莆田市2025届高中毕业班第四次教学质量检测试卷

数　学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{0,1,2,3,4,8\}$，$B=\{x|x-2\in A\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{2,3,4\}$　　B. $\{1,2,3,4\}$

C. $\{3,4\}$　　D. $\{4\}$

2. 小明所在的学校每周都要进行数学周测，他将近8周的周测成绩统计如下：112，101，93，99，106，105，114，119，则这组数据的第25百分位数是

A. 99　　B. 100　　C. 101　　D. 113

3. 已知 $z+\bar{z}=4$，$z-\bar{z}=2\mathrm{i}$，则 $\frac{z}{1+\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{3}$，且 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

5. 沙漏也叫做沙钟，是一种测量时间的装置. 现有一个沙漏（如图）上方装有 a cm^3 的细沙，细沙从中间小孔由上方慢慢漏下，经过 t 分钟时剩余的细沙量为 y cm^3，且 $y=a\cdot \mathrm{e}^{-bt}$（$b$ 为常数），经过16分钟时，上方还剩下一半细沙，要使上方细沙是开始时的 $\frac{1}{4}$，需经过的时间为

A. 24分钟　　B. 28分钟

C. 32分钟　　D. 36分钟

6. 已知某圆台下底面半径为2，高与上底面半径均为1，则该圆台外接球的表面积是

A. 12π　　B. 16π　　C. 20π　　D. 24π

7. 已知 $\alpha\in(0,\pi)$，$2\sin\alpha+\cos\alpha=1$，则$\dfrac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}=$

A. 3　　B. -3　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $-\dfrac{1}{3}$

8. 已知函数 $f(x)=e^x$，$g(x)=-x^2-mx$，若对区间$[0,1]$内任意两个实数 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|>|g(x_1)-g(x_2)|$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是

A. $[-1,2-2\ln 2]$　　B. $[-e^2-4,1]$

C. $[-1,e-2]$　　D. $[-1,1]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，点 $A(1,3)$，P 为 C 上的动点，则

A. 满足$|PA|=|PF|$的点 P 恰有两个

B. 满足$\triangle PAF$面积为$\dfrac{3}{2}$的点 P 恰有三个

C. $|PA|+|PF|$的最小值为 3

D. $|PA|-|PF|$的最小值为-2

10. 某校教研会上，共有 3 位统考科目（语文、数学、外语）教师，2 位首选科目（物理、历史）教师，4 位再选科目（化学、生物、政治、地理）教师进行发言，现用抽签的方式决定发言顺序，用事件 $A_i,B_i,C_i(1\leqslant i\leqslant 9,i\in\mathbf{N})$分别表示第 i 位发言的是统考科目教师、首选科目教师、再选科目教师，则

A. $P(B_2)=\dfrac{2}{9}$　　B. $P(A_1B_2)=\dfrac{1}{6}$

C. $P(C_9|B_2)=\dfrac{1}{2}$　　D. $P(C_2+C_3)=\dfrac{13}{18}$

11. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$是偶函数，且 $f(2)=4$，$f(x)+f(-2-x)=4$，若$\sum\limits_{k=1}^{4\,049}f\left(\dfrac{k}{2\,025}\right)=4\,049(a+b)$，其中 $b>0$，则

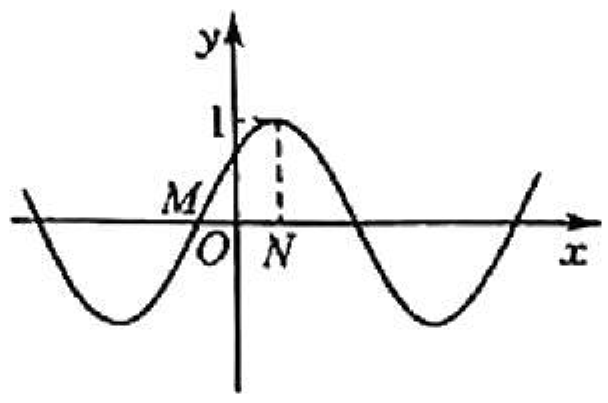
A. $f(1)=2$　　B. $\sum\limits_{i=1}^{2\,025}f(i)=4\,048$

C. $a+b=2$　　D. $\dfrac{1}{2|a|}+\dfrac{|a|}{b}$的最小值为$\dfrac{3}{4}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 与双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ 有共同的渐近线，且过点$(2,2)$的双曲线方程是__________.

13. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,0<\omega<10,-\pi<\varphi<\pi)$的部分图象如图所示，$|OM|=|ON|$且 $f\left(\dfrac{\pi}{24}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $f(x)=$________.



14. 从 $1,2,\cdots,2\,024$ 中任取两数 a,b（可以相同），则 7^a+8^b 的个位是 7 的概率为________.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.(本小题满分 13 分)

记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,$a^2+b^2-c^2=-15$,$\triangle ABC$的面积为$\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

(1)求C的大小;

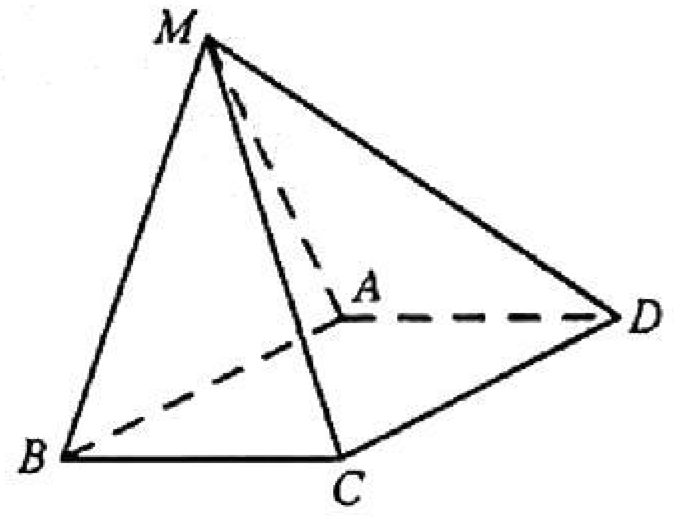
(2)若$\triangle ABC$外接圆的面积为$\frac{49\pi}{3}$,求$\triangle ABC$的周长.

16.(本小题满分 15 分)

如图,在四棱锥$M-ABCD$中,底面$ABCD$是菱形,$\angle BAD=\angle MAD=\frac{2\pi}{3}$,$AD=AM=2$,$MC=\sqrt{10}$.

(1)求证:平面$MAD\perp$平面$ABCD$;

(2)求平面MAB与平面MCD夹角的正弦值.



17.(本小题满分 15 分)

已知椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,左、右焦点分别为$F_1$,$F_2$,点$M(1,0)$满足$(2\sqrt{3}-1)\overrightarrow{MF_1}=(2\sqrt{3}+1)\overrightarrow{F_2M}$.

(1)求C的方程;

(2)过点M的直线l交C于P,Q两点,过P作垂直于x轴的直线交C于点R(异于点P,Q),求$\triangle MQR$面积的最大值.

18.(本小题满分 17 分)

已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x}-a$.

(1)当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2)若 $a>0$,函数 $g(x)=x^2f(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$.

(ⅰ)求实数 a 的取值范围;

(ⅱ)当 x_1,x_2 满足 $|\ln x_1-\ln x_2|\geqslant\ln 2$ 时,求实数 a 的最大值.

19.(本小题满分 17 分)

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足:对于 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,$\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=A$,其中 A 为常数,则称数列 $\{a_n\}$ 为"A 数列".

(1)若等比数列 $\{b_n\}$ 为"A 数列",求 $\{b_n\}$ 的公比 q;

(2)若数列 $\{a_n\}$ 为"A 数列",且 $a_1=1,A=1$.

(ⅰ)求证:$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}<\frac{7}{4}$;

(ⅱ)若 $c_n^2=\sqrt{a_n}$,且 $\{c_n\}$ 是正项数列,$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i}$,求满足不等式 $2\sqrt{an+b}-2<S_n\leqslant 2\sqrt{cn}-1$($a$,$b,c,n\in\mathbf{N}^*$)的 abc 的最小值.

莆田市 2025 届高中毕业班第四次教学质量检测试卷·数学

参考答案、提示及评分细则

1. A　因为 $A=\{0,1,2,3,4,8\}$，所以 $B=\{x\mid x-2\in A\}=\{2,3,4,5,6,10\}$，所以 $A\cap B=\{2,3,4\}$. 故选 A.

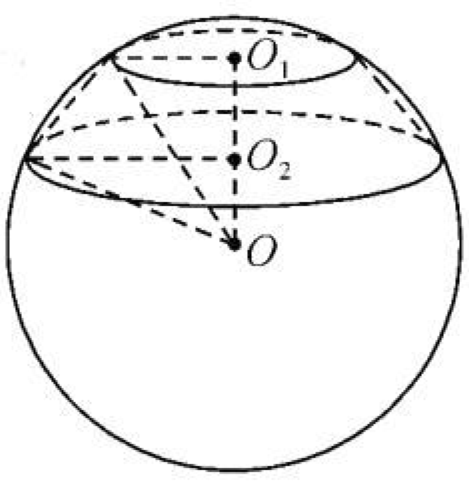
2. B　这组数据从小到大排列为 93，99，101，105，106，112，114，119，因为 $8\times25\%=2$，所以这组数据的第 25 百分位数是第 2 个数与第 3 个数的平均数，即 $\dfrac{99+101}{2}=100$. 故选 B.

3. D　因为 $\begin{cases}z+\bar{z}=4,\\ z-\bar{z}=2\mathrm{i},\end{cases}$ 所以 $z=2+\mathrm{i}$，所以 $\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，在复平面内对应的点为 $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，位于第四象限. 故选 D.

4. D　依题意，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{6}\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{6}|\boldsymbol{b}|^2=-\dfrac{9}{2}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-\frac{9}{2}}{1\times3\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{5\pi}{6}$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{5\pi}{6}$. 故选 D.

5. C　依题意有 $a\mathrm{e}^{-16b}=\dfrac{1}{2}a$，即 $\mathrm{e}^{-16b}=\dfrac{1}{2}$，两边取对数得 $-16b=\ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2$，所以 $b=\dfrac{\ln 2}{16}$，得到 $y=a\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{16}t}$，当容器上方细沙只有开始时的 $\dfrac{1}{4}$ 时，则有 $a\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{16}t}=\dfrac{1}{4}a$，所以 $\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{16}t}=\dfrac{1}{4}$，两边取对数得 $-\dfrac{\ln 2}{16}t=\ln\dfrac{1}{4}=-2\ln 2$，所以 $t=32$，即需要经过的时间为 32 分钟. 故选 C.

6. C　如图，设 O 为圆台外接球的球心，O_1，O_2 分别为上、下底面圆的圆心，R 为外接球半径，则 $R^2=1+(1+OO_2)^2=2^2+OO_2^2$，解得 $R^2=5$，表面积为 $S=4\pi R^2=20\pi$. 故选 C.



7. D　因为 $2\sin\alpha+\cos\alpha=1$，所以 $\cos\alpha=1-2\sin\alpha$，代入 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得 $5\sin^2\alpha-4\sin\alpha=0$，因为 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=1-2\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，所以 $\dfrac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=-\dfrac{1}{3}$. 故选 D.

8. A　假设 $x_1<x_2$，因为 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $|g(x_1)-g(x_2)|<f(x_2)-f(x_1)$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<g(x_1)-g(x_2)<f(x_2)-f(x_1)$，所以 $\begin{cases}f(x_1)-g(x_1)<f(x_2)-g(x_2),\\ f(x_1)+g(x_1)<f(x_2)+g(x_2),\end{cases}$ 令 $F(x)=f(x)-g(x)=\mathrm{e}^x+x^2+mx$，则 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 内单调递增，所以 $F'(x)=\mathrm{e}^x+2x+m\geqslant0$，因为 $F'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递增，所以 $F'(x)$ 的最小值为 $F'(0)=1+m$，故 $1+m\geqslant0$，即 $m\geqslant-1$；令 $G(x)=f(x)+g(x)=\mathrm{e}^x-x^2-mx$，则 $G(x)$ 在区间 $[0,1]$ 内单调递增，所以 $G'(x)=\mathrm{e}^x-2x-m\geqslant0$，所以 $m\leqslant\mathrm{e}^x-2x$，令 $h(x)=\mathrm{e}^x-2x$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-2$，所以 $h(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,1)$ 上单调递增，所以 $h(x)$ 的最小值为 $h(\ln 2)=2-2\ln 2$，即 $m\leqslant2-2\ln 2$. 综上所述，$-1\leqslant m\leqslant2-2\ln 2$. 故选 A.

9. BCD　满足 $|PA|=|PF|$ 的点 P 位于线段 AF 的垂直平分线上，其直线方程为 $y=\dfrac{3}{2}$，与 C 仅有一个交点，故 A 错误；设 P 到直线 AF 的距离为 d，$S_{\triangle PAF}=\dfrac{1}{2}|AF|\cdot d=\dfrac{3}{2}$，则 $d=1$，所以 P 在直线 $x=2$ 或 y 轴上，这样的点 P 有三个，故 B

正确；如图 1，点 A 在抛物线外，$|PF|+|PA|\geqslant|AF|$，故 $|PA|+|PF|$ 的最小值为 $|FA|=3$，故 C 正确；如图 2，过 A 作 x 轴平行线，与准线交于点 B，与抛物线交于点 P，根据抛物线定义，$|PB|=|PF|$，此时 $|PA|-|PF|$ 有最小值 $-|AB|=-2$，故 D 正确. 故选 BCD.

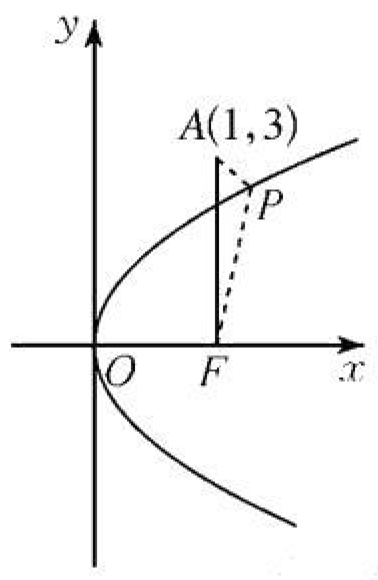


图 1

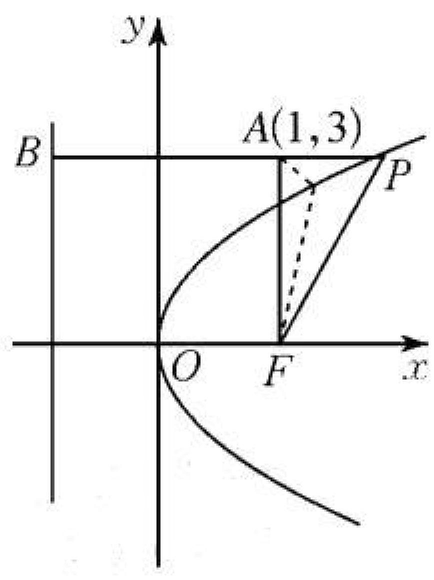


图 2

10. ACD　$P(B_2)=\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{2}{9}$ 或 $P(B_2)=\frac{C_2^1A_8^8}{A_9^9}=\frac{2}{9}$，A 正确；$P(A_1B_2)=\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{12}$，或 $P(A_1B_2)=\frac{C_3^1C_2^1A_7^7}{A_9^9}=\frac{1}{12}$，B 错误；$P(B_2C_9)=\frac{2}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{9}$ 或 $P(B_2C_9)=\frac{C_2^1C_4^1A_7^7}{A_9^9}=\frac{1}{9}$，所以 $P(C_9|B_2)=\frac{P(B_2C_9)}{P(B_2)}=\frac{1}{2}$，C 正确；因为 $P(C_2)=P(C_3)=\frac{4}{9}$，$P(C_2C_3)=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$，所以 $P(C_2+C_3)=P(C_2)+P(C_3)-P(C_2C_3)=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}-\frac{1}{6}=\frac{13}{18}$，D 正确. 故选 ACD.

11. ACD　在 $f(x)+f(-2-x)=4$ 中，令 $x=-1$，得 $2f(-1)=4$，即 $f(-1)=2$，又 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(1)=f(-1)=2$，故 A 正确；因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)=f(-x)$，又 $f(x)+f(-2-x)=4$，所以 $f(-x)+f(-2-x)=4$，即 $f(x)+f(x-2)=4$，所以 $f(x-2)+f(x-4)=4$，即 $f(x)=f(x-4)$，所以 4 是 $f(x)$ 的一个周期，又 $f(1)=2$，$f(2)=4$，$f(3)=f(-1)=2$，$f(4)+f(2)=4$，$f(4)=0$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{2\,025}f(i)=506[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)=4\,048+2=4\,050$，故 B 错误；因为 $f(x)+f(-2-x)=4$，所以 $f(x)$ 关于 $(-1,2)$ 中心对称，又 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)$ 关于 $(1,2)$ 中心对称，所以 $f(x)+f(2-x)=4$，即 $f\left(\frac{1}{2\,025}\right)+f\left(\frac{4\,049}{2\,025}\right)=4$，$f\left(\frac{2}{2\,025}\right)+f\left(\frac{4\,048}{2\,025}\right)=4$，…，$f\left(\frac{2\,024}{2\,025}\right)+f\left(\frac{2\,026}{2\,025}\right)=4$，$f\left(\frac{2\,025}{2\,025}\right)=f(1)=2$，令 $S=\sum\limits_{k=1}^{4\,049}f\left(\frac{k}{2\,025}\right)$，得 $2S=\left[f\left(\frac{1}{2\,025}\right)+f\left(\frac{4\,049}{2\,025}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2\,025}\right)+f\left(\frac{4\,048}{2\,025}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{4\,049}{2\,025}\right)+f\left(\frac{1}{2\,025}\right)\right]=4\times4\,049=16\,196$，即 $S=8\,098$，所以 $4\,049(a+b)=8\,098$，解得 $a+b=2$，故 C 正确；由 $a+b=2$，得 $a=2-b$，且 $b>0$，当 $a>0$ 时，$\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{b}=\frac{1}{2a}+\frac{2-b}{b}=\frac{1}{2a}+\frac{2}{b}-1=\left(\frac{1}{2a}+\frac{2}{b}\right)\cdot\frac{a+b}{2}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+\frac{b}{2a}+\frac{2a}{b}\right)-1\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+2\sqrt{\frac{b}{2a}\cdot\frac{2a}{b}}\right)-1=\frac{5}{4}$，当且仅当 $\frac{b}{2a}=\frac{2a}{b}$，即 $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{4}{3}$ 时等号成立；当 $a<0$ 时，$\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{b}=\frac{1}{-2a}+\frac{-a}{b}=\frac{1}{-2a}+\frac{b-2}{b}=\frac{1}{-2a}+\frac{-2}{b}+1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-2a}+\frac{-2}{b}\right)\cdot(a+b)+1=\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}+\frac{b}{-2a}+\frac{-2a}{b}\right)+1\geqslant\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}+2\sqrt{\frac{b}{-2a}\cdot\frac{-2a}{b}}\right)+1=\frac{3}{4}$，当且仅当 $\frac{b}{-2a}=\frac{-2a}{b}$，即 $a=-2$，$b=4$ 时等号成立，又 $\frac{3}{4}<\frac{5}{4}$，所以 $\frac{1}{2|a|}+\frac{|a|}{b}$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$，故 D 正确. 故选 ACD.

12. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{12}=1$　设所求双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=\lambda(\lambda\neq0)$，将点 $(2,2)$ 代入得 $\lambda=3$，所以所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{12}=1$.

13. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　令 $\omega x+\varphi=0$，得 $x_M=-\frac{\varphi}{\omega}$；令 $\omega x+\varphi=\frac{\pi}{2}$，得 $x_N=\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$，由 $|OM|=|ON|$，知 $-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}=0$，故 $\varphi=\frac{\pi}{4}$. 由图知 $A=1$，则 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$. 由 $f\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $\sin\left(\frac{\pi}{24}\omega+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $0<\omega<10$，所以 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{24}\omega+\frac{\pi}{4}<\frac{2\pi}{3}$，则 $\frac{\pi}{24}\omega+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$，解得 $\omega=2$，故 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

14. $\frac{3}{16}$　从 1，2，…，2 024 中任取两数 a，b(可以相同)，共有 $2\ 024\times2\ 024$ 种不同取法，因为 7^a 的个位数字随着 a 从 1 开始，依次是 7，9，3，1，7，…，周期变化，8^b 的个位数字随着 b 从 1 开始，则依次是 8，4，2，6，8，…，周期变化，故它们的周期均为 4，所以 1～2 024 中，共有 $4k+1$，$4k+2$，$4k+3$，$4k+4$（$0\leqslant k\leqslant505$，$k\in\mathbf{N}$）4 种数型，且每种数型的个数是相同的，都是 506 个. 又 7^a 和 8^b 的尾数中只有 $9+8$，$3+4$，$1+6$ 三种情形中个位数字是 7，即 $a=4k+2$，$b=4l+1$；$a=4k+3$，$b=4l+2$；$a=4k+4$，$b=4l+4$ 时，7^a+8^b 的个位数字是 7. 又 $0\leqslant k\leqslant505$，$k\in\mathbf{N}$；$0\leqslant l\leqslant505$，$l\in\mathbf{N}$，所以满足 7^a+8^b 的个位数字是 7 的取法有 $506\times506\times3$ 种取法，所以所求概率为 $\frac{506\times506\times3}{2\ 024\times2\ 024}=\frac{3}{16}$.

15. 解：(1)由余弦定理可知：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{15}{2ab}$. …… 1 分

又因为△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{15\sqrt{3}}{4}$，

所以 $\sin C=\frac{15\sqrt{3}}{2ab}$. …… 2 分

所以 $\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=-\frac{15\sqrt{3}}{2ab}\times\frac{2ab}{15}=-\sqrt{3}$. …… 3 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}$. …… 5 分

(2)设△ABC 外接圆的半径为 r，则 $\pi r^2=\frac{49\pi}{3}$，所以 $r=\frac{7}{\sqrt{3}}$. …… 7 分

由正弦定理，得 $2r=\frac{c}{\sin C}$，所以 $c=2r\sin C=2\times\frac{7}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$. …… 9 分

因为△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab=\frac{15\sqrt{3}}{4}$，所以 $ab=15$. …… 10 分

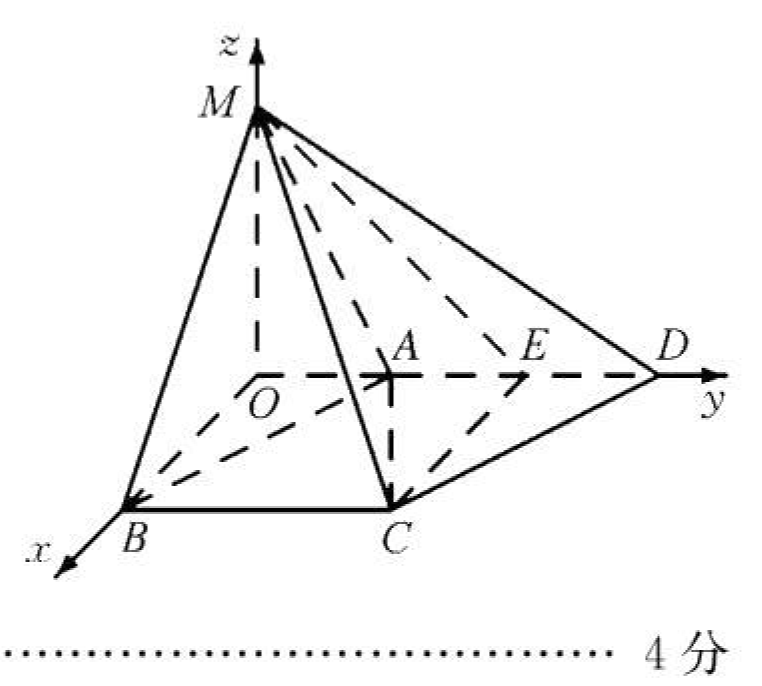
由余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2+ab$，

所以 $49=(a+b)^2-ab$，即 $(a+b)^2=49+ab=49+15=64$，

所以 $a+b=8$， …… 12 分

所以△ABC 的周长为 $a+b+c=8+7=15$. …… 13 分

16. (1)证明：如图，取 AD 的中点为 E，连接 CE，ME，AC.



因为底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$，$AD=2$，

所以 $\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，$CD=AD=2$，所以△ACD 是等边三角形，

又 E 为 AD 的中点，所以 $CE\perp AD$，且 $CE=\sqrt{3}$，$AE=1$. …… 2 分

在△MAE 中，$AE=1$，$AM=2$，$\angle MAE=\frac{2\pi}{3}$，由余弦定理，得 $ME=\sqrt{7}$，

又 $MC=\sqrt{10}$，所以 $MC^2=ME^2+CE^2$，即 $CE\perp ME$. …… 4 分

因为 $CE\perp AD$，$CE\perp ME$，$AD\cap ME=E$，AD，$ME\subset$平面 MAD，

所以 $CE\perp$ 平面 MAD，又 $CE\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $MAD\perp$ 平面 $ABCD$. …………………………………… 6分

(2)解：在平面 MAD 内，过 M 作 $MO\perp AD$，MO 与 DA 的延长线交于点 O，连接 OB.

在 $\triangle MAO$ 中，$MO\perp OA$，$AM=2$，$\angle MAO=\frac{\pi}{3}$，所以 $AO=1$，$MO=\sqrt{3}$.

在 $\triangle AOB$ 中，$OA=1$，$AB=2$，$\angle OAB=\frac{\pi}{3}$，由余弦定理，得 $OB=\sqrt{3}$，所以 $AB^2=OA^2+OB^2$，即 $OA\perp OB$.

因为平面 $MAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $MAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$MO\perp AD$，$MO\subset$ 平面 MAD，所以 $MO\perp$ 平面 $ABCD$，

又 $OB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $MO\perp OB$，即 OA,OB,OM 两两垂直. …………………………………… 8分

以 OB,OA,OM 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系如图所示，则 $A(0,1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(\sqrt{3},2,0)$，$D(0,3,0)$，$M(0,0,\sqrt{3})$.

所以 $\overrightarrow{AM}=(0,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{CM}=(-\sqrt{3},-2,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{3},1,0)$.

设平面 MAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-y_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ \sqrt{3}x_1-y_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$，则 $y_1=\sqrt{3}$，$z_1=1$，即平面 MAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},1)$. …………………………………… 10分

设平面 MCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_2-2y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ -\sqrt{3}x_2+y_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=1$，则 $y_2=\sqrt{3}$，$z_2=3$，即平面 MCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},3)$. …………………………………… 12分

设平面 MAB 与平面 MCD 的夹角为 θ，则 $|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{7}{\sqrt{5}\times\sqrt{13}}=\frac{7\sqrt{65}}{65}$， ………… 14分

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{49}{65}}=\frac{4\sqrt{65}}{65}$，即平面 MAB 与平面 MCD 夹角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{65}}{65}$. ………… 15分

17. 解：(1)设椭圆 C 的焦距为 $2c$，则 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，

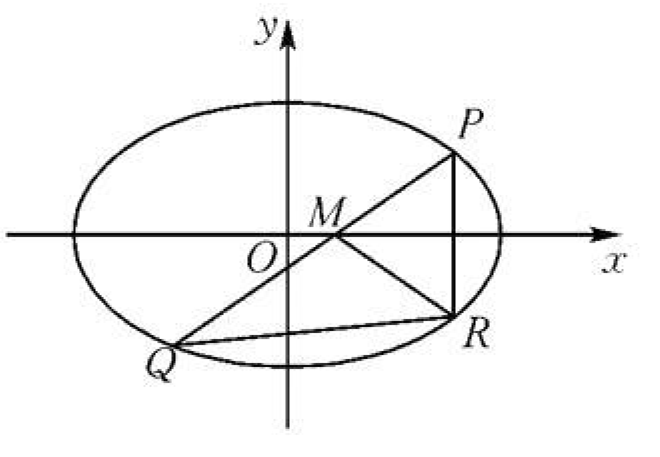
所以 $\overrightarrow{MF_1}=(-c-1,0)$，$\overrightarrow{F_2M}=(1-c,0)$，

由 $(2\sqrt{3}-1)\overrightarrow{MF_1}=(2\sqrt{3}+1)\overrightarrow{F_2M}$，得 $(2\sqrt{3}-1)(-c-1)=(2\sqrt{3}+1)(1-c)$. …………………………………… 2分

所以 $c=2\sqrt{3}$，又 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $a=4$， …………………………………… 4分

所以 $b^2=a^2-c^2=4$，故 C 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. …………………………………… 6分

(2)由题意知直线 l 的斜率不为 0，故设直线 l 的方程为 $x=my+1(m\neq 0)$. $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $R(x_1,-y_1)$， …………………………………… 7分



由 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 消去 x 并整理，得 $(m^2+4)y^2+2my-15=0$. …………………………………… 8分

所以 $\Delta=4m^2-4(m^2+4)\cdot(-15)=64m^2+240>0$，且 $y_1y_2=-\frac{15}{m^2+4}$.

…………………………………… 9分

又 $S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}|PR|\cdot|x_1-x_2|=\frac{1}{2}\times|2y_1|\times|x_1-x_2|=|y_1|\times|x_1-x_2|$，

$S_{\triangle PMR}=\frac{1}{2}|PR||1-x_1|=\frac{1}{2}\times|2y_1|\times|x_1-1|=|y_1|\times|x_1-1|$. …………………………………… 11分

易知 x_1-x_2 与 x_1-1 同号，所以 $S_{\triangle MQR}=S_{\triangle PQR}-S_{\triangle PMR}=|y_1|\times(|x_1-x_2|-|x_1-1|)$

$=|y_1|\times|(x_1-x_2)-(x_1-1)|=|y_1|\times|x_2-1|=|y_1|\times|my_2|=|my_1y_2|$ ………………………………… 12分

$=\frac{15|m|}{m^2+4}=\frac{15}{|m|+\frac{4}{|m|}}\leqslant\frac{15}{2\sqrt{|m|\times\frac{4}{|m|}}}=\frac{15}{4}$,……………………………………………………………… 14分

当且仅当$|m|=\frac{4}{|m|}$,即$m=\pm2$时等号成立,

所以$\triangle MQR$面积的最大值为$\frac{15}{4}$. ………………………………………………………………………… 15分

18. 解:(1)当$a=1$时,$f(1)=-3$,……………………………………………………………………………… 1分

$f'(x)=\frac{3-\ln x}{x^2}$,则$f'(1)=3-\ln 1=3$,…………………………………………………………………… 2分

所以曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y+3=3(x-1)$,即$3x-y-6=0$. ……………………… 3分

(2)(ⅰ)$g(x)=x^2f(x)=x\ln x-2x-ax^2$,则$g'(x)=\ln x-2ax-1$, ………………………………………… 4分

因为函数$g(x)$有两个不同的极值点x_1,x_2,所以x_1,x_2是$g'(x)$的零点,

由$\ln x-2ax-1=0$,得$2a=\frac{\ln x-1}{x}$. ………………………………………………………………………… 5分

设$h(x)=\frac{\ln x-1}{x}$,则$h'(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$,

令$h'(x)>0$,得$0<x<e^2$;令$h'(x)<0$,得$x>e^2$,

所以$h(x)$在区间$(0,e^2)$上单调递增,在区间$(e^2,+\infty)$上单调递减,

所以$h(x)_{\max}=h(e^2)=\frac{1}{e^2}$. ………………………………………………………………………………… 7分

当$x=e$时,$h(e)=0$,当$x>e^2$时,$h(x)>0$,

结合$h(x)$的图象的变化趋势可知,$0<2a<\frac{1}{e^2}$,所以$0<a<\frac{1}{2e^2}$,

故实数a的取值范围为$\left(0,\frac{1}{2e^2}\right)$. ……………………………………………………………………… 9分

(ⅱ)由条件可知,$\ln x_1-2ax_1-1=0$,$\ln x_2-2ax_2-1=0$,

则$2a=\frac{\ln x_1-1}{x_1}=\frac{\ln x_2-1}{x_2}$,且$e<x_1<e^2<x_2$. ……………………………………………………… 10分

不妨令$t=\frac{x_2}{x_1}(t>1)$,将$x_2=tx_1$代入$\frac{\ln x_1-1}{x_1}=\frac{\ln x_2-1}{x_2}$中,

得$t(\ln x_1-1)=\ln t+\ln x_1-1$,则$\ln x_1-1=\frac{\ln t}{t-1}$. ………………………………………………… 11分

设$m(t)=\frac{\ln t}{t-1}$,$t>1$,则$m'(t)=\frac{t-1-t\ln t}{t(t-1)^2}$, ………………………………………………… 12分

令$\varphi(t)=t-1-t\ln t(t>1)$,则$\varphi'(t)=-\ln t<0$,所以$\varphi(t)$在$(1,+\infty)$上单调递减,

则$\varphi(t)<\varphi(1)=0$,即$m'(t)<0$,所以$m(t)$在$(1,+\infty)$上单调递减. ……………………………… 13分

由$|\ln x_1-\ln x_2|\geqslant\ln 2$得,$\ln\frac{x_2}{x_1}\geqslant\ln 2$,所以$t\geqslant2$, ………………………………………… 14分

因此$m(t)$在区间$[2,+\infty)$上单调递减,即$m(t)\leqslant m(2)=\ln 2$,

于是$\ln x_1-1\leqslant\ln 2$,所以$x_1\leqslant2e$,则$x_1\in(e,2e]$, ………………………………………………… 15分

又$2a=\frac{\ln x_1-1}{x_1}$,令$v(x)=\frac{\ln x-1}{x}$,由(ⅰ)可知,$v(x)$在区间$(e,2e]$上单调递增,………………… 16分

所以$v(x)_{\max}=v(2e)=\frac{\ln 2}{2e}$,则$0<2a\leqslant\frac{\ln 2}{2e}$,解得$0<a\leqslant\frac{\ln 2}{4e}$,

故实数 a 的最大值为$\frac{\ln 2}{4e}$. …………………………………………………………………… 17分

19.(1)解:若数列$\{b_n\}$是等比数列,则 $b_n=b_1q^{n-1}$,$\sqrt{b_n}=\sqrt{b_1q^{n-1}}$,

则 $\sqrt{b_{n+1}}-\sqrt{b_n}=\sqrt{b_1q^n}-\sqrt{b_1q^{n-1}}=\sqrt{b_1q^{n-1}}(\sqrt{q}-1)=A$, …………………………………… 2分

因为 A 为常数,所以$\sqrt{q}-1=0$,即 $q=1$. …………………………………………………………… 4分

(2)(ⅰ)证明:因为$\{a_n\}$为"A 数列",且 $a_1=1$,$A=1$,

所以 $\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=1$,所以$\{\sqrt{a_n}\}$是首项为1,公差为1的等差数列,$\sqrt{a_n}=1+(n-1)=n$,所以 $a_n=n^2$,

……… 6分

所以$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n^2}$,$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}$,

当 $n=1$ 时,$\sum\limits_{i=1}^{1}\frac{1}{a_i}=1<\frac{7}{4}$,

当 $n=2$ 时,$\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{1}{a_i}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}<\frac{7}{4}$,

当 $n\geqslant 3$ 时,$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$, …………………………………………………… 8分

$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{7}{4}-\frac{1}{n}<\frac{7}{4}$,

所以$\forall n\in\mathbf{N}^*$,$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}<\frac{7}{4}$. …………………………………………………………………… 9分

(ⅱ)解:由(ⅰ)可知 $c_n^2=n$,又$\{c_n\}$为正项数列,所以 $c_n=\sqrt{n}$,

$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}$, …………………………………… 10分

不等式 $S_n>2\sqrt{an+b}-2$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,即$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{an+b}-1)$,

当 $n=1$ 时,$1>2(\sqrt{a+b}-1)$,解得 $a+b<\frac{9}{4}$,又 $a,b\in\mathbf{N}^*$,所以 $a=b=1$, ………………………… 12分

$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}>\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

$S_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]=2(\sqrt{n+1}-1)$,

所以当 $a=b=1$ 时,不等式 $S_n>2(\sqrt{n+1}-1)=2\sqrt{an+b}-2$ 成立. …………………………………… 13分

当 $n=1$ 时,$2\sqrt{c}-1\geqslant 1$,解得 $c\geqslant 1$;

当 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$,

所以 $S_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 1+2(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=2\sqrt{n}-1$,

所以当 $c\geqslant 1$ 时,不等式 $S_n\leqslant 2\sqrt{n}-1\leqslant 2\sqrt{cn}-1$ 成立,

所以 $c_{\min}=1$. …………………………………………………………………………………… 16分

综上,$(abc)_{\min}=1$. ………………………………………………………………………………… 17分