

(在此卷上答题无效)

2026-2027 学年福州市高三年级适应性练习

数 学

(完卷时间: 120 分钟; 满分: 150 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 样本数据 80, 85, 87, 88, 90, 92, 95 的第 50 百分位数为

- A. 87 B. 88 C. 89 D. 92

2. 已知集合 $A = \{2^{-1}, \log_2 4\}$, $B = \{\frac{1}{2}, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{\frac{1}{2}\}$ B. $\{\frac{1}{2}, 2\}$ C. $\{\frac{1}{2}, 3\}$ D. $\{\frac{1}{2}, 2, 3\}$

3. 已知向量 e_1, e_2 不共线, 且 $(xe_1 + e_2) \parallel (e_1 - 2e_2)$, 则 $x =$

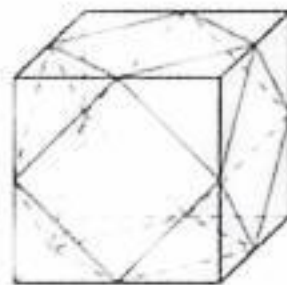
- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线过点 (2, 1), 则 C 的离心率为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\sqrt{5}$

5. 如图, 某广场摆放了石凳供大家休息, 每张石凳是由一个正方体截去八个一样的四面体得到的几何体, 数学上称之为阿基米德多面体. 设被截正方体的棱长是 40 cm, 则每张石凳的表面积为

- A. $1600(3 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$
B. $1600(3 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$
C. $3200(3 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$
D. $3200(3 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$



6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为1, 公差为2. 将 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大、左小右大的原则写成如下的三角形数表:

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \quad a_3 \\ a_4 \quad a_5 \quad a_6 \\ \dots \end{array}$$

则这个三角形数表第10行所有数的和为

- A. 729 B. 980 C. 1000 D. 1331

7. 已知 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \varphi < 2\pi$) 的图象关于原点对称, 且 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x}$ 的最小值为1, 则 $a =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

二、选择题: 本题共3小题, 每小题6分, 共18分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得6分, 部分选对的得部分分, 有选错的得0分。

9. 在复平面内, 复数 z 对应的点的坐标为 $(1, -1)$, 则

- A. $\bar{z} = 1 + i$ B. $|z| = \sqrt{2}$ C. $z^2 = 2 - 2i$ D. $\frac{\bar{z} + 2}{z - 4} = -1$

10. 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 侧面 PAD 为正三角形, 且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 则

- A. $PA \perp AB$
B. 棱 AD 上存在点 M , 使得 $AD \perp$ 平面 PMB
C. 异面直线 AD 与 PB 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$
D. 二面角 $P - BC - A$ 的大小为 60°

11. 已知 $\odot C: (x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$ 被 x, y 轴截得的弦长分别为 d_1, d_2 , 则下列说法正确的是

- A. a 可以取任意实数
B. 满足 $d_1 = d_2$ 的 $\odot C$ 有无数个
C. 若圆心 C 在 $\odot O: x^2 + y^2 = 1$ 上, 则 $d_1 + d_2$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$
D. 若圆心 C 在直线 $y = x + 1$ 上, 则 $d_1 + d_2$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 曲线 $y = e^x - x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为_____。

13. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 与 $x^2 = 2qy$ ($q > 0$) 的公共点为 A, B ，若两条抛物线的焦点到直线 $y = x$ 的距离相等，且两焦点之间的距离为 $2\sqrt{2}$ ，则 $p + q =$ _____， $|AB| =$ _____。

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 11n - 23$ 。若 $\{a_n\}$ 中存在三项构成公比为 q 的等比数列，则正整数 q 的最小值为_____。

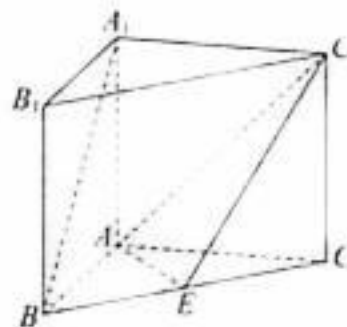
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， E 是 BC 中点。

(1) 求证： $A_1B \parallel$ 平面 AEC_1 ；

(2) 若 $AB \perp AC$ ，且 $AB = AC = AA_1 = 1$ ，求直线 A_1B 到平面 AEC_1 的距离。



16. (15 分)

已知椭圆 $\Gamma: \frac{y^2}{a^2} + x^2 = 1$ ($a > 1$) 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 ，两焦点分别为 $F_1(0, -c), F_2(0, c)$ ，

$c > 0$ ，且 $\overline{A_1F_1} \cdot \overline{A_2F_2} = \frac{2}{3}$ 。

(1) 求 a 的值；

(2) 已知 $M\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$ ，点 P 在 Γ 上，若 $\triangle MA_1P$ 是以 A_1P 为底边的等腰三角形，求点 P 的坐标。

17. (15 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 。已知 $A = \frac{\pi}{3}$ ， $\sin B = \frac{\sqrt{3}a}{4c}$ 。

(1) 求 $\tan B \tan C$ ；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，求 $b + c$ 。

18. (17 分)

足球点球大战的规则如下：裁判员通过抽签决定先罚点球的球队，之后双方交替罚球。前五轮中，每队各派 5 名队员依次罚点球：若领先方的进球数与落后方的进球数的差值，超过落后方剩余罚点球的次数，则领先方提前获胜；否则，完成五轮时，进球数多的球队获胜。

若完成五轮时双方进球数相同，则从第六轮开始进入“Sudden Death”阶段，即双方继续各派新队员罚点球，直到某一轮中一方罚进而另一方罚失时决出胜负。

某次高中足球联赛的淘汰赛中，甲、乙两队在常规时间和加时赛后以 0:0 战平，比赛进入点球大战。假设每名队员是否罚进相互独立。已知甲队前五轮 5 名队员罚进点球的概率依次为

$\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ ；乙队前五轮每名队员罚进点球的概率均为 $\frac{2}{3}$ 。甲队先罚。

(1) 求乙队在前两轮中恰好罚进一个点球的概率；

(2) 前三轮罚点球后，比分达到 3:3。

(i) 求第五轮时甲队罚进点球就提前获胜的概率；

(ii) 已知两队未进入第六轮“Sudden Death”阶段，且甲队获胜。用 X 表示比赛中甲队罚进点球的个数，求 X 的分布列和数学期望。

19. (17 分)

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， a 为非零实数，若对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(ax) = af(x)$ ，则称 $f(x)$ 为 a -拓展函数。

(1) 已知狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 。若函数 $f(x) = x \cdot D(x)$ ， $x \in \mathbf{R}$ ，判断

$f(x)$ 是否为 2-拓展函数；

(2) 已知 $f(x)$ 为 a -拓展函数 ($a > 0$ ，且 $a \neq 1$)，设 $g(x) = f'(x)$ ，当 $x \in (-1, 1)$ 时， $g'(x) \geq 0$ 。

(i) 当 $a = 2$ 时，证明： $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $g'(x) \geq 0$ ；

(ii) 若 $f(-1) = -1$ ， $f(0) = 0$ ， $f(1) = 1$ ，证明： $f(x) = x$ 。

2026-2027 学年第一学期福州市高三年级第一次适应性练习

数 学 参 考 答 案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. B 2. B 3. B 4. C 5. A 6. C 7. C 8. D

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. ABD 10. AC 11. BCD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. $y = 1$

13. 8, $8\sqrt{2}$

14. 12

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 【考查意图】本小题主要考查直线与平面平行、垂直等位置关系、空间距离，以及空间向量等基础知识，考查直观想象能力、逻辑推理能力、运算求解能力等，考查化归与转化、函数与方程思想等，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性。满分 13 分。

【解法一】(1) 如图所示，连接 A_1C 交 AC_1 于 F 点，连接 EF ，

由三棱柱的特征可知侧面 ACC_1A_1 是平行四边形，

则 F 是 A_1C 的中点。 2 分

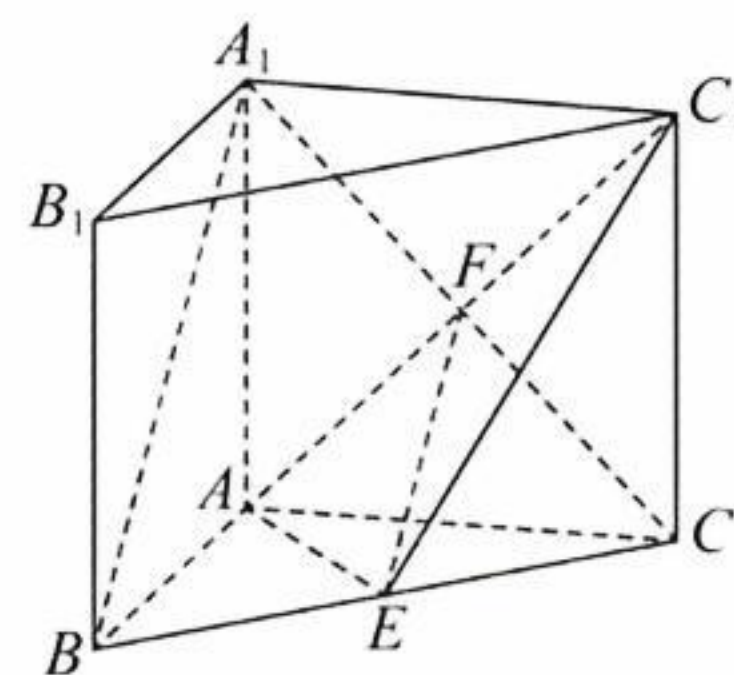
又 E 是 BC 中点，则 $EF \parallel A_1B$ 。 3 分

因为 $EF \subset$ 平面 AEC_1 ， $A_1B \not\subset$ 平面 AEC_1 ，

所以 $A_1B \parallel$ 平面 AEC_1 。 5 分

(2) 由 (1) 知 $A_1B \parallel$ 平面 AEC_1 ，

所以直线 A_1B 到平面 AEC_1 的距离就是 B 到平面 AEC_1 的距离，设为 h 。 6 分



因为 $AC \perp AB$, $AB = AC = 1$, 所以 $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 7 分

$$\text{又因为 } AC_1 = \sqrt{2}, \quad C_1E = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\text{所以 } AE^2 + EC_1^2 = AC_1^2,$$

所以 $AE \perp EC_1$ 9 分

又因为 $AA_1 \perp AB$, $AC \cap AA_1 = A$, 所以 $AB \perp$ 平面 ACC_1A_1 10 分

因为 $CC_1 \perp$ 平面 ABC ,

$$\text{由 } V_{B-AEC_1} = V_{C_1-ABE}, \text{ 得 } \frac{1}{3}S_{\triangle AEC_1} \times h = \frac{1}{3}S_{\triangle ABE} \times CC_1. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } S_{\triangle AEC_1} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times 1, \text{ 解得 } h = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

即直线 A_1B 到平面 AEC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 13 分

【解法二】(1) 同解法一;

(2) 由 (1) 知 $A_1B \parallel$ 平面 AEC_1 ,

所以直线 A_1B 到平面 AEC_1 的距离就是 A_1 到平面 AEC_1 的距离, 设为 h 6 分

$$\text{因为 } AC \perp AB, \quad AB = AC = 1, \text{ 所以 } AE = \frac{\sqrt{2}}{2}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } AC_1 = \sqrt{2}, \quad C_1E = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\text{所以 } AE^2 + EC_1^2 = AC_1^2,$$

所以 $AE \perp EC_1$ 9 分

又因为 $AA_1 \perp AB$, $AC \cap AA_1 = A$, 所以 $AB \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

因为点 E 为 BC 中点, 所以点 E 到平面 ACC_1A_1 的距离为 $\frac{1}{2}AB$ 10 分

$$\text{由 } V_{E-A_1AC_1} = V_{A_1-C_1AE}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{得 } \frac{1}{3}S_{\triangle A_1AC_1} \times \frac{1}{2}AB = \frac{1}{3}S_{\triangle AEC_1} \times h.$$

又因为 $S_{\triangle AEC_1} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $S_{\triangle A_1AC_1} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$,

所以 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times h$, 解得 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

即直线 A_1B 到平面 AEC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 13 分

【解法三】(1) 同解法一;

(2) 以 A 为坐标原点, AB , AC , AA_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系. 6 分

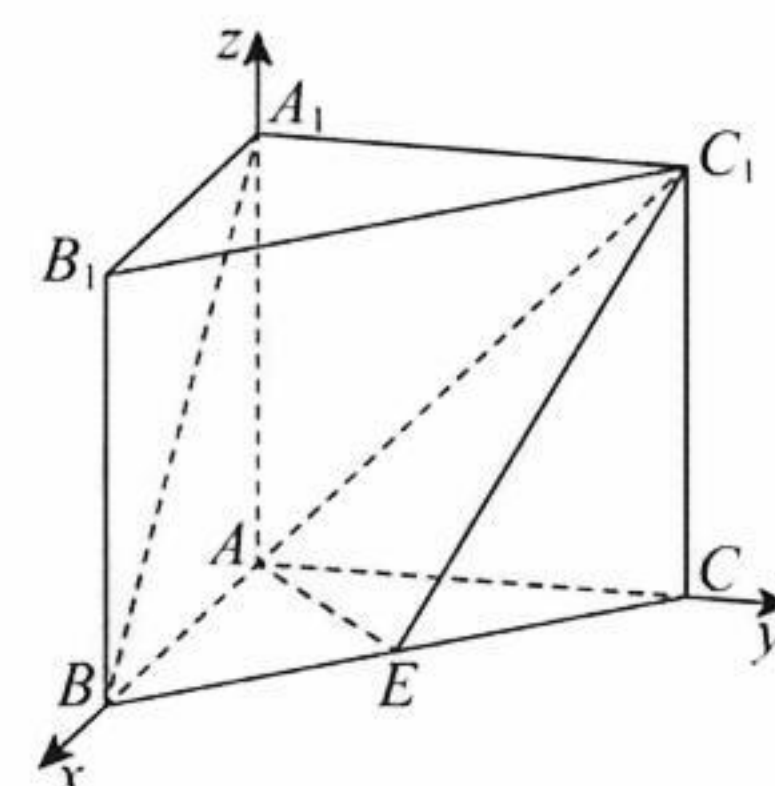
则 $A(0,0,0)$, $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $A_1(0,0,1)$, $C_1(0,1,1)$, $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\overrightarrow{AC_1} = (0,1,1)$ 7 分

设平面 AEC_1 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC_1} = y + z = 0 \end{cases}$$

取 $y = -1$, 则 $x = 1$, $z = 1$, 即 $\vec{n} = (1, -1, 1)$ 9 分

又 $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 1)$,

则点 A_1 到平面 AEC_1 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{AA_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 12 分



由 (1) 知 $A_1B \parallel$ 平面 AEC_1 ,

所以直线 A_1B 到平面 AEC_1 的距离就是 A_1 到平面 AEC_1 的距离,

所以直线 A_1B 到平面 AEC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 13 分

16. 【考查意图】本小题主要考查椭圆的标准方程和简单几何性质、平面向量数量积、平面几何性质等基础知识, 考查逻辑推理能力、运算求解能力等, 考查函数与方程思想、化归与转化思想、数形结合思想等, 考查数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养, 体现基础性、综合性. 满分 15 分.

【解法一】(1) 由已知得, $A_1(-1, 0)$,

故 $\overrightarrow{A_1F_1} = (1, -c)$, $\overrightarrow{A_1F_2} = (1, c)$, 且 $c^2 = a^2 - 1$ 3 分

所以 $\overrightarrow{A_1F_1} \cdot \overrightarrow{A_1F_2} = 1 - c^2 = 2 - a^2 = \frac{2}{3}$, 解得 $a^2 = \frac{4}{3}$.

因为 $a > 1$, 所以 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 6 分

(2) 设 $P(x_0, y_0)$, 因为 $A_2(1, 0)$, 所以 A_2P 中点为 $N\left(\frac{x_0+1}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$ 7 分

因为 $M\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$, 所以 $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{3x_0+4}{6}, \frac{y_0}{2}\right)$, $\overrightarrow{A_2P} = (x_0-1, y_0)$.

因为 $\triangle MA_2P$ 是以 A_2P 为底边的等腰三角形,

所以 $MN \perp A_2P$, 所以 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A_2P} = 0$, 9 分

所以 $\frac{3x_0+4}{6} \cdot (x_0-1) + \frac{y_0}{2} \cdot y_0 = 0$,

整理得, $(3x_0+4)(x_0-1) + 3y_0^2 = 0$,

即 $3x_0^2 + x_0 - 4 + 3y_0^2 = 0$ ① 12 分

由 (1) 知 $\Gamma: \frac{3y^2}{4} + x^2 = 1$,

因为 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆上, 所以 $4x_0^2 + 3y_0^2 = 4$ ② 13 分

联立①、②, 消去 y_0 , 化简得 $x_0(x_0-1) = 0$.

显然 $x_0 \neq 1$, 解得 $x_0 = 0$, 代入②得 $y_0 = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以点 P 的坐标为 $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 或 $\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 15 分

【解法二】(1) 同解法一;

(2) 因为 $\triangle MA_2P$ 是以 A_2P 为底边的等腰三角形, 且 $A_2(1, 0)$, $M\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$,

所以 $|MP| = |MA_2| = 1 - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6}$, 8 分

所以点 P 在以 M 为圆心, $\frac{7}{6}$ 为半径的圆上 (异于点 A_2),

所以 $\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + y^2 = \frac{49}{36} (x \neq 1)$, 9 分

即 $\left(x_0 + \frac{1}{6}\right)^2 + y_0^2 = \frac{49}{36} (x_0 \neq 1)$

整理得, $3x_0^2 + 3y_0^2 + x_0 = 4 (x_0 \neq 1)$ ① 11 分

由 (1) 知 $\Gamma: \frac{3y^2}{4} + x^2 = 1$,

因为 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆上, 所以 $4x_0^2 + 3y_0^2 = 4$. ② 12 分

联立①、②，消去 y_0 ，化简得 $x_0(x_0 - 1) = 0 (x_0 \neq 1)$ 13 分

解得 $x_0 = 0$ ，代入②得 $y_0 = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以点 P 的坐标为 $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 或 $\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 15 分

【解法三】(1) 同解法一；

(2) 设点 $P(x_0, y_0)$ ，由题意 P 不与 $A_2(1, 0)$ 重合，故 $y_0 \neq 0$ ，

则直线 A_2P 的方程可设为 $x_0 = my_0 + 1 (m \neq 0)$.

由 (1) 知 $\Gamma: \frac{3y^2}{4} + x^2 = 1$ ，

因为 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆上，所以 $4x_0^2 + 3y_0^2 = 4$. ① 7 分

将 $x_0 = my_0 + 1 (m \neq 0)$ 代入①，得 $4(my_0 + 1)^2 + 3y_0^2 = 4$.

展开整理，得 $(4m^2 + 3)y_0^2 + 8my_0 = 0$.

因 $y_0 \neq 0$ ，得 $(4m^2 + 3)y_0 = -8m$ ，

所以 $y_0 = \frac{-8m}{4m^2 + 3}$ ， $x_0 = \frac{-4m^2 + 3}{4m^2 + 3}$.

所以 $P\left(\frac{-4m^2 + 3}{4m^2 + 3}, \frac{-8m}{4m^2 + 3}\right)$ 9 分

因为 $\triangle MA_2P$ 是以 A_2P 为底边的等腰三角形， $A_2(1, 0)$ ， $M\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$ ，

所以 $|MP| = |MA_2| = 1 - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6}$ ， 11 分

所以 $\left(x_0 + \frac{1}{6}\right)^2 + y_0^2 = \frac{49}{36} (y_0 \neq 0)$.

整理得， $3x_0^2 + 3y_0^2 + x_0 = 4 (y_0 \neq 0)$. ② 12 分

将 $P\left(\frac{-4m^2 + 3}{4m^2 + 3}, \frac{-8m}{4m^2 + 3}\right)$ 代入②，

得 $3\left(\frac{-4m^2 + 3}{4m^2 + 3}\right)^2 + 3\left(\frac{-8m}{4m^2 + 3}\right)^2 + \frac{-4m^2 + 3}{4m^2 + 3} = 4$.

展开整理，得 $3m^2 = 4m^4$ 13 分

因为 $m \neq 0$ ，所以 $m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

所以 $x_0 = \frac{-4m^2 + 3}{4m^2 + 3} = 0$ ， $y_0 = \frac{-8m}{4m^2 + 3} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

所以点 P 的坐标为 $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 或 $\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 。..... 15 分

【解法四】(1) 同解法一；

(2) 由 (1) 知 $\Gamma: \frac{3y^2}{4} + x^2 = 1$ ，

由 P 在椭圆上，可设 $P\left(\cos\theta, \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)$ 。..... 8 分

因为 $\triangle MA_2P$ 是以 A_2P 为底边的等腰三角形，且 $A_2(1, 0)$ ， $M\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$ ，

所以 $|MP| = |MA_2| = 1 - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6}$ ，且 $\cos\theta \neq 1$ 。..... 10 分

所以 $\left(\cos\theta + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)^2 = \frac{49}{36}$ 。

展开，得 $\cos^2\theta + \frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{36} + \frac{4}{3}(1 - \cos^2\theta) = \frac{49}{36}$ 。

整理，得 $\cos\theta(\cos\theta - 1) = 0$ 。..... 13 分

因为 $\cos\theta \neq 1$ ，所以 $\cos\theta = 0$ ，所以 $\sin\theta = \pm 1$ ，

所以点 P 的坐标为 $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 或 $\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 。..... 15 分

17. 【命题意图】本小题主要考查正弦定理、余弦定理、三角恒等变换、三角形面积等基础知识，考查运算求解能力，考查化归与转化思想、函数与方程思想等，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性和综合性。满分 15 分。

【解法一】(1) 在 $\triangle ABC$ 中，由 $\sin B = \frac{\sqrt{3}a}{4c}$ 及正弦定理得 $\sin B = \frac{\sqrt{3}\sin A}{4\sin C}$ 。..... 1 分

因为 $A = \frac{\pi}{3}$ ，故 $\sin B \sin C = \frac{3}{8}$ ，..... 2 分

又 $B + C = \frac{2\pi}{3}$ ，

所以 $\cos(B + C) = \cos B \cos C - \sin B \sin C = -\frac{1}{2}$ ，..... 4 分

所以 $\cos B \cos C = -\frac{1}{8}$ ，..... 5 分

所以 $\tan B \tan C = \frac{\sin B \sin C}{\cos B \cos C} = \frac{\frac{3}{8}}{-\frac{1}{8}} = -3$ 6 分

(2) 由 (1) 知, $\sin B \sin C = \frac{3}{8}$, 且 $A = \frac{\pi}{3}$.

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R , 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}(2R \sin B)(2R \sin C) \sin A = 2R^2 \sin B \sin C \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\begin{cases} \frac{1}{2}bc \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 2R^2 \times \frac{3}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, 9 分

解得 $\begin{cases} bc = 6 \\ R = 2 \end{cases}$, 10 分

所以 $a = 2R \sin A = 2 \times 2 \times \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$ 11 分

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 12 分

得 $(2\sqrt{3})^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3}$, 所以 $12 = (b+c)^2 - 3bc$,

所以 $(b+c)^2 = 12 + 3 \times 6 = 30$, 14 分

解得 $b+c = \sqrt{30}$ 15 分

【解法二】(1) 略, 同解法一.

(2) 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 且 $A = \frac{\pi}{3}$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 解得 $bc = 6$ 9 分

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 所以 $\sin B = \frac{b}{a} \cdot \sin A = \frac{b}{a} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}b}{2a}$, 10 分

又 $\sin B = \frac{\sqrt{3}a}{4c}$, 所以 $\frac{\sqrt{3}a}{4c} = \frac{\sqrt{3}b}{2a}$, 所以 $a^2 = 2bc = 2 \times 6 = 12$,

所以 $a = 2\sqrt{3}$ 11 分

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 12 分

得 $(2\sqrt{3})^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3}$, 所以 $12 = (b+c)^2 - 3bc$,

所以 $(b+c)^2 = 12 + 3 \times 6 = 30$, 14 分

解得 $b+c=\sqrt{30}$ 15 分

【解法三】(1) 略, 同解法一.

(2) 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 且 $A=\frac{\pi}{3}$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 解得 $bc=6$, 9 分

又因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}(b\sin A)(c\sin A)=\frac{1}{\sqrt{3}}(a\sin B)(a\sin C)$
 $=\frac{a^2}{\sqrt{3}}\sin B\sin C=\frac{a^2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{8}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 10 分

所以 $a^2=12$, 所以 $a=2\sqrt{3}$ 11 分

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 12 分

得 $(2\sqrt{3})^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}$, 所以 $12=(b+c)^2-3bc$,

所以 $(b+c)^2=12+3\times 6=30$, 14 分

解得 $b+c=\sqrt{30}$ 15 分

18. 【考查意图】本小题主要考查随机变量及其分布列、数字特征、全概率公式、条件概率等基础知识, 考查逻辑推理能力、运算求解能力等, 考查化归与转化思想、概率思想等, 考查逻辑推理、数学运算、数学建模等核心素养, 体现基础性、综合性、应用性. 满分 17 分.

【解析】设事件 A_i , B_i ($i=1,2,3,4,5$) 分别为甲队、乙队第 i 名队员罚进点球, 则

$P(A_1)=P(A_2)=\frac{3}{4}$, $P(A_3)=P(A_4)=\frac{2}{3}$, $P(A_5)=\frac{1}{2}$, $P(B_i)=\frac{2}{3}$ 2 分

(1) 设事件 M = “乙队在前两轮中恰好罚进一个点球”,

则 $P(M)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$ 5 分

(2) (i) 由题意可知, 在 3:3 后甲队在第五轮时罚进点球就提前获胜, 即第 4 轮甲队罚进乙队罚失, 第 5 轮甲队罚进. 7 分

记所求事件为 N , 因为 $A_4, \overline{B_4}, A_5$ 相互独立,

所以 $P(N)=P(A_4\overline{B_4}A_5)=P(A_4)\cdot P(\overline{B_4})\cdot P(A_5)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{9}$ 10 分

(ii) X 的可能取值为 4, 5. 11 分

设 W = “已知两队未进入第六轮 ‘Sudden Death’ 阶段, 且甲队获胜”, F_4 = “比赛中甲

队罚进点球的个数为 4 ”， $F_5 =$ “比赛中甲队罚进点球的个数为 5 ”，则

$W = F_4W \cup F_5W$ ， F_4W, F_5W 互斥，且 $A_4, \overline{A_4}, B_4, \overline{B_4}, A_5, \overline{A_5}, B_5, \overline{B_5}$ 相互独立，

$$\begin{aligned} \text{因为 } P(F_4W) &= P(A_4\overline{B_4}\overline{A_5}\overline{B_5}) + P(\overline{A_4}\overline{B_4}A_5\overline{B_5}) \\ &= P(A_4)P(\overline{B_4})P(\overline{A_5})P(\overline{B_5}) + P(\overline{A_4})P(\overline{B_4})P(A_5)P(\overline{B_5}) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{54} = \frac{1}{18}, \end{aligned}$$

由 (i) 知， $P(N) = \frac{1}{9}$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以 } P(F_5W) &= P(A_4B_4A_5\overline{B_5}) + P(N) = P(A_4)P(B_4)P(A_5)P(\overline{B_5}) + P(N) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{10}{54} = \frac{5}{27}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } P(W) = P(F_4W) + P(F_5W) = \frac{1}{18} + \frac{5}{27} = \frac{13}{54}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\text{因此 } P(F_4|W) = \frac{P(F_4W)}{P(W)} = \frac{3}{13}, \quad P(F_5|W) = \frac{P(F_5W)}{P(W)} = \frac{10}{13}, \quad \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

则 X 的分布列为

X	4	5
P	$\frac{3}{13}$	$\frac{10}{13}$

$$\text{故 } E(X) = 4 \times \frac{3}{13} + 5 \times \frac{10}{13} = \frac{62}{13}. \quad \dots\dots\dots 17 \text{ 分}$$

19. 【考查意图】本小题主要考查函数单调性与奇偶性、函数与方程、导数与不等式等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力和创新能力等，考查函数与方程思想、化归与转化思想等，考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性和创新性。满分 17 分。

【解法一】(1) 依题意得，当 x 为有理数时，则 $2x$ 也为有理数，故 $D(x) = 1$ ， $D(2x) = 1$ ，所以 $D(2x) = D(x)$ ；

当 x 为无理数时，则 $2x$ 也为无理数，故 $D(x) = 0$ ， $D(2x) = 0$ ，

所以 $D(2x) = D(x)$ ； $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

故 $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $f(2x) = 2x \cdot D(2x) = 2x \cdot D(x) = 2f(x)$ ，

所以 $f(x)$ 是 2-拓展函数。 $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) (i) 证明： $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $\exists n \in \mathbf{N}^*$ ，使得 $\frac{x}{2^n} \in (-1, 1)$

因为 $f(x)$ 为 2-拓展函数, 所以 $f(2x) = 2f(x)$,

则 $f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$, $f\left(\frac{x}{2}\right) = 2f\left(\frac{x}{2^2}\right)$, ...

则 $f(x) = 2^2 f\left(\frac{x}{2^2}\right) = \cdots = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$,

所以 $g(x) = f'(x) = 2^n f'\left(\frac{x}{2^n}\right) \cdot \frac{1}{2^n} = f'\left(\frac{x}{2^n}\right) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$, 6 分

所以 $g'(x) = \frac{1}{2^n} g'\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

因为当 $x \in (-1, 1)$ 时, $g'(x) \geq 0$, 且 $\frac{x}{2^n} \in (-1, 1)$,

所以 $g'\left(\frac{x}{2^n}\right) \geq 0$, 所以 $\forall x \in \mathbf{R}$, $g'(x) \geq 0$ 8 分

(ii) 证明: 因为 $f(0) = 0$, 所以当 $x = 0$ 时, $f(x) = x$ 9 分

当 $0 < a < 1$ 时, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\exists n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $a^n x \in (-1, 1)$,

因为 $f(ax) = af(x)$, 所以 $f(x) = \frac{1}{a} f(ax)$, $f(ax) = \frac{1}{a} f(a^2 x)$, ...

所以 $f(x) = \frac{1}{a} f(ax) = \frac{1}{a^2} f(a^2 x) = \cdots = \frac{1}{a^n} f(a^n x)$,

所以 $g(x) = f'(x) = \frac{1}{a^n} \cdot f'(a^n x) \cdot a^n = f'(a^n x) = g(a^n x)$,

所以 $g'(x) = a^n g'(a^n x)$. 因为当 $x \in (-1, 1)$ 时, $g'(x) \geq 0$, 且 $a^n x \in (-1, 1)$,

所以 $g'(a^n x) \geq 0$, 所以 $g'(x) \geq 0$.

同理可证当 $a > 1$ 时, $g'(x) \geq 0$ 11 分

设 $h(x) = \frac{f(x)}{x} (x > 0)$, 则 $h(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$,

设 $p(x) = xf'(x) - f(x) (x \geq 0)$, 则 $p'(x) = f'(x) + x[f'(x)]' - f'(x) = xg'(x) \geq 0$,

则 $p(x) \geq p(0) = -f(0) = 0$, 所以 $h'(x) \geq 0$,

则 $\forall x_1 > 0, x_2 > 0$ 且 $x_1 < x_2$, $h(x_1) \leq h(x_2)$. (*) 13 分

因为 $f(1) = 1$, 且 $f(x)$ 为 a -拓展函数,

所以 $h(a) = \frac{f(a)}{a} = \frac{af(1)}{a} = \frac{f(1)}{1} = 1 = h(1)$, $h(a^2) = \frac{f(a^2)}{a^2} = \frac{af(a)}{a^2} = \frac{f(a)}{a} = h(a)$, ...

则 $h(1) = h(a) = h(a^2) = \cdots = h(a^n) = 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 14 分

同理 $h\left(\frac{1}{a^n}\right) = 1$ 15 分

不妨设 $a > 1$, $\forall x > 0$, $\exists n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $x \in \left(\frac{1}{a^n}, a^n\right)$, 由 (*) 得 $h\left(\frac{1}{a^n}\right) \leq h(x) \leq h(a^n)$,

故 $h(x)=1$, $f(x)=x$ 16 分

同理, $x<0$ 时, $f(x)=x$.

综上, $f(x)=x$ 17 分

【解法二】证明: 因为 $f(0)=0$, 所以当 $x=0$ 时, $f(x)=x$ 9 分

当 $0<a<1$ 时, $\forall x\in\mathbf{R}$, $\exists n\in\mathbf{N}^*$, 使得 $a^n x\in(-1,1)$,

因为 $f(ax)=af(x)$, 所以 $f(x)=\frac{1}{a}f(ax)$, $f(ax)=\frac{1}{a}f(a^2x)$, ..., $f(a^{n-1}x)=\frac{1}{a}f(a^n x)$,

所以 $f(x)=\frac{1}{a}f(ax)=\frac{1}{a^2}f(a^2x)=\cdots=\frac{1}{a^n}f(a^n x)$,

所以 $g(x)=f'(x)=\frac{1}{a^n}\cdot f'(a^n x)\cdot a^n=f'(a^n x)=g(a^n x)$,

所以 $g'(x)=a^n g'(a^n x)$, 因为当 $x\in(-1,1)$ 时, $g'(x)\geq 0$, 且 $a^n x\in(-1,1)$,

所以 $g'(a^n x)\geq 0$, 所以 $g'(x)\geq 0$.

同理可证, 当 $a>1$ 时, $g'(x)\geq 0$ 11 分

设 $h(x)=f(x)-x(x\in\mathbf{R})$, $h'(x)=f'(x)-1=g(x)-1$,

设 $p(x)=h'(x)(x\in\mathbf{R})$, 则 $p'(x)=g'(x)\geq 0$,

则 $\forall x_1, x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1<x_2$, $h'(x_1)\leq h'(x_2)$ (*) 13 分

因为 $h(ax)=f(ax)-ax=af(x)-ax=a(f(x)-x)=ah(x)$,

所以 $h(x)=\frac{1}{a}h(ax)$, $h(ax)=\frac{1}{a}h(a^2x)$, ..., $h(a^{n-1}x)=\frac{1}{a}h(a^n x)$,

则 $h(x)=\frac{1}{a}h(ax)=\frac{1}{a^2}h(a^2x)=\cdots=\frac{1}{a^n}h(a^n x)(n\in\mathbf{N}^*)$,

则 $h'(x)=\frac{1}{a^n}h'(a^n x)\cdot a^n=h'(a^n x)$, 同理 $h'(x)=h'\left(\frac{x}{a^n}\right)$ 15 分

不妨设 $a>1$, $\forall x_1, x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$, $\exists n\in\mathbf{N}^*$, 使得 $\frac{x_2}{a^n}<x_1<a^n x_2$,

由 (*) 得 $h'(x_2)=h'\left(\frac{x_2}{a^n}\right)\leq h'(x_1)\leq h'(a^n x_2)=h'(x_2)$,

则 $\forall x_1>0$, $h'(x_1)$ 是常数 k , 又因为 $h(0)=f(0)-0=0$, 则可设 $h(x)=kx(x\geq 0)$.

因为 $f(1)=1$, 所以 $h(1)=f(1)-1=0$. 而 $h(1)=k$, 故 $k=0$.

故 $h(x)=f(x)-x=0$, 所以 $f(x)=x$ 16 分

同理, $x<0$ 时, $f(x)=x$.

综上, $f(x)=x$ 17 分