarrow{BD}=(0,2,0)$， …… 12 分

所以$|\cos\langle\overrightarrow{BD},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BD}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{2\times\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

故平面 BEF 与平面 CEF 夹角的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. …… 15 分

17. (1)证明：设 $m(x)=f(x)-2x=3e^x-2x-2(x\in\mathbf{R})$，则 $m'(x)=3e^x-2=3(e^x-e^{\ln\frac{2}{3}})$. …… 2 分

所以当 $x<\ln\dfrac{2}{3}$时，$m'(x)<0$；当 $x>\ln\dfrac{2}{3}$时，$m'(x)>0$，

所以 $m(x)$在$\left(-\infty,\ln\dfrac{2}{3}\right)$上单调递减，在$\left(\ln\dfrac{2}{3},+\infty\right)$上单调递增，

所以 $x=\ln\dfrac{2}{3}$是 $m(x)$的极小值点，也是 $m(x)$的最小值点，

即 $m(x)\geqslant m\left(\ln\dfrac{2}{3}\right)=-2\ln\dfrac{2}{3}>0$， …… 5 分

从而 $3e^x-2x-2>0$，即 $3e^x-2>2x$，

故 $f(x)>2x$. …… 7 分

(2)解：设 $h(x)=3e^x-2x^2-ax-2(x\geqslant0)$，问题等价于 $h(x)\geqslant0(x\geqslant0)$恒成立时求 a 的范围. …… 9 分

当 $x=0$ 时，$h(0)=1>0$，a 取任意值都成立. …… 10 分

当 $x>0$ 时，不等式化为 $a\leqslant\dfrac{3e^x}{x}-2x-\dfrac{2}{x}$. …… 11 分

设 $g(x)=\dfrac{3e^x}{x}-2x-\dfrac{2}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{(x-1)(3e^x-2x-2)}{x^2}$. …… 12 分

由(1)，得 $3e^x-2x-2>0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

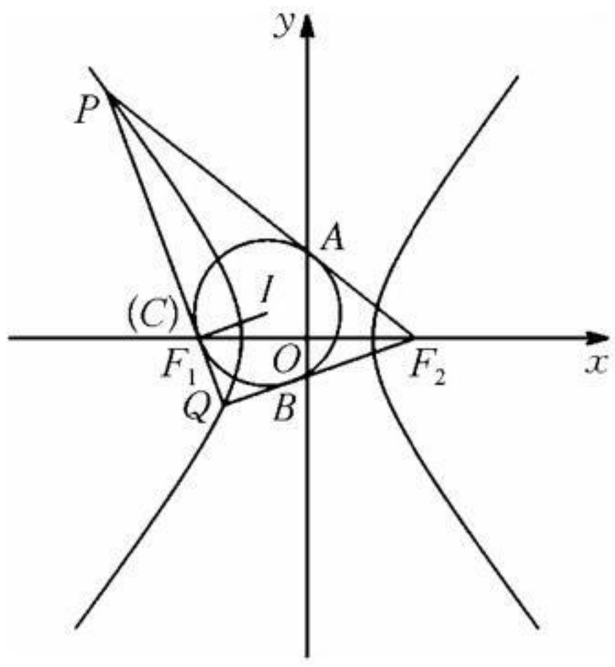
所以 $x=1$ 是 $g(x)$的极小值点，也是 $g(x)$的最小值点，且 $g(x)_{\min}=g(1)=3e-4$， …… 13 分

所以 $a\leqslant3e-4$.

故 a 的取值范围是$(-\infty,3e-4]$. …… 15 分

18.(1)证明：设$\triangle PQF_2$的内切圆I分别与PF_2，QF_2，PQ相切于点A，B，C，

由双曲线的定义，得$|PF_2|-|PF_1|+|QF_2|-|QF_1|=4a$，…… 2分



所以$|PF_2|+|QF_2|-|PQ|=4a$，

又$|PQ|=|PA|+|QB|$，

所以$|PF_2|+|QF_2|-|PA|-|QB|=4a$，

即$|AF_2|+|BF_2|=4a$，结合$|AF_2|=|BF_2|$，得$|AF_2|=|BF_2|=2a$. …… 4分

又$|PF_2|-|PF_1|=2a$，所以$|PF_1|=|PF_2|-|AF_2|=|PA|$；

同理$|QF_1|=|QB|$，所以焦点F_1与点C重合，

故直线PQ与圆I相切于F_1. …… 6分

(2)解：设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，圆I的半径为r.

由E的渐近线方程为$x\pm\sqrt{3}y=0$，即$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，则$\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以$a=\sqrt{3}b$，$c=2b$，$E$的方程为$\frac{x^2}{3b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

可设直线PQ的方程为$x=my-2b$，代入E的方程，得$(m^2-3)y^2-4mby+b^2=0$，

首先，$\begin{cases}m^2-3\neq0,\\ \Delta>0,\\ y_1y_2=\frac{b^2}{m^2-3}<0,\end{cases}$ 解得$0\leqslant m^2<3$；…… 8分

其次，$y_1+y_2=\frac{4mb}{m^2-3}$，$y_1y_2=\frac{b^2}{m^2-3}$，

$S_{\triangle PQF_2}=\frac{1}{2}\times2c\times|y_1-y_2|=2b|y_1-y_2|=2b\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=2b\sqrt{\left(\frac{4mb}{m^2-3}\right)^2-4\times\frac{b^2}{m^2-3}}=\frac{4\sqrt{3}b^2\sqrt{m^2+1}}{3-m^2}$. ① …… 10分

由(1)，得$|PF_2|+|QF_2|+|PQ|=|PF_1|+2a+|QF_1|+2a+|PQ|=4a+2|PQ|$，

所以$S_{\triangle PQF_2}=\frac{1}{2}(4a+2|PQ|)r=(2\sqrt{3}b+|PQ|)r$. …… 12分

$|PQ|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{4mb}{m^2-3}\right)^2-\frac{4b^2}{m^2-3}}=\frac{2\sqrt{3}b(1+m^2)}{3-m^2}$，

$S_{\triangle PQF_2}=(2\sqrt{3}b+|PQ|)r=\left[2\sqrt{3}b+\frac{2\sqrt{3}b(1+m^2)}{3-m^2}\right]r=\frac{8\sqrt{3}br}{3-m^2}$，② …… 14分

由①②，得$\frac{4\sqrt{3}b^2\sqrt{m^2+1}}{3-m^2}=\frac{8\sqrt{3}br}{3-m^2}$，解得$r=\frac{b\sqrt{m^2+1}}{2}$，

所以$\frac{|IF_1|}{|OF_1|}=\frac{r}{c}=\frac{\sqrt{m^2+1}}{4}$. …… 15分

由$0\leqslant m^2<3$，得$1\leqslant\sqrt{m^2+1}<2$，所以$\frac{1}{4}\leqslant\frac{|IF_1|}{|OF_1|}<\frac{1}{2}$，

故$\frac{|IF_1|}{|OF_1|}$的取值范围为$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$. …… 17分

19.(1)解：由题意，得m_1，m_2，m_3，m_4恰为方程$x^4-2x^3-x^2+2x=0$的四个实根，

根据韦达定理，得$\sum_{i=1}^{4}m_i=m_1+m_2+m_3+m_4=2$. …… 4分

(2)证明：由$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$，得$(a_1+a_2+a_3)^2=(b_1+b_2+b_3)^2$，

由 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$，得 $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1$； …… 5 分

由对称性，不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$，$b_1\leqslant b_2\leqslant b_3$.

由 a_1,a_2,a_3 的最小者不大于 b_1,b_2,b_3 的最小者，得 $a_1\leqslant b_1$. …… 6 分

令 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)=x^3-(a_1+a_2+a_3)x^2+(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)x-a_1a_2a_3$，①

$g(x)=(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)=x^3-(b_1+b_2+b_3)x^2+(b_1b_2+b_2b_3+b_3b_1)x-b_1b_2b_3$，②

②－①，得 $g(x)-f(x)=a_1a_2a_3-b_1b_2b_3=\lambda$（$\lambda$ 为常数）.

令 $x=a_1$，得 $\lambda=g(a_1)-f(a_1)=(a_1-b_1)(a_1-b_2)(a_1-b_3)$，

因为 $a_1\leqslant b_1\leqslant b_2\leqslant b_3$，所以 $\lambda\leqslant 0$. …… 9 分

令 $x=a_3$，得 $\lambda=g(a_3)-f(a_3)=(a_3-b_1)(a_3-b_2)(a_3-b_3)\leqslant 0$，

又 $a_3-b_1\geqslant a_3-b_2\geqslant a_3-b_3$，所以 $a_3\leqslant b_3$.

故 a_1,a_2,a_3 的最大者不大于 b_1,b_2,b_3 的最大者. …… 11 分

(3)解：设函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\cdots+\frac{1}{x-(n-1)}+\frac{1}{x-n}$，

其定义域为 $\{x\mid x\neq 0,x\neq 1,x\neq 2,\cdots,x\neq n\}$，

因为 $f'(x)=-\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}+\cdots+\frac{1}{[x-(n-1)]^2}+\frac{1}{(x-n)^2}\right]<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0),(0,1),(1,2),\cdots,(n,+\infty)$ 上均单调递减； …… 13 分

当 $x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>n$ 时，$f(x)>0$；

当 $0<x<1$ 时，若 $x\to 0$，则 $f(x)\to+\infty$；若 $x\to 1$，则 $f(x)\to-\infty$；

当 $1<x<2$ 时，若 $x\to 1$，则 $f(x)\to+\infty$；若 $x\to 2$，则 $f(x)\to-\infty$；

当 $2<x<3$ 时，若 $x\to 2$，则 $f(x)\to+\infty$；若 $x\to 3$，则 $f(x)\to-\infty$；

……

当 $x>n$ 时，若 $x\to n$，则 $f(x)\to+\infty$；若 $x\to+\infty$，则 $f(x)\to 0$；

当 $n-1<x<n$ 时，若 $x\to n-1$，则 $f(x)\to+\infty$；若 $x\to n$，则 $f(x)\to-\infty$.

由零点存在定理及 $f(x)$ 的单调性，知直线 $y=3$ 与曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(0,1),(1,2),(2,3),\cdots,(n-1,n),(n,+\infty)$ 上各有一个交点，

由此，直线 $y=3$ 与曲线 $y=f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的交点，即方程 $f(x)=3$ 有 $n+1$ 个不同的根.

设方程 $f(x)=3$ 的根分别为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{n+1}$，则原不等式的解集为 $(0,x_1]\cup(1,x_2]\cup(2,x_3]\cup\cdots\cup(n,x_{n+1}]$，

从而所有区间长度之和为

$l=(x_1-0)+(x_2-1)+(x_3-2)+\cdots+(x_{n+1}-n)=(x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1})-(1+2+\cdots+n)$

$=(x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1})-\frac{1}{2}n(n+1)$， …… 15 分

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}$ 为方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\cdots+\frac{1}{x-(n-1)}+\frac{1}{x-n}=3$ 的 $n+1$ 个实根，

该方程去掉分母并整理，得 $3x^{n+1}-[\frac{3}{2}n(n+1)+(n+1)]x^n+\cdots=0$，

由韦达定理，得 $x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{n+1}{3}$，

从而 $l=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{n+1}{3}-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{n+1}{3}$. …… 17 分