学校：__________ 准考证号：__________ 姓名：__________

2025 届高中毕业班适应性练习卷

数 学

注意事项：

1. 答题前，学生务必在练习卷、答题卡规定的地方填写自己的学校、准考证号、姓名。学生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与学生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本练习卷上无效。
3. 答题结束后，学生必须将练习卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z=\frac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$，$\bar{z}$ 为 z 的共轭复数，则 $|\bar{z}|=$

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $\frac{5}{9}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{1}{5}$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,0)$，$\boldsymbol{b}=(-3,\sqrt{3})$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

3. 已知集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$，$B=\{1,m\}$，则“$m=3$”是“$A\cup B=A$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 若 $(1+\cos\frac{2\pi}{5})\sin x=\sin\frac{2\pi}{5}\cos x$，且 $x\in(0,\pi)$，则 $x=$

A. $\frac{\pi}{5}$　　B. $\frac{3\pi}{10}$　　C. $\frac{7\pi}{10}$　　D. $\frac{4\pi}{5}$

5. 已知一个圆锥与一个圆台的高相等，圆锥的底面积和圆台的一个底面的面积相等．若圆台的体积是圆锥的体积的7倍，则圆台的上、下底面的面积之比为

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

6. 在一定条件下，大气压强 p（单位：百帕）随海拔高度 h（单位：米）的变化满足如下函数关系式：$p=p_0e^{-kh}$(p_0，k 为正常数)．已知海拔高度 0 米处的大气压强为 1000 百帕，海拔高度 10000 米处的大气压强为 250 百帕，那么，若大气压强增加 1 倍，则海拔高度降低

A. 100 米　　B. 2500 米　　C. 5000 米　　D. 7500 米

7. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,面积为 S. 若 $a=1,C=\frac{\pi}{4}$且 $4S=\cos B+b\cos A$，则 $B=$

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{5\pi}{12}$　　D. $\frac{7\pi}{12}$

8. 已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个焦点为 $F(1,0)$，中心为 O. C 是 E 上的动点，P 是以 CF 为直径的圆上的动点，且 $|OP|$ 的最大值为 4，则 E 的离心率为

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知甲组样本数据 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，由这组数据得到乙组样本数据 y_1，y_2，$\cdots$，y_n，其中 $y_i=2x_i-1\ (i=1,2,\cdots,n)$，则

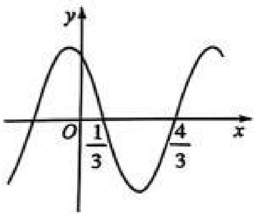
A. 乙组样本数据的极差是甲组样本数据极差的 2 倍

B. 乙组样本数据的中位数是甲组样本数据中位数的 2 倍

C. 乙组样本数据的平均数是甲组样本数据平均数的 2 倍

D. 乙组样本数据的标准差是甲组样本数据标准差的 2 倍

10. 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则



A. $f(x+\frac{1}{3})$ 是奇函数

B. $f(x+\frac{5}{6})$ 是偶函数

C. $f(-\frac{2022}{5})<f(\frac{2025}{4})$

D. $f(x)=\sin(\pi x+\frac{2\pi}{3})$

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $mx-y=0$ 与曲线 $y=e^x$ 交于 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，直线 $x+my=0$ 与曲线 $y=-\ln x$ 交于 $C(x_3, y_3)$，$D(x_4, y_4)$，且 $x_1<x_2$，$x_3<x_4$. 下列说法正确的是

A. $AC /\!/ BD$

B. m 的取值范围是 $(1, +\infty)$

C. $\triangle OAD$ 与 $\triangle OBC$ 的面积相等

D. 若 $\triangle OBD$ 的周长等于 $\triangle OAC$ 的周长的 2 倍，则 $m=2\log_2 e$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知抛物线的准线方程为 $x=-1$，则该抛物线的标准方程为________.

13. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，函数 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x)-g(x)=-x$，则 $g(x)$ 可以是________.（写出一个满足条件的函数即可）

14. 项数为 m 的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_i\in\{0, 1\}(i=1, 2, \cdots, m)$，当且仅当 $a_{i-1}=a_{i+1}$ 时 $a_i=0$（其中 $i=1, 2, \cdots, m$，规定：$a_0=a_m$，$a_{m+1}=a_1$），称 $\{a_n\}$ 为"好数列". 在项数为 6 且 $a_i\in\{0, 1\}$ $(i=1, 2, \cdots, 6)$ 的所有 $\{a_n\}$ 中，随机选取一个数列，该数列是"好数列"的概率为________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=1$ 且 $a_{n+1}-S_n=1$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

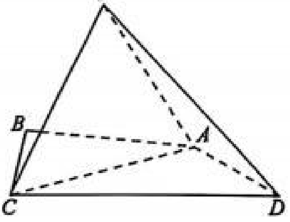
（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{n^2}{a_n}$，求 b_n 的最大值.

16.（15 分）

如图，平面四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，$\angle ADC=45°$，$CD=2\sqrt{2}$. 现将 $\triangle ABC$ 沿 AC 翻折至 $\triangle APC$，使得 $PD=2\sqrt{2}$.

（1）证明：平面 $PAC\perp$ 平面 ACD；

（2）已知 M 是线段 PA 上的点，它到直线 CD 的距离为 $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，求直线 CM 与平面 PAD 所成的角.



17.（15分）

电商平台人工智能推荐系统是根据用户的喜好为用户推送商品的．某体育用品供应商在甲电商平台推广新品A和B，在乙电商平台推广新品C．已知甲平台向一用户推送A的概率为0.7，推送B的概率为0.5，同时推送A和B的概率为0.3；乙平台向该用户推送C的概率为0.6，且甲平台的推送结果与乙平台的推送结果互相不受影响．

（1）在甲平台没有向该用户推送A的条件下，求它向该用户推送B的概率；

（2）求这两个平台至少向该用户推送A、B、C中的一种的概率．

18.（17分）

已知函数$f(x)=(\frac{\pi}{2}-x)\sin x+ax-\cos x$，$a\in\mathbf{R}$．

（1）若曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线的斜率为$\frac{\pi}{2}$，讨论$f(x)$在$(0,2\pi)$的单调性；

（2）曲线$y=f(x)$上是否存在四个点，使得以这四点为顶点的四边形是平行四边形？证明你的结论.

19.（17分）

已知点$A(-1,0)$，$B(1,0)$，P是直线AB外的一个动点，$PQ\perp AB$，垂足为Q，且Q在线段AB外，$|PQ|^2=3|AQ|\cdot|BQ|$，记点P的轨迹为曲线C.

（1）求C的方程；

（2）若直线l交C于M，N两点，M关于x轴的对称点为T，请再从条件①、②和③中选择一个合适的作为已知，证明以下问题：

（i）l过定点$(3,0)$；

（ii）$\triangle BMN$不可能为锐角三角形．

条件：①直线TB和NA的斜率之和为0；

②直线TB和NB的斜率之积为6；

③直线TB和NA的斜率之商为2．

注：如果选择的条件不符合要求，第(2)问得0分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分．

2025届高中毕业班适应性练习卷

数学参考答案及评分细则

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4．只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本题考查基础知识和基本技能。每小题5分，满分40分。

1．C　2．D　3．A　4．A　5．B　6．C　7．A　8．B

二、选择题：本题考查基础知识和基本技能。每小题6分，满分18分。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9．AD　　10．ABD　　11．ACD

三、填空题：本题考查基础知识和基本技能。每小题5分，满分15分。

12．$y^2=4x$　　13．$g(x)=2x$（写出一个满足条件的函数即可）　　14．$\frac{1}{16}$

四、解答题：本题考查基础知识、基本技能、基本思想和基本经验，考查发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力。共5小题，满分77分。

15．本小题主要考查数列的基本概念、等比数列等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力等，考查函数与方程思想、分类与整合思想等，考查数学运算、逻辑推理等核心素养，体现基础性和综合性．满分13分．

解法一：(1) 因为$a_{n+1}-S_n=1$，所以当$n\geqslant 2$时，$a_n-S_{n-1}=1$，……………… 1分

所以$a_{n+1}-a_n-S_n+S_{n-1}=0$，……………… 2分

所以$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 2)$．……………… 4分

当$n=1$时，$a_2=S_1+1=2$，满足$a_2=2a_1$，也符合$a_{n+1}=2a_n$．……………… 5分

因为$a_1\neq 0$，所以$a_n\neq 0$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，

所以$\{a_n\}$是以1为首项，2为公比的等比数列，……………… 6分

所以$a_n=2^{n-1}$．……………… 7分

（2）由（1）知 $a_n=2^{n-1}$，所以 $b_n=\dfrac{n^2}{2^{n-1}}$，…………8 分

所以 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{\dfrac{(n+1)^2}{2^n}}{\dfrac{n^2}{2^{n-1}}}=\dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$．…………9 分

令 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}>1$，解得 $-\sqrt{2}+1<n<\sqrt{2}+1$，…………10 分

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=1$ 或 $n=2$．

所以当 $n=1$ 或 $n=2$ 时，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}>1$，又因为 $b_n>0$，所以 $b_{n+1}>b_n$；…………11 分

同理，当 $n\geqslant3$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$b_{n+1}<b_n$．…………12 分

所以 b_n 的最大值为 $b_3=\dfrac{9}{4}$．…………13 分

解法二：（1）同解法一．…………7 分

（2）由（1）知 $a_n=2^{n-1}$，所以 $b_n=\dfrac{n^2}{2^{n-1}}$，…………8 分

所以 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{(n+1)^2}{2^n}-\dfrac{n^2}{2^{n-1}}=\dfrac{1}{2^n}(-n^2+2n+1)$．…………9 分

令 $b_{n+1}-b_n>0$，解得 $-\sqrt{2}+1<n<\sqrt{2}+1$，…………10 分

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=1$ 或 $n=2$．

所以当 $n=1$ 或 $n=2$ 时，$b_{n+1}>b_n$；…………11 分

同理，当 $n\geqslant3$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$b_{n+1}<b_n$．…………12 分

所以 b_n 的最大值为 $b_3=\dfrac{9}{4}$．…………13 分

解法三：（1）同解法一．…………7 分

（2）由（1）得 $a_n=2^{n-1}$，所以 $b_n=\dfrac{n^2}{2^{n-1}}$，…………8 分

当 $n\geqslant2$ 时，令 $\begin{cases}b_n\geqslant b_{n-1},\\ b_n\geqslant b_{n+1},\end{cases}$…………9 分

则 $\begin{cases}\dfrac{n^2}{2^{n-1}}\geqslant\dfrac{(n-1)^2}{2^{n-2}},\\ \dfrac{n^2}{2^{n-1}}\geqslant\dfrac{(n+1)^2}{2^n},\end{cases}$ 解得 $\sqrt{2}+1\leqslant n\leqslant2+\sqrt{2}$，…………11 分

又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=3$．…………12 分

又因为$b_1=1$，$b_3=\frac{9}{4}$，所以$b_1<b_3$，

所以b_n的最大值为$b_3=\frac{9}{4}$. ……13 分

解法四：（1）同解法一. ……7 分

（2）由（1）知$a_n=2^{n-1}$，所以$b_n=\frac{n^2}{2^{n-1}}$. ……8 分

设$f(x)=\frac{x^2}{2^{x-1}}(x>0)$，……9 分

则$f'(x)=\frac{x(2-x\ln 2)}{2^{x-1}}$，……10 分

所以当$x\in(0,\frac{2}{\ln 2})$时，$f'(x)>0$；当$x\in(\frac{2}{\ln 2},+\infty)$时，$f'(x)<0$.

所以$f(x)$在$(0,\frac{2}{\ln 2})$单调递增，在$(\frac{2}{\ln 2},+\infty)$单调递减. ……11 分

又$2<\frac{2}{\ln 2}<3$，$b_n=f(n)$，$b_2=2$，$b_3=\frac{9}{4}$，

所以$b_1<b_2<b_3>b_4>b_5>\cdots$，……12 分

所以b_n的最大值为$b_3=\frac{9}{4}$. ……13 分

16．本小题主要考查直线与平面垂直的判定与性质、平面与平面垂直的判定与性质、直线与平面所成的角、二面角、点到直线的距离、空间向量和解三角形等基础知识，考查直观想象能力、逻辑推理能力、运算求解能力等，考查函数与方程思想、数形结合思想、化归与转化思想等，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．满分 15 分．

解法一：（1）由题可知，$\angle ADC=45°$，$CD=2\sqrt{2}$，$AC=AP=2$，

在$\triangle ACD$中，由正弦定理，得$\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$.

所以$\frac{2\sqrt{2}}{\sin\angle CAD}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，$\sin\angle CAD=1$，……2 分

所以$\angle CAD=90°$，即$AD\perp AC$，……3 分

所以$AD=2$.

又$AP=2$，$PD=2\sqrt{2}$，所以$AP^2+AD^2=PD^2$，即$AD\perp AP$. ……5 分

又因为$AP\cap AC=A$，$AP,AC\subset$平面PAC，所以$AD\perp$平面PAC. ……6 分

又因为$AD\subset$平面ACD，所以平面$PAC\perp$平面ACD. ……7 分

（2）过 M 作 $ME \perp AC$ 于点 E，过 E 作 $EF \perp CD$ 于点 F，连接 MF.

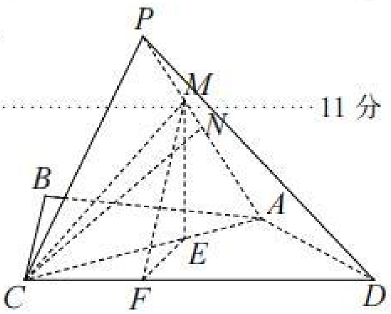
因为平面 $PAC \perp$ 平面 ACD，平面 $PAC \cap$ 平面 $ACD = AC$，$ME \subset$ 平面 PAC，

所以 $ME \perp$ 平面 ACD. ……………………………………………………………………………… 9 分

又 $CD \subset$ 平面 ACD，所以 $ME \perp CD$.

又 $EF \perp CD$，$ME, EF \subset$ 平面 MEF，$EF \cap ME = E$，所以 $CD \perp$ 平面 MEF. ……………… 10 分

又 $MF \subset$ 平面 MEF，所以 $CD \perp MF$，即 M 到直线 CD 的距离为 MF.



因为点 M 到直线 CD 的距离为 $\frac{\sqrt{14}}{2}$，所以 $MF = \frac{\sqrt{14}}{2}$. ……………………………………… 11 分

设 $AE = x$，则 $CE = 2 - x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEM$ 中，$\angle EAM = 60°$，所以 $ME = \sqrt{3}x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EFC$ 中，由（1）可知，$\angle ECF = 45°$，所以 $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}(2-x)$.

又 $ME \perp$ 平面 ACD，$EF \subset$ 平面 ACD，所以 $ME \perp EF$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EFM$ 中，$MF^2 = ME^2 + EF^2$，即 $(\frac{\sqrt{14}}{2})^2 = (\sqrt{3}x)^2 + [\frac{\sqrt{2}}{2}(2-x)]^2$，……………… 12 分

解得 $x = 1$ 或 $x = -\frac{3}{7}$（舍去）. 所以 $AM = 2$，故 M 与点 P 重合. ……………………………… 13 分

取线段 PA 的中点 N，连接 CN，易知 $CN \perp AP$.

由（1）知 $AD \perp$ 平面 PAC，$CN \subset$ 平面 PAC，所以 $AD \perp CN$.

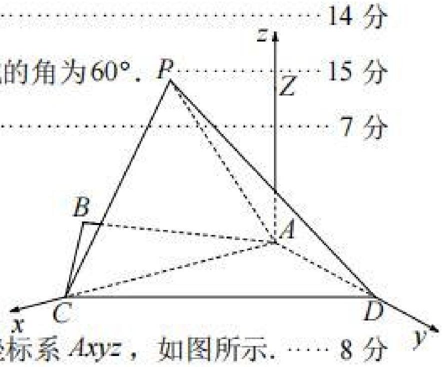
又 $AD \cap AP = A$，$AD, AP \subset$ 平面 PAD，

所以 $CN \perp$ 平面 PAD，

所以 $\angle CPN$ 为直线 CM 与平面 PAD 所成的角. ………………………………………………………… 14 分

因为在等边 $\triangle ABC$ 中，$\angle CPN = 60°$，所以直线 CM 与平面 PAD 所成的角为 $60°$. ……… 15 分

解法二：（1）同解法一. ……………………………………………………………………………………… 7 分



（2）在平面 PAC 内作 $AZ \perp AC$，如图.

由（1）知平面 $PAC \perp$ 平面 ACD，且平面 $PAC \cap$ 平面 $ACD = AC$，

所以 $AZ \perp$ 平面 ACD.

又 $AC \perp AD$，分别以 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AZ}$ 为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $Axyz$，如图所示. …… 8 分

则 $A(0,0,0)$，$C(2,0,0)$，$D(0,2,0)$，$P(1,0,\sqrt{3})$. 设 $AM = 2m$ $(0 \leqslant m \leqslant 1)$，则 $M(m, 0, \sqrt{3}m)$.

所以 $\overrightarrow{AD} = (0,2,0)$，$\overrightarrow{AP} = (1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD} = (-2,2,0)$，$\overrightarrow{CM} = (m-2, 0, \sqrt{3}m)$. ……………… 9 分

所以 $|\overrightarrow{CM}|^2 = (m-2)^2 + (\sqrt{3}m)^2 = 4m^2 - 4m + 4$，且 $\overrightarrow{CM} \cdot \frac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} = (m-2, 0, \sqrt{3}m) \cdot \frac{(-2,2,0)}{2\sqrt{2}} = \frac{2-m}{\sqrt{2}}$.

设点 M 到直线 CD 的距离为 d，

所以 $d^2=|\overrightarrow{CM}|^2-(\overrightarrow{CM}\cdot\dfrac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|})^2$ ……………………………………………………………… 11 分

$=4m^2-4m+4-(\dfrac{2-m}{\sqrt{2}})^2=\dfrac{7}{2}m^2-2m+2$.

依题意得，$\dfrac{7}{2}m^2-2m+2=(\dfrac{\sqrt{14}}{2})^2$，解得 $m=1$ 或 $m=-\dfrac{3}{7}$（舍去），所以 $\overrightarrow{CM}=(-1,0,\sqrt{3})$. ……12 分

设平面 PAD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，直线 CM 与平面 PAD 所成的角为 θ.

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0,\\ 2y=0.\end{cases}$

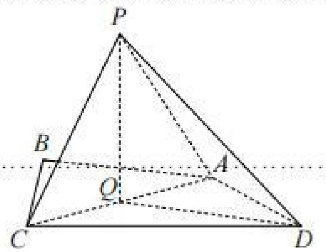
取 $z=1$，则平面 PAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},0,1)$， ……………………………………………… 13 分

所以 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{CM},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{CM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CM}||\boldsymbol{n}|}$ ……………………………………………………………… 14 分

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以直线 CM 与平面 PAD 所成的角为 $60°$. ……………………………………………………………… 15 分

解法三：（1）取 AC 的中点 Q，连接 PQ，QD.



因为 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，

所以 $AC=2$，$PQ\perp AC$. …………………………………………………………………… 1 分

在 $\triangle ACD$ 中，$\angle ADC=45°$，$CD=2\sqrt{2}$，

由余弦定理，得 $AC^2=CD^2+AD^2-2CD\cdot AD\cos\angle ADC$，$2^2=(2\sqrt{2})^2+AD^2-2\times2\sqrt{2}AD\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

解得 $AD=2$， ………………………………………………………………………………………… 2 分

所以 $AD^2+AC^2=CD^2$，所以 $\angle CAD=90°$，即 $AD\perp AC$. ……………………………………………… 3 分

又因为 $AQ=\dfrac{1}{2}AC=1$，所以 $QD^2=AD^2+AQ^2=5$.

又 $PQ=\sqrt{3}$，$PD=2\sqrt{2}$，所以 $PQ^2+QD^2=PD^2$，所以 $PQ\perp QD$. …………………………………… 4 分

又 $PQ\perp AC$，$QD\cap AC=Q$，$QD,AC\subset$ 平面 ACD， ……………………………………………… 5 分

所以 $PQ\perp$ 平面 ACD. ……………………………………………………………………………… 6 分

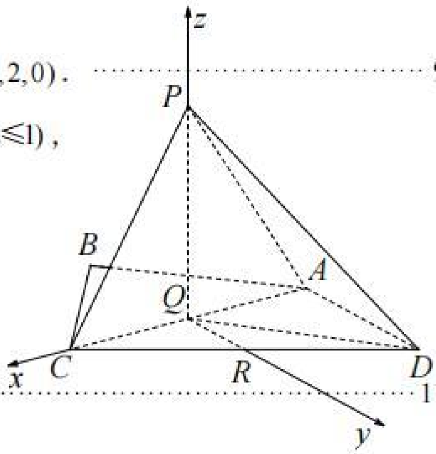
又因为 $PQ\subset$ 平面 PAC，所以平面 $PAC\perp$ 平面 ACD. …………………………………………… 7 分

（2）取 CD 的中点 R，连接 QR，所以 $QR//AD$，又 $AD\perp AC$，所以 $QR\perp AC$.

结合（1）可知，PQ,AC,QR 两两互相垂直，分别以 $\overrightarrow{QC},\overrightarrow{QR},\overrightarrow{QP}$ 为 x,y,z 轴的正方向建立空间直角坐

标系 $Qxyz$，如图所示. ……………………………………………………………………………… 8 分

依题意得，$P(0,0,\sqrt{3})$，$A(-1,0,0)$，$C(1,0,0)$，$D(-1,2,0)$，



所以 $\overline{AP}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overline{CA}=(-2,0,0)$，$\overline{CD}=(-2,2,0)$，$\overline{AD}=(0,2,0)$. ……………… 9 分

因为 M 是线段 PA 上的点，可设 $\overline{AM}=\lambda\overline{AP}=(\lambda,0,\sqrt{3}\lambda)$ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，

所以 $\overline{CM}=\overline{CA}+\overline{AM}=(\lambda-2,0,\sqrt{3}\lambda)$.

因为点 M 到直线 CD 的距离为 $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，

所以 $\sqrt{|\overline{CM}|^2-(\dfrac{\overline{CM}\cdot\overline{CD}}{|\overline{CD}|})^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，……………………………………………… 11 分

即 $\sqrt{(\lambda-2)^2+3\lambda^2-(\dfrac{4-2\lambda}{2\sqrt{2}})^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，

解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-\dfrac{3}{7}$（舍去）.

所以 $\overline{CM}=(-1,0,\sqrt{3})$. ……………………………………………………………………………… 12 分

设平面 PAD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，直线 CM 与平面 PAD 所成的角为 θ.

由 $\begin{cases}\overline{AP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overline{AD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0,\\ 2y=0.\end{cases}$

取 $z=-1$，则平面 PAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,-1)$. …………………………………… 13 分

所以 $\sin\theta=|\cos<\overline{CM},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\overline{CM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overline{CM}||\boldsymbol{n}|}$ ………………………………………………………… 14 分

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以直线 CM 与平面 PAD 所成的角为 $60°$. …………………………………………………………… 15 分

解法四：（1）分别取 AC,CD 的中点为 Q,R，连接 PQ，QR，PR，则 $QR//AD$，且 $QR=\dfrac{1}{2}AD$.

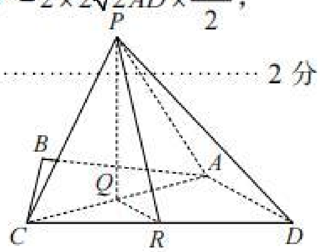
因为 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，所以 $AC=2$，$PQ\perp AC$，$PQ=\sqrt{3}$. ………………… 1 分

在 $\triangle ACD$ 中，$\angle ADC=45°$，$CD=2\sqrt{2}$，

由余弦定理，得 $AC^2=CD^2+AD^2-2CD\cdot AD\cos\angle ADC$，$2^2=(2\sqrt{2})^2+AD^2-2\times2\sqrt{2}AD\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

解得 $AD=2$，……………………………………………………………………………………………… 2 分

所以 $QR=1$.



因为 $AC^2+AD^2=CD^2$，所以 $AD\perp AC$， ··· 3 分

所以 $QR\perp AC$. 又 $PQ\perp AC$，所以 $\angle PQR$ 为二面角 $P-AC-D$ 的平面角. ··························· 5 分

因为在 $\triangle PCD$ 中，由余弦定理，得 $\cos\angle PCD=\dfrac{CP^2+CD^2-PD^2}{2CP\cdot CD}=\dfrac{4+(2\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times2\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，

所以在 $\triangle PCR$ 中，由余弦定理，得

$$PR=\sqrt{CP^2+CR^2-2CP\cdot CR\cos\angle PCR}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2-2\times2\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2\sqrt{2}}}=2.$$

所以在 $\triangle PQR$ 中，$PQ^2+QR^2=PR^2$，所以 $\angle PQR=90^\circ$，即二面角 $P-AC-D$ 是直二面角. ···· 6 分

所以平面$PAC\perp$平面ACD. ·· 7 分

（2）同解法三. ··· 15 分

17. 本小题以人工智能为背景，主要考查条件概率、概率的基本性质、互斥事件、对立事件、独立事件等基础知识，考查数学建模能力、运算求解能力、逻辑推理能力等，考查统计与概率思想、分类与整合思想、化归与转化思想等，考查数学抽象、数学建模、逻辑推理和数学运算等核心素养，体现基础性、综合性和应用性. 满分 15 分.

解法一：（1）设“甲平台向该用户推送 A”为事件 M，“甲平台向该用户推送 B”为事件 N，则“甲平台没有向该用户推送 A”为事件 $\bar{M}$，“甲平台没有向该用户推送 B”为事件 $\bar{N}$， ························ 1 分

依题意得，$P(M)=0.7$，$P(N)=0.5$，$P(MN)=0.3$，所以 $P(\bar{M})=1-P(M)=1-0.7=0.3$. ······ 2 分

因为 $N=MN\cup\bar{M}N$，

所以 $P(\bar{M}N)=P(N)-P(MN)=0.5-0.3=0.2$. ··· 4 分

所以 $P(N\mid\bar{M})=\dfrac{P(\bar{M}N)}{P(\bar{M})}$ ··· 6 分

$=\dfrac{0.2}{0.3}=\dfrac{2}{3}$.

所以在甲平台没有向该用户推送 A 的条件下，它向该用户推送 B 的概率为$\dfrac{2}{3}$. ······················ 7 分

（2）设“乙平台向该用户推送 C”为事件 L，“这两个平台至少向该用户推送 A、B、C 中的一种”为事件 R，则 $P(L)=0.6$，所以 $P(\bar{L})=1-P(L)=1-0.6=0.4$. ·· 8 分

依题意，“甲平台向该用户推送 A 或 B”为事件 $M\cup N$，“甲平台既不向该用户推送 A，也不向该用户推送 B”为事件 $\bar{M}\bar{N}$.

因为 $P(M)=0.7$，$P(N)=0.5$，$P(MN)=0.3$，由概率的基本性质可得：

$P(M\cup N)=P(M)+P(N)-P(MN)$ ·· 9 分

$=0.7+0.5-0.3=0.9$. ……10 分

所以 $P(\overline{M}\overline{N})=1-P(M\cup N)$ ……11 分

$=1-0.9=0.1$. ……12 分

依题意，R 与 $\overline{M}\overline{N}\overline{L}$ 互为对立事件，且 $\overline{M}\overline{N}$ 与 $\overline{L}$ 相互独立，……13 分

所以 $P(R)=1-P(\overline{M}\overline{N}\overline{L})=1-P(\overline{M}\overline{N})P(\overline{L})$ ……14 分

$=1-0.1\times0.4=0.96$.

所以这两个平台至少向该用户推送 A、B、C 中的一种的概率为 0.96. ……15 分

解法二：（1）同解法一. ……7 分

（2）设“乙平台向该用户推送 C”为事件 L，“这两个平台至少向该用户推送 A、B、C 中的一种”为事件 R.

因为 $P(L)=0.6$，所以 $P(\overline{L})=1-P(L)=1-0.6=0.4$. ……8 分

依题意，“甲平台向该用户推送 A 或 B”为事件 $M\cup N$.

因为 $P(M)=0.7$，$P(N)=0.5$，$P(MN)=0.3$，由概率的基本性质可得：

$P(M\cup N)=P(M)+P(N)-P(MN)$ ……9 分

$=0.7+0.5-0.3=0.9$. ……10 分

依题意，L 与 $(M\cup N)\overline{L}$ 互斥，$M\cup N$ 与 $\overline{L}$ 相互独立，……11 分

所以 $P(R)=P(L\cup(M\cup N)\overline{L})$ ……12 分

$=P(L)+P((M\cup N)\overline{L})$ ……13 分

$=P(L)+P(M\cup N)P(\overline{L})$ ……14 分

$=0.6+0.9\times0.4=0.96$.

所以这两个平台至少向该用户推送 A、B、C 中的一种的概率为 0.96. ……15 分

解法三：（1）同解法一. ……7 分

（2）设“乙平台向该用户推送 C”为事件 L，“这两个平台至少向该用户推送 A、B、C 中的一种”为事件 R.

因为 $P(L)=0.6$，所以 $P(\overline{L})=1-P(L)=1-0.6=0.4$. ……8 分

依题意，$R=\overline{M}\overline{N}L\cup\overline{M}N\overline{L}\cup M\overline{N}\overline{L}\cup M\overline{N}L\cup\overline{M}NL\cup MN\overline{L}\cup MNL$，……10 分

且 $\overline{M}\overline{N}L$、$\overline{M}N\overline{L}$、$M\overline{N}\overline{L}$、$M\overline{N}L$、$\overline{M}NL$、$MN\overline{L}$、$MNL$ 互斥，$\overline{M}\overline{N}$ 与 L、$\overline{M}N$ 与 $\overline{L}$、$M\overline{N}$ 与 $\overline{L}$、$M\overline{N}$ 与 L、$\overline{M}N$ 与 L、MN 与 $\overline{L}$、MN 与 L 均相互独立．……12 分

又因为 $P(M)=0.7$，$P(N)=0.5$，$P(MN)=0.3$，

所以 $P(R)=P(\overline{M}\overline{N}L\cup\overline{M}N\overline{L}\cup M\overline{N}\overline{L}\cup M\overline{N}L\cup\overline{M}NL\cup MN\overline{L}\cup MNL)$

$=P(\overline{M}\overline{N}L)+P(\overline{M}N\overline{L})+P(M\overline{N}\overline{L})+P(M\overline{N}L)+P(\overline{M}NL)+P(MN\overline{L})+P(MNL)$ ……13 分

$=P(\overline{M}\overline{N})P(L)+P(\overline{M}N)P(\overline{L})+P(M\overline{N})P(\overline{L})+P(M\overline{N})P(L)+P(\overline{M}N)P(L)+P(MN)P(\overline{L})+P(MN)P(L)$

……14 分

$=(1-0.7-0.5+0.3)\times0.6+(0.5-0.3)\times(1-0.6)+(0.7-0.3)\times(1-0.6)+(0.7-0.3)\times0.6$

$+(0.5-0.3)\times0.6+0.3\times(1-0.6)+0.3\times0.6=0.96$．

所以这两个平台至少向该用户推送 A、B、C 中的一种的概率为 0.96．……15 分

18．本小题主要考查导数及其应用、函数的基本性质、三角函数的图象与性质等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力、直观想象能力等，考查化归与转化思想、函数与方程思想、数形结合思想，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性和综合性．满分 17 分．

解法一：（1）由 $f(x)=(\frac{\pi}{2}-x)\sin x+ax-\cos x$ 得，$f'(x)=-\sin x+(\frac{\pi}{2}-x)\cos x+a+\sin x=(\frac{\pi}{2}-x)\cos x+a$，

……2 分

所以 $f'(0)=a+\frac{\pi}{2}$．依题意，得 $a+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$，所以 $a=0$，……4 分

此时 $f'(x)=(\frac{\pi}{2}-x)\cos x$，

所以当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 时，$f'(x)>0$，且 $f'(\frac{\pi}{2})=0$．

所以当 $x\in(0,\frac{3\pi}{2})$ 时，$f'(x)\geqslant0$，当且仅当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)=0$；……6 分

当 $x\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$ 时，$f'(x)<0$．……7 分

故 $f(x)$ 在 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 单调递增，在 $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$ 单调递减．……8 分

（2）由 $f(x)=(\frac{\pi}{2}-x)\sin x+ax-\cos x$ 得，

$f(\pi-x)=(x-\frac{\pi}{2})\sin(\pi-x)+a(\pi-x)-\cos(\pi-x)=(x-\frac{\pi}{2})\sin x+a(\pi-x)+\cos x$，

所以 $f(\pi-x)+f(x)=\pi a$，……………………………………………………………………9 分

所以曲线 $y=f(x)$ 关于点 $P(\frac{\pi}{2},\frac{\pi a}{2})$ 对称. ……………………………………………………10 分

因为 $f(0)=-1$，$f(-\pi)=-\pi a+1$，取 $A(0,-1)$，$B(-\pi,-\pi a+1)$，……………………………12 分

则直线 AP 的斜率 $k_{AP}=\dfrac{\frac{\pi a}{2}+1}{\frac{\pi}{2}}=a+\dfrac{2}{\pi}$，直线 BP 的斜率 $k_{BP}=\dfrac{\frac{\pi a}{2}+\pi a-1}{\frac{3\pi}{2}}=a-\dfrac{2}{3\pi}$，

则 $\forall a\in \mathrm{R}$，$k_{AP}\neq k_{BP}$，所以 A,B,P 不共线. ……………………………………………………14 分

设 A,B 关于点 P 的对称点分别为 C,D，则 $|PA|=|PC|$，$|PB|=|PD|$，

所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形. …………………………………………………………………16 分

因为曲线 $y=f(x)$ 关于点 $P(\frac{\pi}{2},\frac{\pi a}{2})$ 对称，所以 C,D 也在曲线 $y=f(x)$ 上，

所以曲线 $y=f(x)$ 上存在四个点 A,B,C,D，使得四边形 $ABCD$ 为平行四边形. ………………17 分

解法二：（1）同解法一. ……………………………………………………………………………8 分

（2）曲线 $y=f(x)$ 上存在四个点，使得以这四点为顶点的四边形是平行四边形. ……………9 分

证明如下：

取 $A(-\frac{\pi}{2},-\pi-\frac{\pi}{2}a)$，$B(0,-1)$，$C(\frac{3\pi}{2},\pi+\frac{3\pi}{2}a)$，$D(\pi,\pi a+1)$，……………………12 分

因为 $f(-\frac{\pi}{2})=-\pi-\frac{\pi}{2}a$，$f(0)=-1$，$f(\frac{3\pi}{2})=\pi+\frac{3\pi}{2}a$，$f(\pi)=\pi a+1$，

所以 A,B,C,D 四点都在曲线 $y=f(x)$ 上. ……………………………………………………13 分

因为 $\overrightarrow{AB}=(\frac{\pi}{2},\pi+\frac{\pi}{2}a-1)$，$\overrightarrow{DC}=(\frac{\pi}{2},\pi+\frac{\pi}{2}a-1)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，……………………………………………………………………15 分

因为 $\overrightarrow{AC}=(2\pi,2\pi+2\pi a)$，$\overrightarrow{BD}=(\pi,\pi a+2)$，$2\pi(\pi a+2)-\pi(2\pi+2\pi a)=4\pi-2\pi^2\neq 0$，

所以 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 不共线，

所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

所以曲线 $y=f(x)$ 上存在四个点 A,B,C,D，使得四边形 $ABCD$ 为平行四边形. ………………17 分

解法三：（1）同解法一. ……………………………………………………………………………8 分

（2）曲线 $y=f(x)$ 上存在四个点，使得以这四点为顶点的四边形是平行四边形. ……………9 分

证明如下：

取 $A(-\frac{\pi}{2},-\pi-\frac{\pi}{2}a)$，$B(0,-1)$，$C(\frac{3\pi}{2},\pi+\frac{3\pi}{2}a)$，$D(\pi,\pi a+1)$，…………………………12 分

因为 $f(-\frac{\pi}{2})=-\pi-\frac{\pi}{2}a$，$f(0)=-1$，$f(\frac{3\pi}{2})=\pi+\frac{3\pi}{2}a$，$f(\pi)=\pi a+1$，

所以 A,B,C,D 四点都在曲线 $y=f(x)$ 上. …………………………13 分

因为 $k_{AC}=\frac{2\pi a+2\pi}{2\pi}=a+1$，$k_{BD}=\frac{\pi a+2}{\pi}=a+\frac{2}{\pi}$，

所以 $\forall a\in\mathrm{R}$，$k_{AC}\neq k_{BD}$，所以 A,B,C,D 四点不共线. …………………………15 分

因为线段 AC 与线段 BD 的中点都是 $P(\frac{\pi}{2},\frac{\pi a}{2})$，所以 $|AP|=|PC|$，$|BP|=|PD|$，

所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

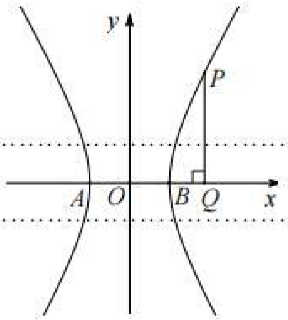
所以曲线 $y=f(x)$ 上存在四个点 A,B,C,D，使得四边形 $ABCD$ 为平行四边形. …………………………17 分

19. 本小题主要考查双曲线的标准方程与简单几何性质、直线与圆锥曲线的位置关系、点与圆的位置关系等基础知识，考查逻辑推理能力、直观想象能力、运算求解能力和创新能力等，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、数形结合思想和特殊与一般思想等，考查逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性．满分 17 分.

解法一：（1）依题意，可设 $P(x,y)(y\neq 0)$，则 $Q(x,0)$. …………………………1 分

因为 $A(-1,0),B(1,0)$，Q 在线段 AB 外，所以 $|AQ|\cdot|BQ|=|x+1||x-1|=x^2-1$. …………………………2 分

又因为 $|PQ|^2=3|AQ|\cdot|BQ|$，所以 $y^2=3(x^2-1)$，即 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.



故 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1(y\neq 0)$. …………………………3 分

（2）选择②作为条件. …………………………4 分

（i）设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $T(x_1,-y_1)$.

显然 l 的斜率不为零，否则，有 $x_2=-x_1,y_2=y_1$，$l:y=y_1$，

此时 $k_{TB}k_{NB}=\frac{-y_1}{x_1-1}\cdot\frac{y_2}{x_2-1}=\frac{y_1^2}{x_1^2-1}=\frac{3x_1^2-3}{x_1^2-1}=3$，与直线 TB 和 NB 的斜率之积为 6，矛盾.

…………………………5 分

故可设 l：$x=my+t$，

由 $\begin{cases}x=my+t,\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(3m^2-1)y^2+6mty+3t^2-3=0$，…………………………6 分

依题意，$3m^2-1\neq 0$且$\Delta=36m^2t^2-4\left(3m^2-1\right)\left(3t^2-3\right)=12\left(3m^2+t^2-1\right)>0$，

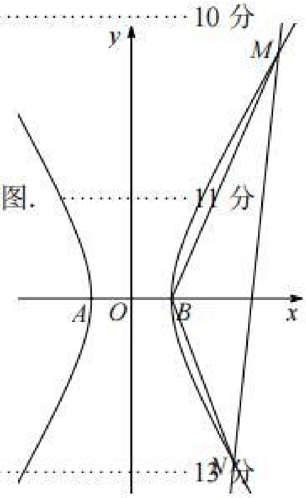
所以$m\neq\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$且$3m^2-1+t^2>0$，$y_1+y_2=-\dfrac{6mt}{3m^2-1},y_1y_2=\dfrac{3t^2-3}{3m^2-1}$．………………………… 7 分

由$\begin{cases}x=my+t,\\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$得$\left(3m^2-1\right)x^2+2tx-3m^2-t^2=0$，所以$x_1+x_2=-\dfrac{2t}{3m^2-1},x_1x_2=-\dfrac{3m^2+t^2}{3m^2-1}$，

因为直线TB和NB的斜率之积为6，所以$-\dfrac{y_1}{x_1-1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-1}=6$，………………………………………… 8 分

即$\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)+1}=-6$，$\dfrac{\dfrac{3\left(t^2-1\right)}{3m^2-1}}{-\dfrac{3m^2+t^2}{3m^2-1}+\dfrac{2t}{3m^2-1}+1}=-6$，$\dfrac{t+1}{t-1}=2$，解得$t=3$．

此时$\Delta=12(3m^2+8)>0$恒成立，所以l：$x=my+3$，过定点$(3,0)$．………………………………… 10 分



（ii）由（i）知，$x_1+x_2=-\dfrac{6}{3m^2-1}$，$x_1x_2=-\dfrac{3m^2+9}{3m^2-1}$，$y_1y_2=\dfrac{24}{3m^2-1}$．

①当$3m^2-1<0$，即$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<m<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时，$x_1x_2>0$，所以$M,N$均在$C$的右支，如图．………… 11 分

此时$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)+y_1y_2=x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)+1+y_1y_2$

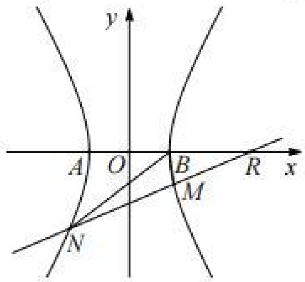
$$=-\frac{3m^2+9}{3m^2-1}+\frac{6}{3m^2-1}+1+\frac{24}{3m^2-1}=\frac{20}{3m^2-1}<0,$$

所以$\angle MBN$是钝角，$\triangle BMN$是钝角三角形．………………………………………………………… 13 分

②当$3m^2-1>0$，即$m>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$或$m<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时，$x_1x_2=-\dfrac{3m^2+9}{3m^2-1}<0$，

所以M,N分别在C的两支．不妨设M在C的右支，则$x_1>1$，如图．………………………………… 14 分

设$R\left(3,0\right)$，则$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MR}=\left(1-x_1\right)\left(3-x_1\right)+y_1^2=x_1^2-4x_1+3+3x_1^2-3=4x_1\left(x_1-1\right)>0$，………… 16 分



所以$\angle BMR\in(0,\dfrac{\pi}{2})$．

因为l过点R，所以$\angle BMN=\pi-\angle BMR\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，

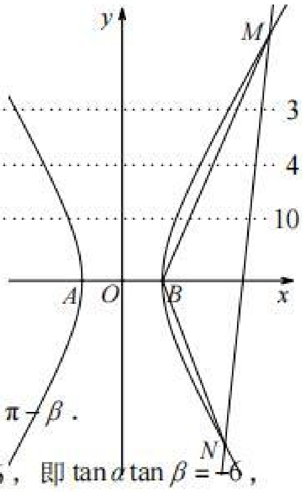
所以$\angle BMN$是钝角，$\triangle BMN$是钝角三角形．

综上可知，$\triangle BMN$不可能是锐角三角形．………………………………………………………………… 17 分

解法二：（1）同解法一. ………………………………………………………………………………3 分

（2）选择②作为条件. ……………………………………………………………………………………4 分

（i）同解法一. ……………………………………………………………………………………………10 分



（ii）由（i）知，直线 l 过定点 $(3,0)$.

①当 M,N 均在 C 的右支，不妨设 M 在 x 轴的上方，如图.

设直线 MB,NB 的倾斜角分别为 α,β. 则 $\tan\alpha>0$，$\tan\beta<0$，$\angle MBN=\alpha+\pi-\beta$.

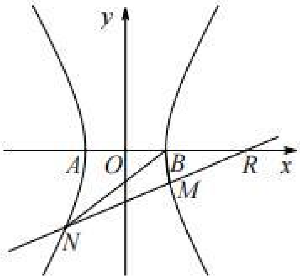
因为直线 TB 和 NB 的斜率之积为 6，所以直线 MB 和 NB 的斜率之积为 -6，即 $\tan\alpha\tan\beta=-6$，

所以 $\tan\angle MBN=\tan(\alpha+\pi-\beta)=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=-\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{5}<0$，

所以 $\angle MBN$ 是钝角，$\triangle MBN$ 是钝角三角形. ……………………………………………13 分

②当 M,N 分别在 C 的两支时，不妨设 M 在 C 的右支，则 $x_1>1$，如图. ………………………14 分

设 $R(3,0)$，则 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MR}=(1-x_1)(3-x_1)+y_1^2=x_1^2-4x_1+3+3x_1^2-3=4x_1(x_1-1)>0$，…………16 分



所以 $\angle BMR\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

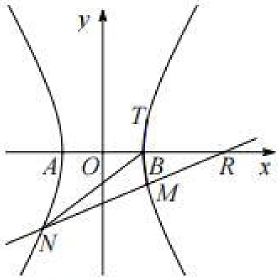
因为 l 过点 R，所以 $\angle BMN=\pi-\angle BMR\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，

所以 $\angle BMN$ 是钝角，$\triangle BMN$ 是钝角三角形.

综上可知，$\triangle BMN$ 不可能是锐角三角形. ……………………………………………………17 分

解法三：（1）同解法一. ………………………………………………………………………………3 分

（2）选择②作为条件. ……………………………………………………………………………………4 分



（i）设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),T(x_T,y_T)$，则 $x_T=x_1,y_T=-y_1$.

当 l 的斜率不存在时，$x_2=x_1,y_2=-y_1$，$l:x=x_1$.

所以 $k_{TB}k_{NB}=\dfrac{-y_1}{x_1-1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-1}=\dfrac{y_1^2}{(x_1-1)^2}=\dfrac{3x_1^2-3}{(x_1-1)^2}=\dfrac{3(x_1+1)}{x_1-1}$，

依题意 $\dfrac{3(x_1+1)}{x_1-1}=6$，解得 $x_1=3$. 此时，$l:x=3$，过点 $R(3,0)$. ……………………5 分

下面我们证明，当 l 的斜率存在时，M,N,R 共线.

显然直线 TB 斜率存在且不为零，可设直线 TB：$x=m_1y+1(m_1\neq0)$，

由 $\begin{cases}x=m_1y+1,\\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(3m_1^2-1)y^2+6m_1y=0$，解得 $y_T=-\dfrac{6m_1}{3m_1^2-1}$，$x_T=-\dfrac{3m_1^2+1}{3m_1^2-1}$，

所以 $y_1=\dfrac{6m_1}{3m_1^2-1}$， $x_1=-\dfrac{3m_1^2+1}{3m_1^2-1}$.

所以 $k_{MR}=\dfrac{y_1}{x_1-3}=\dfrac{\dfrac{6m_1}{3m_1^2-1}}{-\dfrac{3m_1^2+1}{3m_1^2-1}-3}=-\dfrac{3m_1}{6m_1^2-1}$. ………………………………………………… 7 分

同理可设直线 NB： $x=m_2y+1(m_2\neq 0)$，得 $y_2=-\dfrac{6m_2}{3m_2^2-1}$， $x_2=-\dfrac{3m_2^2+1}{3m_2^2-1}$，

所以 $k_{NR}=\dfrac{y_2}{x_2-3}=\dfrac{-\dfrac{6m_2}{3m_2^2-1}}{-\dfrac{3m_2^2+1}{3m_2^2-1}-3}=\dfrac{3m_2}{6m_2^2-1}$. ………………………………………………… 9 分

因为直线 TB 和 NB 的斜率之积为 6，所以 $\dfrac{1}{m_1}\cdot\dfrac{1}{m_2}=6$，即 $m_2=\dfrac{1}{6m_1}$，

所以 $k_{NR}=\dfrac{3m_2}{6m_2^2-1}=-\dfrac{3m_1}{6m_1^2-1}=k_{MR}$，所以 M,N,R 共线，即 l 过点 $R(3,0)$.

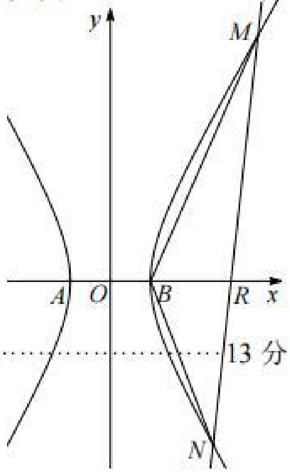
综上，l 过定点 $(3,0)$. ………………………………………………… 10 分

（ii）依题意，可设 l： $x=my+3$，由 $\begin{cases}x=my+3,\\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(3m^2-1)y^2+18my+24=0$，

依题意，$3m^2-1\neq 0$ 且 $\Delta=(18m)^2-4\times 24(3m^2-1)=12(3m^2+8)>0$，即 $m\neq\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

此时 $y_1+y_2=-\dfrac{18m}{3m^2-1},y_1y_2=\dfrac{24}{3m^2-1}$. ………………………………………………… 11 分

①当 $3m^2-1<0$，即 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<m<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$y_1y_2<0$，所以 M,N 均在 C 的右支，如图. ………… 12 分



此时 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=(my_1+2)(my_2+2)+y_1y_2$

$=m^2y_1y_2+2m(y_1+y_2)+4+y_1y_2$

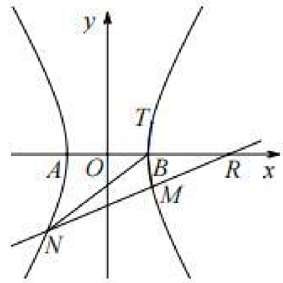
$=\dfrac{24m^2}{3m^2-1}-\dfrac{36m^2}{3m^2-1}+\dfrac{4(3m^2-1)}{3m^2-1}+\dfrac{24}{3m^2-1}=\dfrac{20}{3m^2-1}<0$，

所以 $\angle MBN$ 是钝角，$\triangle BMN$ 是钝角三角形. ………………………………………………… 13 分

②当 $3m^2-1>0$，即 $m>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $m<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$y_1y_2=\dfrac{24}{3m^2-1}>0$，

所以 M,N 分别在 C 的两支．不妨设 M 在 C 的右支，则 $x_1>1$，如图． ……………………14 分

所以 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MR}=(1-x_1)(3-x_1)+y_1^2=x_1^2-4x_1+3+3x_1^2-3=4x_1(x_1-1)>0$， ……………………16 分



所以 $\angle BMR\in(0,\frac{\pi}{2})$．

因为 l 过点 R，所以 $\angle BMN=\pi-\angle BMR\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，

所以 $\angle BMN$ 是钝角，$\triangle BMN$ 是钝角三角形．

综上可知，$\triangle BMN$ 不可能是锐角三角形． ……………………17 分

解法四：（1）同解法一． ……………………3 分

（2）选择③作为条件． ……………………4 分

（i）设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $T(x_1,-y_1)$．

显然 l 的斜率不为零，否则 $x_2=-x_1,y_2=y_1$，$l:y=y_1$，

因为直线 TB 和 NA 的斜率之商为 2，所以 $\frac{-y_1}{x_1-1}=\frac{2y_2}{x_2+1}$，

从而有 $\frac{-y_1}{x_1-1}=\frac{2y_1}{-x_1+1}$，解得 $y_1=0$，此时，l 与 C 不存在公共点，与题设矛盾． ……………………5 分

故可设 l：$x=my+t$，

由 $\begin{cases}x=my+t,\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(3m^2-1)y^2+6mty+3t^2-3=0$， ……………………6 分

依题意，$3m^2-1\neq0$ 且 $\Delta=36m^2t^2-4(3m^2-1)(3t^2-3)=12(3m^2+t^2-1)>0$，

所以 $m\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 且 $3m^2-1+t^2>0$，$y_1+y_2=-\frac{6mt}{3m^2-1},y_1y_2=\frac{3t^2-3}{3m^2-1}$． ……………………7 分

由 $\begin{cases}x=my+t,\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(3m^2-1)x^2+2tx-3m^2-t^2=0$，所以 $x_1+x_2=-\frac{2t}{3m^2-1},x_1x_2=-\frac{3m^2+t^2}{3m^2-1}$，

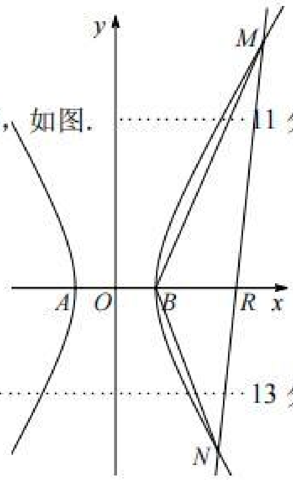
因为直线 TB 和 NA 的斜率之商为 2，所以 $\frac{-y_1}{x_1-1}=\frac{2y_2}{x_2+1}$． ……………………8 分

因为点 M 在 C 上，所以 $y_1{}^2=3(x_1{}^2-1)$，即 $\frac{y_1}{x_1-1}\cdot\frac{y_1}{x_1+1}=3$，

所以 $-\frac{2y_2}{x_2+1}\cdot\frac{y_1}{x_1+1}=3$，即 $\frac{2y_1y_2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=-3$，$\frac{2\cdot\frac{3\left(t^2-1\right)}{3m^2-1}}{-\frac{3m^2+t^2}{3m^2-1}-\frac{2t}{3m^2-1}+1}=-3$，$\frac{2(t-1)}{t+1}=1$，

解得 $t=3$．此时 $\Delta=12(3m^2+8)>0$ 恒成立，所以 l：$x=my+3$，过定点 $(3,0)$． ……………… 10 分

（ii）由（i）知，$x_1+x_2=-\frac{6}{3m^2-1}$，$x_1x_2=-\frac{3m^2+9}{3m^2-1}$，$y_1y_2=\frac{24}{3m^2-1}$．



①当 $3m^2-1<0$，即 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<m<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$x_1x_2>0$，所以 M,N 均在 C 的右支，如图． ……………… 11 分

此时 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=x_1x_2-(x_1+x_2)+1+y_1y_2$

$$=-\frac{3m^2+9}{3m^2-1}+\frac{6}{3m^2-1}+1+\frac{24}{3m^2-1}=\frac{20}{3m^2-1}<0,$$

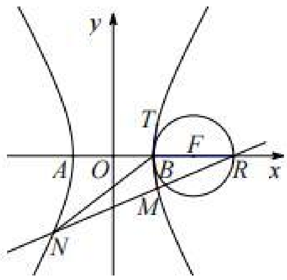
所以 $\angle MBN$ 是钝角，$\triangle BMN$ 是钝角三角形． ……………… 13 分

②当 $3m^2-1>0$，即 $m>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $m<-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$x_1x_2=-\frac{3m^2+9}{3m^2-1}<0$，

所以 M,N 分别在 C 的两支，不妨设 M 在 C 的右支，则 $x_1>1$，如图． ……………… 14 分

设 $R(3,0)$，$F(2,0)$，则 $F(2,0)$ 是以 BR 为直径的圆的圆心，

$|MF|^2=(x_1-2)^2+y_1^2=x_1^2-4x_1+4+y_1^2=x_1^2-4x_1+4+3x_1^2-3=4x_1(x_1-1)+1>1$， ……………… 16 分



所以 M 在以 BR 为直径的圆外，所以 $\angle BMR\in(0,\frac{\pi}{2})$．

因为 l 过点 $R(3,0)$，所以 $\angle BMN=\pi-\angle BMR\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，

所以 $\angle BMN$ 是钝角，$\triangle BMN$ 是钝角三角形．

综上可知，$\triangle BMN$ 不可能是锐角三角形． ……………… 17 分

解法五：（1）同解法一． ……………… 3 分

（2）选择③作为条件． ……………… 4 分

（i）设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),T(x_T,y_T)$，则 $x_T=x_1,y_T=-y_1$．

当 l 的斜率不存在时，$x_2=x_1,y_2=-y_1$，$l:x=x_1$．

因为直线 TB 和 NA 的斜率之商为 2，所以 $\frac{-y_1}{x_1-1}=\frac{2y_2}{x_2+1}$，

即 $\dfrac{-y_1}{x_1-1}=\dfrac{-2y_1}{x_1+1}$，解得 $x_1=3$，此时，直线 $l:x=3$，过点 $R(3,0)$． ………………………………… 5 分

下面我们证明，当 l 的斜率存在时，M,N,R 共线．

显然直线 TB 斜率存在且不为零，可设直线 TB：$x=m_1y+1(m_1\neq 0)$，

由 $\begin{cases}x=m_1y+1,\\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $\left(3m_1^2-1\right)y^2+6m_1y=0$，解得 $y_T=-\dfrac{6m_1}{3m_1^2-1}$，$x_T=-\dfrac{3m_1^2+1}{3m_1^2-1}$，

所以 $y_1=\dfrac{6m_1}{3m_1^2-1}$，$x_1=-\dfrac{3m_1^2+1}{3m_1^2-1}$．

所以 $k_{MR}=\dfrac{y_1}{x_1-3}=\dfrac{\dfrac{6m_1}{3m_1^2-1}}{-\dfrac{3m_1^2+1}{3m_1^2-1}-3}=-\dfrac{3m_1}{6m_1^2-1}$． ………………………………………………………… 7 分

同理可设直线 NA：$x=m_2y-1(m_2\neq 0)$，由 $\begin{cases}x=m_2y-1,\\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $\left(3m_2^2-1\right)y^2-6m_2y=0$，

所以 $y_2=\dfrac{6m_2}{3m_2^2-1}$，$x_2=m_2y_2-1=\dfrac{3m_2^2+1}{3m_2^2-1}$，$k_{NR}=\dfrac{y_2}{x_2-3}=\dfrac{\dfrac{6m_2}{3m_2^2-1}}{\dfrac{3m_2^2+1}{3m_2^2-1}-3}=-\dfrac{3m_2}{3m_2^2-2}$． ………… 9 分

因为直线 TB 和 NA 的斜率之商为 2，所以 $\dfrac{1}{m_1}=\dfrac{2}{m_2}$，即 $m_2=2m_1$．

所以 $k_{NR}=-\dfrac{3m_2}{3m_2^2-2}=-\dfrac{3m_1}{6m_1^2-1}=k_{MR}$，所以 M,N,R 共线，即 l 过点 $R(3,0)$．

综上，l 过定点 $(3,0)$． ………………………………………………………………………………… 10 分

（ii）同解法二． …………………………………………………………………………………………… 17 分

解法六：（1）同解法一． ………………………………………………………………………………… 3 分

（2）选择②作为条件． ………………………………………………………………………………… 4 分

（i）设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $T(x_1,-y_1)$．

当 l 的斜率不存在时，$x_2=x_1,y_2=-y_1$，$l:x=x_1$．

所以 $k_{TB}k_{NB}=\dfrac{-y_1}{x_1-1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-1}=\dfrac{y_1^2}{(x_1-1)^2}=\dfrac{3x_1^2-3}{(x_1-1)^2}=\dfrac{3(x_1+1)}{x_1-1}$．

又因为直线 TB 和 NB 的斜率之积为 6，所以 $\dfrac{3(x_1+1)}{x_1-1}=6$，解得 $x_1=3$．

此时，直线$l: x=3$，过点$(3,0)$．……………………………………………………5 分

当l的斜率存在时，设l：$y=kx+m$，

由$\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$得$\left(3-k^2\right)x^2-2kmx-m^2-3=0$，

依题意，$3-k^2\neq 0$且$\Delta=4k^2m^2-4\left(3-k^2\right)\left(-m^2-3\right)=12\left(m^2+3-k^2\right)>0$，

所以$k\neq\pm\sqrt{3}$且$m^2+3-k^2>0$，$x_1+x_2=\dfrac{2km}{3-k^2}, x_1x_2=-\dfrac{m^2+3}{3-k^2}$．……………………7 分

因为直线TB和NB的斜率之积为6，所以$-\dfrac{y_1}{x_1-1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-1}=6$，……………………………8 分

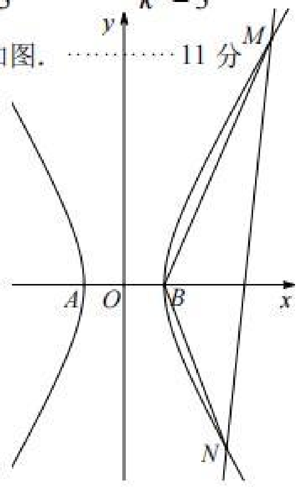
即$\dfrac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=-6$，$\dfrac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=-6$，$\dfrac{-\dfrac{(m^2+3)k^2}{3-k^2}+\dfrac{2k^2m^2}{3-k^2}+m^2}{-\dfrac{m^2+3}{3-k^2}-\dfrac{2km}{3-k^2}+1}=-6$，

所以$\dfrac{3(m-k)}{-m-k}=-6$，所以$m=-3k$，所以l：$y=kx-3k$，过点$(3,0)$．

综上，l过定点$(3,0)$．……………………………………………………………………10 分

（ii）由（i）知，$m=-3k$，故$m^2+3-k^2=8k^2+3>0$恒成立，且$x_1+x_2=\dfrac{6k^2}{k^2-3}$，$x_1x_2=\dfrac{9k^2+3}{k^2-3}$．

①当$k^2-3>0$，即$k>\sqrt{3}$或$k<-\sqrt{3}$时，$x_1x_2>0$，所以M,N均在C的右支，如图．………11 分



此时$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=x_1x_2-(x_1+x_2)+1+k^2(x_1-3)(x_2-3)$

$$=x_1x_2-(x_1+x_2)+1+k^2x_1x_2-3k^2(x_1+x_2)+9k^2$$

$$=\frac{9k^2+3}{k^2-3}-\frac{6k^2}{k^2-3}+1+\frac{k^2(9k^2+3)}{k^2-3}-3k^2\cdot\frac{6k^2}{k^2-3}+9k^2$$

$$=\frac{9k^2+3}{k^2-3}-\frac{6k^2}{k^2-3}+\frac{k^2-3}{k^2-3}+\frac{k^2(9k^2+3)}{k^2-3}-\frac{18k^4}{k^2-3}+\frac{9k^2(k^2-3)}{k^2-3}$$

$$=\frac{-20k^2}{k^2-3}<0,$$

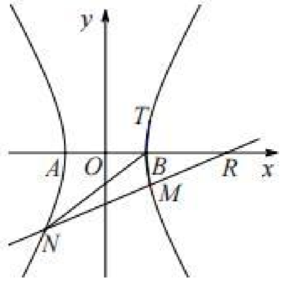
所以$\angle MBN$是钝角，$\triangle BMN$是钝角三角形．……………………………………………13 分

②当$k^2-3<0$，即$-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$时，$x_1x_2<0$，

所以M,N分别在C的两支，不妨设M在C的右支，则$x_1>1$，如图．……………………………14 分

设 $R(3,0)$，则 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MR}=(1-x_1)(3-x_1)+y_1^2=x_1^2-4x_1+3+3x_1^2-3=4x_1(x_1-1)>0$，…………16 分

所以 $\angle BMR\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.



因为 l 过定点 $R(3,0)$，所以 $\angle BMN=\pi-\angle BMR\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，

所以 $\angle BMN$ 是钝角，$\triangle BMN$ 是钝角三角形.

综上可知，$\triangle BMN$ 不可能是锐角三角形. ……………………………………………………17 分