

厦门市 2026 届高中毕业班模拟测试

数 学 试 题

2026.1

本试卷共 4 页，考试时间 120 分钟，总分 150 分。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的学校，班级和姓名填在答题卡上，正确粘贴条形码。
2. 作答选择题时，用 2B 铅笔在答题卡上将对应答案的选项涂黑。
3. 非选择题的答案必须写在答题卡各题目的指定区域内相应位置上，不准使用铅笔和涂改液。
4. 考试结束后，考生上交答题卡。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \mid \log_2 x \leq 1\}$, $B = \{x \mid (x+3)(x-1) < 0\}$, 则 $A \cup B =$
 A. $(-3, 2]$ B. $(-3, 1)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, 2]$
2. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 - a_1 = 1$, $a_5 - a_4 = 8$, 则 $a_3 =$
 A. -4 B. -2 C. 2 D. 4
3. 已知 a, b 均为单位向量, 若 $a \perp (a+2b)$, 则 a 与 b 的夹角为
 A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{4}$
4. 若复数 z 满足 $|z| = |z-2| = 1$, 则 z 的虚部为
 A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
5. 将一个表面积为 S 的铁球熔化后重新浇铸成两个小球(熔化的铁水无损耗, 无残留), 则这两个小球的表面积之和可能是
 A. $0.9S$ B. S C. $1.1S$ D. $2S$
6. 已知随机变量 X, Y 满足 $X+Y=1$, 若 $X \sim N(0, \sigma^2)$, 且 $P(|Y| < 1) = 0.2$, 则 $P(|Y-1| < 2) =$
 A. 0.2 B. 0.4 C. 0.6 D. 0.8

7. 若函数 $f(x)=(x+2)^6-ax^3-bx^3-cx$ 是偶函数, 则 $b=$

- A. 0 B. 20 C. 120 D. 160

8. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的中心为 O , 右顶点为 A , 若 C 上存在一点 P 满足 $PO \perp PA$,

则 C 的离心率的取值范围是

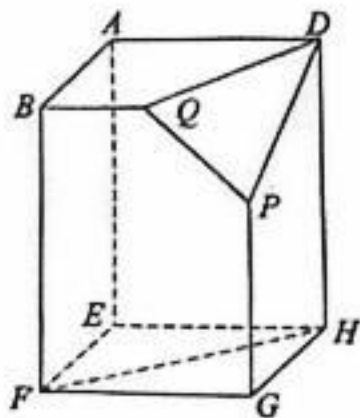
- A. $(\frac{1}{2}, 1)$ B. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ C. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ D. $(\frac{\sqrt{6}}{3}, 1)$

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知一组样本数据为 80, 81, 83, 85, 86, 89, 则

- A. 若剔除 80, 则样本的极差变小 B. 若剔除 80, 则样本的平均数变小
C. 若剔除 83, 则样本的中位数变大 D. 若剔除 89, 则样本的方差变小

10. 如图, 某石凳可以看作是正四棱柱截去一个三棱锥得到的几何体, 已知 $AB=AD=2$, $AE=3$, $BQ=1$, $PG=2$, 则



- A. 该几何体的体积为 11
B. 直线 PQ 与 EH 所成的角为 45°
C. $FH \perp PQ$
D. 点 G 到平面 DPQ 的距离是点 B 到平面 DPQ 的距离的 2 倍
11. 已知函数 $f(x) = \sin^3 \omega x + \cos^3 \omega x$, $\omega > 0$, 则
- A. $f(x) = f(x + \frac{2\pi}{\omega})$
B. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点
C. $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$
D. 若存在 $t \in \mathbb{R}$, 使得 $\{f(x) \mid t \leq x \leq t+1\} = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, 则 ω 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{2-m} = 1$ 的两条渐近线互相垂直, 则 $m = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

13. 已知 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sin 2\theta$, 则 $\cos 2\theta =$ ▲.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1, a_2=2, a_n(a_{n+1}-a_{n-1})=2(n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $a_{25}a_{26} =$ ▲; 记数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{25} \geq m$, 则正整数 m 的最大值为 ▲.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

为调研某地民众对于“未来低空出行”的了解情况, 用简单随机抽样的方法, 从该地调查了 300 位市民, 统计得到如下列联表:

	了解	不了解	合计
女	90	60	150
男	110	40	150
合计	200	100	300

(1) 根据小概率值 $\alpha=0.010$ 的独立性检验, 分析对“未来低空出行”了解情况是否与性别有关;

(2) 在“不了解‘未来低空出行’”的 100 位市民中, 按性别进行分层, 用分层随机抽样的方法抽取 5 人, 再从这 5 人中随机选取 3 人去智能飞行器中心实地参观, 设 X 为女性市民的人数, 求 X 的分布列与期望.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

α	0.050	0.010	0.001
χ_{α}	3.841	6.635	10.828

16. (15 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $3c \cos B = 3a - b \sin C$.

(1) 求 $\tan C$;

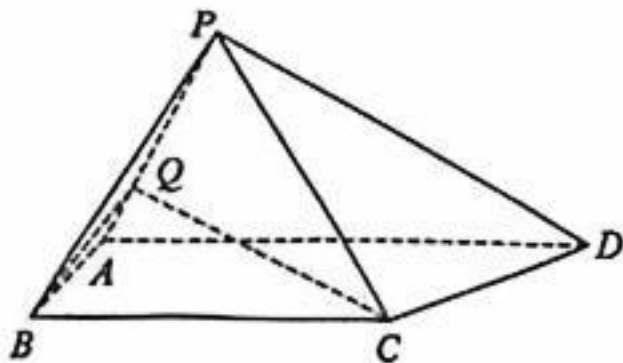
(2) 若 D 在边 AB 上, 且 $CD=b, BD=1, \tan \angle DCB = \frac{1}{3}$, 求 b .

17. (15分)

如图,四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是直角梯形, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $BC=3$, $AD=4$, $\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AP}$, $0 < \lambda < 1$.

(1) 当 $\lambda = \frac{1}{4}$ 时, 证明: $BQ \parallel$ 平面 PCD ;

(2) 已知平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=CD=2$, $PD=2\sqrt{3}$, 平面 QAB 与平面 QBC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 求 $\triangle QBC$ 的面积.



18. (17分)

设函数 $f(x) = x \ln(a-x)$, $a > 0$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 证明: $f(x)$ 存在唯一极大值点;

(3) 记 $f(x)$ 的极大值点为 x_0 , 若存在 a , 使得 $f(x_0) \leq a+b$, 求 b 的取值范围.

19. (17分)

已知抛物线 $E: y^2 = 2x$, $D_1(1, 0)$, $k_1=1$, λ 为常数, $\lambda > 1$. 按照如下方式依次构造点 D_n ($n=2, 3, \dots$): 过 D_{n-1} 作斜率为 k_{n-1} ($k_{n-1} > 0$) 的直线交 E 于 A_{n-1}, B_{n-1} 两点, 使得 $|D_{n-1}A_{n-1}| = \lambda |D_{n-1}B_{n-1}|$, 令 D_n 为线段 $A_{n-1}B_{n-1}$ 的垂直平分线与 x 轴的交点, 记 D_n 的坐标为 $(x_n, 0)$.

(1) 求 λ ;

(2) 证明: $x_n k_n^2 = 1$;

(3) 设 S_n 为 $\triangle A_n B_n D_{n+1}$ 的面积, 证明: $\sum_{i=1}^n \frac{S_{i+1}}{S_i} < \sqrt{2}(2n+1)$.

2026 届高中毕业班模拟测试

数学试题参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	D	C	B	C	B	D	B	ACD	BD	ACD

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 答案：A

解析：易知 $A = (0, 2]$ ， $B = (-3, 1)$ ，所以 $A \cup B = (-3, 2]$ 。故选 A。

2. 答案：D

解析： $\frac{a_5 - a_4}{a_2 - a_1} = q^3 = 8$ ，所以 $q = 2$ ， $a_2 - a_1 = a_1 = 1$ ，所以 $a_3 = a_1 q^2 = 4$ ，故选 D。

3. 答案：C

解析：依题意， $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ，解得 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\frac{1}{2}$ ，所以 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ ，故选 C。

4. 答案：B

解析：方法 1：设 $z = a + bi$ ，则 $a^2 + b^2 = 1$ ， $(a - 2)^2 + b^2 = 1$ ，解得 $a = 1, b = 0$ ，故选 B。

方法 2：因为在复平面内 $|z| = 1$ 表示到原点距离为 1 的点，同理， $|z - 2| = 1$ 表示到点 $(2, 0)$ 距离为 1 的点，所以满足 $|z| = |z - 2| = 1$ 的点为两个单位圆的公共点，结合图形可知点的坐标为 $(1, 0)$ ，故选 B。

5. 答案：C

解析：设大铁球的半径为 r ，两个小铁球的半径分别为 r_1, r_2 ，所以

$$\frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{4\pi}{3}r_1^3 + \frac{4\pi}{3}r_2^3, \text{ 即 } r^3 = r_1^3 + r_2^3, \text{ 即 } \left(\frac{r_1}{r}\right)^3 + \left(\frac{r_2}{r}\right)^3 = 1, \text{ 则 } \frac{r_1}{r} < 1, \frac{r_2}{r} < 1, \text{ 所以}$$

$$r_1^2 + r_2^2 < 2r^2,$$

$$\text{所以 } \frac{4\pi(r_1^2 + r_2^2)}{4\pi r^2} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 > \left(\frac{r_1}{r}\right)^3 + \left(\frac{r_2}{r}\right)^3 = 1,$$

$$\text{即 } 4\pi(r_1^2 + r_2^2) > 4\pi r^2 = S, \text{ 所以这两个球的表面积之和 } S' \text{ 满足 } S < S' < 2S,$$

所以 A, B, D 选项错误；

取 $r_1 \rightarrow 0$ ，这两个球的表面积之和 $S' \rightarrow S$ ，

$$\text{取 } r_1 = r_2 = 2^{-\frac{1}{3}}r, \text{ 则这两个球的表面积之和为 } S' = 4\pi 2^{\frac{1}{3}}r^2 = 2^{\frac{1}{3}}S > 1.1S,$$

所以存在 $S' = 1.1S$ ，故选 C。

6. 答案：B

解析：依题意， $P(|Y| < 1) = P(|1 - X| < 1) = P(0 < X < 2) = 0.2$ ，所以

$$P(|Y - 1| < 2) = P(|1 - X - 1| < 2) = P(-2 < X < 2) = 2P(0 < X < 2) = 0.4, \text{ 故选 B.}$$

7. 答案：D

解析：依题意， x^3 项的系数为 0，所以 $C_6^3 2^3 - b = 0$ ，解得 $b = 160$ ，故选 D。

8. 答案：B

解析：以 PA 为直径的圆与椭圆有三个公共点，由
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ax = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \text{ 可得，}$$

$$(1 - \frac{b^2}{a^2})x^2 - ax + b^2 = 0, \text{ 解得 } x = a \text{ 或 } x = \frac{ab^2}{a^2 - b^2},$$

所以 $\frac{ab^2}{a^2 - b^2} < a$, 即 $\frac{b^2}{a^2} < \frac{1}{2}$, 所以 C 的离心率 $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, 故选 B.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 答案：ACD

解析：对于选项 A：原先的极差为 9，删去 80 后极差变为 8，所以 A 正确；

对于选项 B：原先的平均数为 84，删去 80 后平均数为 84.8，所以 B 错误；

对于选项 C：原先的中位数为 84，删去 83 后中位数为 85，所以 C 正确；

对于选项 D：原先的均值 $\bar{x} = 84$ ，方差 $s^2 = \frac{28}{3}$ ；删去 89 后，均值变为 83，方差为 $\frac{26}{5} < \frac{28}{3}$ ，方差变小，故 D 正确。故选 ACD.

10. 答案：BD

解析：对于选项 A：截取三棱锥的体积为 $\frac{1}{6} \times 1 \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}$ ，故该几何体的体积为

$$12 - \frac{1}{3} = \frac{35}{3}, \text{ A 选项错误；}$$

对于选项 B：延长 BQ ， GP 交于点 C ，因为 $EH \parallel BQ$ ， $CQ = CP$ ，故 $\angle BQP = 135^\circ$ ，直线 PQ 与 EH 所成角为 45° ，B 选项正确；

对于选项 C：过 P 且垂直于 FH 的平面为平面 $AEGP$ ， $PQ \not\subset$ 平面 $AEGP$ ，C 选项错误；

对于 D 选项：由于 $\overline{BQ} = \overline{QC}$ ，故 B 与 C 到平面 DPQ 的距离相等。同理， G 到平面 DPQ 的距离是 C 到平面 DPQ 的距离的 2 倍，故 D 选项正确。故选 BD.

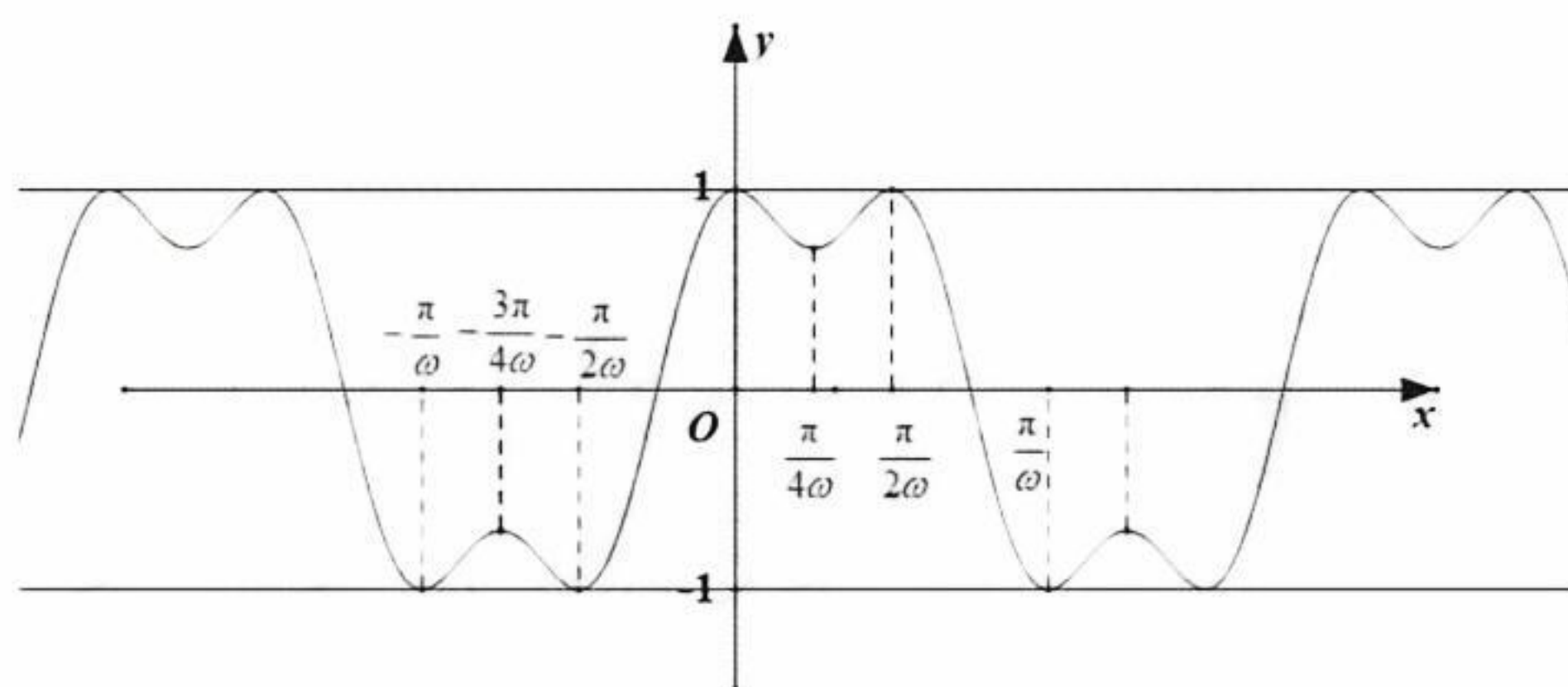
11. 答案：ACD

解析： $f(x + \frac{2\pi}{\omega}) = \sin^3(\omega x + 2\pi) + \cos^3(\omega x + 2\pi) = \sin^3 \omega x + \cos^3 \omega x = f(x)$ ，A 选项正确；

$f'(x) = 3\omega \sin \omega x \cos \omega x (\sin \omega x - \cos \omega x)$ ，则 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$ 上的单调性如下：

$f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{\omega}, -\frac{3\pi}{4\omega})$ ， $(-\frac{\pi}{2\omega}, 0)$ ， $(\frac{\pi}{4\omega}, \frac{\pi}{2\omega})$ 单调递增，

在 $(-\frac{3\pi}{4\omega}, -\frac{\pi}{2\omega})$ ， $(0, \frac{\pi}{4\omega})$ ， $(\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{\omega})$ 单调递减，



所以 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，B 选项错误；

因为 $f(0) = f(\frac{\pi}{2\omega}) = 1$ ， $f(-\frac{3\pi}{4\omega}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $f(x)$ 的最大值为 1，

因为 $f(-\frac{\pi}{\omega}) = f(-\frac{\pi}{2\omega}) = f(\frac{\pi}{\omega}) = -1$ ， $f(\frac{\pi}{4\omega}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $f(x)$ 的最小值为 -1，

C 选项正确;

由上可知, 只需 $\frac{\pi}{\omega} - \frac{\pi}{2\omega} \leq 1$, 即 $\omega \geq \frac{\pi}{2}$, 所以 ω 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$. D 选项正确; 故选

ACD.

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 答案: 1

解析: 易知 C 为等轴双曲线, 所以 $m = 2 - m$, 解得 $m = 1$, 故填 1.

13. 答案: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析: 方法 1: $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $2\theta \in (0, \pi)$, 所以 $\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sin 2\theta > 0$, 即 $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$,

则有 $\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sin 2\theta = \sin(\pi - 2\theta)$, 且 $\theta - \frac{\pi}{4} \in (0, \frac{\pi}{4})$, $\pi - 2\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,

所以 $\theta - \frac{\pi}{4} = \pi - 2\theta$, 解得 $\theta = \frac{5\pi}{12}$, 所以 $\cos 2\theta = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

方法 2: 因为 $\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sin 2\theta = \sin[2(\theta - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{2}]$, 所以 $\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \cos 2(\theta - \frac{\pi}{4})$, 所以

$2\sin^2(\theta - \frac{\pi}{4}) + \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) - 1 = 0$, 解得 $\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = -1$ 或 $\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$. 因为 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,

所以 $\theta - \frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, 所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$. 此时,

$\cos 2\theta = -\sin 2(\theta - \frac{\pi}{4}) = -2\sin(\theta - \frac{\pi}{4})\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故填 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. 答案: 50 6

解析: 依题意可得 $a_{n+1}a_n - a_na_{n-1} = 2$, 即 $\{a_{n+1}a_n\}$ 是以 $a_1a_2 = 2$ 为首项, 2 为公差的等差数列, 所以 $a_{n+1}a_n = 2n$, 则有 $a_{25}a_{26} = 50$, 故填 50;

因为 $\frac{1}{a_n} = \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2}$,

则 $S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{a_3 - a_1}{2} + \frac{a_4 - a_2}{2} + \dots + \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2} = \frac{1}{a_1} + \frac{a_{n+1} + a_n - a_1 - a_2}{2} = \frac{a_{n+1} + a_n - 1}{2}$

所以 $S_{25} = \frac{a_{25} + a_{26} - 1}{2} > \frac{1}{2}(2\sqrt{a_{25}a_{26}} - 1) = \frac{10\sqrt{2} - 1}{2} > 6$, 下证: $S_{25} < 7$,

因为 $a_{n+1}a_n = 2n$, 则有 $a_{n+2}a_{n+1} = 2n + 2$, 所以 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{n+1}{n}$, 当 $n = 2k$ 时, $\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \frac{2k+1}{2k}$,

则有 $a_{2k+2} = a_2 \cdot \frac{a_4}{a_2} \cdot \frac{a_6}{a_4} \dots \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \dots \times \frac{2k+1}{2k}$,

因为 $(2k-1)(2k+1) < (2k)^2$, 则 $\frac{2k+1}{2k} < \frac{2k}{2k-1}$, 则有 $\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^2 < \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k+1}{2k}$

所以 $\left(\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \dots \times \frac{2k+1}{2k}\right)^2 < \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{2k}{2k-1} \times \frac{2k+1}{2k} = 2k+1$

所以 $a_{2k+2} < 2\sqrt{2k+1}$,

因为 $2k(2k+2) < (2k+1)^2$, 则 $\frac{2k+1}{2k} > \frac{2k+2}{2k+1}$, 则有 $\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^2 > \frac{2k+1}{2k} \cdot \frac{2k+2}{2k+1}$

所以 $\left(\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \dots \times \frac{2k+1}{2k}\right)^2 > \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{2k+1}{2k} \times \frac{2k+2}{2k+1} = k+1$,

所以 $a_{2k+2} > 2\sqrt{k+1}$,

综上, $2\sqrt{n} < a_{2n} < 2\sqrt{2n-1}$, 所以 $\sqrt{50} < 2\sqrt{13} < a_{26} < 10$,

所以, $S_{25} = \frac{1}{2} \left(a_{26} + \frac{50}{a_{26}} - 1 \right) < \frac{1}{2} \left(10 + \frac{50}{10} - 1 \right) < 7$, 故填 6.

四、解答题: 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

为调研某地民众对于“未来低空出行”的了解情况, 用简单随机抽样的方法, 从该地调查了 300 位市民, 统计得到如下列联表:

	了解	不了解	合计
女	90	60	150
男	110	40	150
合计	200	100	300

(1) 根据小概率值 $\alpha = 0.010$ 的独立性检验, 分析对“未来低空出行”了解情况是否与性别有关;

(2) 在了解“未来低空出行”的 100 位市民中, 按性别进行分层, 用分层随机抽样的方法抽取 5 人, 再从这 5 人中随机选取 3 人去智能飞行器中心实地参观, 设 X 为女性市民的人数, 求 X 的分布列与期望.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

α	0.050	0.010	0.001
x_α	3.841	6.635	10.828

解: (1) 零假设为 H_0 : 对“未来低空出行”了解情况与性别无关联. 1 分

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{300 \times (90 \times 40 - 60 \times 110)^2}{200 \times 100 \times 150 \times 150} = 6 < 6.635, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

根据小概率值 $\alpha = 0.010$ 的独立性检验, 没有充分证据推断 H_0 不成立, 因此可以认为 H_0 成立, 即认为对“未来低空出行”了解情况与性别无关联. 5 分

(2) 由题可知, 了解“未来低空出行”的 100 位市民中男女比例为 2:3, 所以从市民中抽取的 5 人中, 2 位男性, 3 位女性. 7 分

现在从中随机抽取 3 人, 则女性的人数 X 可能为 1, 2, 3, 8 分

其中 $P(X=1) = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}$, $P(X=2) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}$, 11 分

所以 X 的分布列为:

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

所以 X 的期望为 $E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5}$ 13 分

16. (15 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $3c \cos B = 3a - b \sin C$.

(1) 求 $\tan C$;

(2) 若 D 在边 AB 上, 且 $CD = b$, $BD = 1$, $\tan \angle DCB = \frac{1}{3}$, 求 b .

解法一: (1) 由正弦定理得 $3 \sin C \cos B = 3 \sin A - \sin B \sin C$, 1 分

因为 $A = \pi - (B + C)$, 所以 $3 \sin C \cos B = 3 \sin(B + C) - \sin B \sin C$, 2 分

所以 $3 \sin C \cos B = 3 \sin B \cos C + 3 \cos B \sin C - \sin B \sin C$,

所以 $3 \sin B \cos C - \sin B \sin C = 0$, 4 分

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B \neq 0$,
 所以 $3\cos C - \sin C = 0$, 所以 $\tan C = 3$, 6 分

(2) $\tan C = -\tan(A+B) = -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 3$, 7 分

依题意, $\angle CDA = A$, 则 $\tan \angle DCB = \tan(A-B) = \frac{1}{3}$, 即 $\frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{1}{3}$, 9 分

解得 $\begin{cases} \tan A = 2 \\ \tan B = 1 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} \tan A = -\frac{1}{2} \\ \tan B = -1 \end{cases}$ (舍去) 11 分

所以 $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 12 分

因为 $\tan \angle DCB = \frac{1}{3}$, 所以 $\sin \angle DCB = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 13 分

在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理可得, $\frac{BD}{\sin \angle DCB} = \frac{CD}{\sin B}$,

所以 $b = CD = \sqrt{5}$ 15 分

解法二: (1) 由余弦定理得 $\frac{3c(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac} = 3a - b \sin C$, 1 分

化简得 $\frac{3}{2}(a^2 + b^2 - c^2) = ab \sin C$, 3 分

所以 $\sin C = \frac{3(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab} = 3 \cos C$, 5 分

所以 $\tan C = 3$ 6 分

(2) 依题意, $\angle ACD = \angle ACB - \angle DCB$, 且 $\angle ACD = \pi - 2A$,

$\tan \angle ACD = \tan(\angle ACB - \angle DCB) = \frac{3 - \frac{1}{3}}{1 + 3 \times \frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$, 7 分

所以 $\tan \angle ACD = \tan(\pi - 2A) = -\tan 2A = \frac{2 \tan A}{\tan^2 A - 1} = \frac{4}{3}$,

解得 $\tan A = 2$, $\tan A = -\frac{1}{2}$, 又 A 为锐角, 所以 $\tan A = 2$, 9 分

因为 $\tan C = -\tan(A+B) = -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 3$, 10 分

所以 $\tan B = 1$, 11 分

所以 $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 12 分

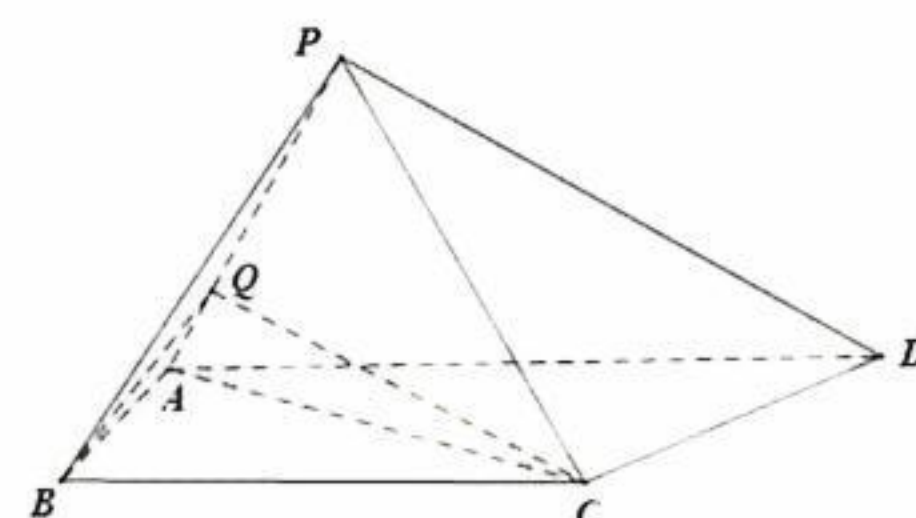
因为 $\tan \angle DCB = \frac{1}{3}$, 所以 $\sin \angle DCB = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 13 分

在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理可得, $\frac{BD}{\sin \angle DCB} = \frac{CD}{\sin B}$,

所以 $b = CD = \sqrt{5}$ 15 分

17. (15 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是直角梯形, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $BC = 3$, $AD = 4$, $\overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{AP}$, $0 < \lambda < 1$.



(2) 已知平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = CD = 2$, $PD = 2\sqrt{3}$, 平面 QAB 与平面 QBC

解: (1) 过 Q 作 $QR \parallel AD$ 交 AD 于 R .

因为 $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ ，所以 $BC \parallel AD$ ，从而 $\overline{BC} = \frac{3}{4}\overline{AD} = \overline{QR}$ 。

由于 $BQ \not\subset$ 平面 PCD , $CR \subset$ 平面 PCD ,

所以 $BQ \parallel$ 平面 PCD .

(2) 由已知得 $AB = \sqrt{CD^2 - (AD - BC)^2} = \sqrt{3}$.

因为 $AP^2 + PD^2 = AD^2$, 所以 $PA \perp PD$.

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，在平面 PAD 上过 A 作 AD 的垂线 AH ，则 $AH \perp$ 平面 $ABCD$ ，以 A 为原点， $\overrightarrow{AB}$ 的方向为 x 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$ 。

$$B(\sqrt{3}, 0, 0), C(\sqrt{3}, 3, 0), D(0, 4, 0), P(0, 1, \sqrt{3}), Q(0, \lambda, \sqrt{3}\lambda). \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

设平面 QAB 的法向量为 $\boldsymbol{m} = (x_1, y_1, z_1)$.

由 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \lambda y_1 + \sqrt{3} \lambda z_1 = 0 \\ \sqrt{3} x_1 = 0 \end{cases}$, 令 $y_1 = -\sqrt{3}$, 得 $\mathbf{m} = (0, -\sqrt{3}, 1)$ 8 分

设平面 QBC 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x_2, y_2, z_2)$.

由 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QB} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \sqrt{3}x_2 - \lambda y_2 - \sqrt{3}\lambda z_2 = 0 \\ 3y_2 = 0 \end{cases}$, 令 $z_2 = 1$, 得 $\mathbf{n} = (\lambda, 0, 1)$ 10 分

则 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.  11 分

解得 $\lambda = -\frac{1}{2}$ (舍去), $\lambda = \frac{1}{2}$, 12 分

解法一：因此 $\overrightarrow{QB} = (\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{BC} = (0, 3, 0)$,

所以点 Q 到 BC 的距离 $h = \sqrt{\overline{BQ}^2 - \left(\frac{\overline{BQ} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BC}|}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$, 14 分

所以 $\triangle QBC$ 的面积为 $\frac{1}{2}|\overline{BC}| \cdot h = \frac{3\sqrt{15}}{4}$, 15 分

$$(\cos \angle QBC = -\frac{\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{QB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{1}{4}, \triangle QBC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} |\overrightarrow{QB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \sin \angle QBC = \frac{3\sqrt{15}}{4})$$

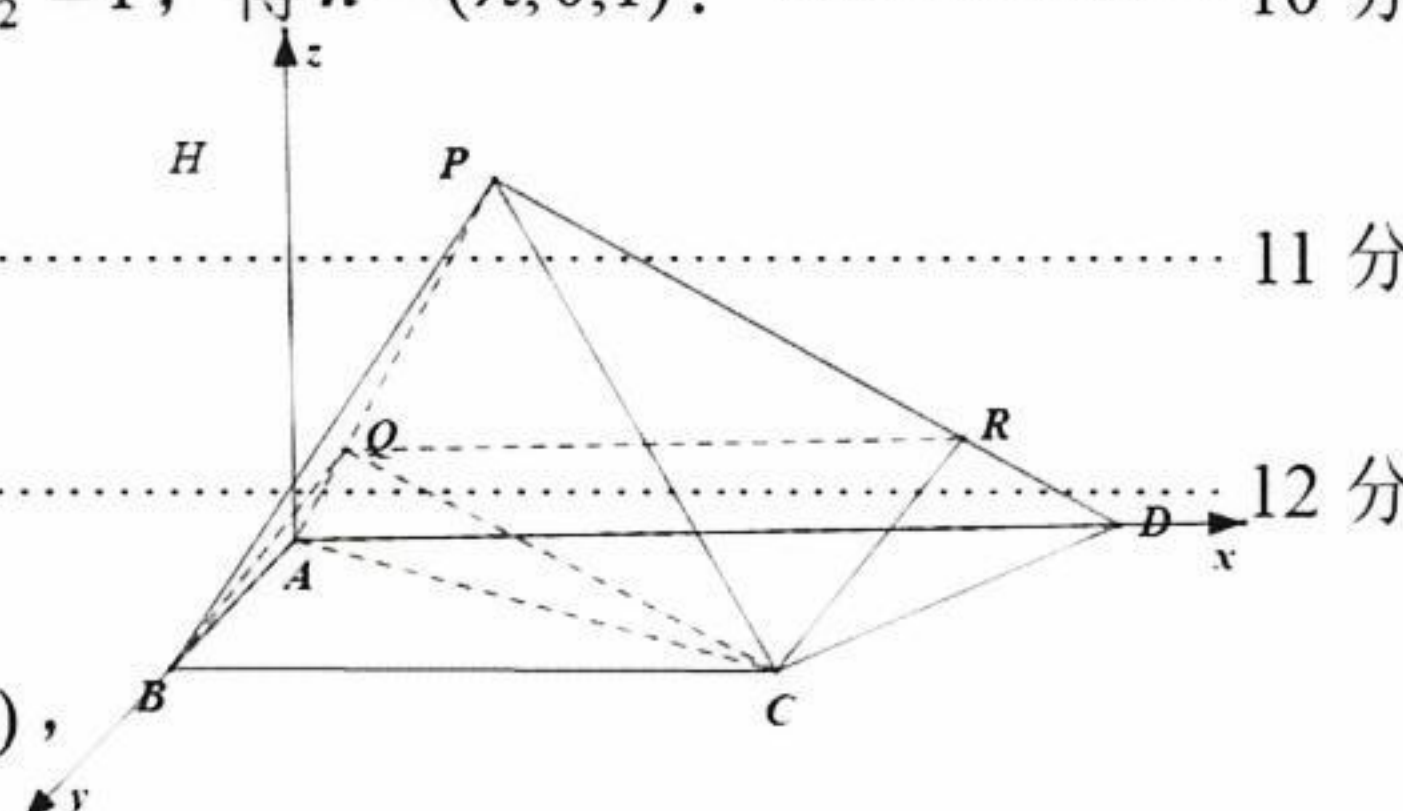
解法二：在平面 PAD 上，过 Q 作 AD 的垂线交 AD 于 E ，

因为平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, 所以 $OE \perp AD$,

在平面 $ABCD$ 上, 过 E 作 BC 的垂线交 BC 于 F , 连接 OF ,

因为 $QE \perp BC$, $EF \perp BC$, $EF \cap QE = E$, 所以 $BC \perp$ 平面 QEF , 所以 $BC \perp QF$, 13 分

因为 $\lambda = \frac{1}{2}$, 所以 $QE = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $QF = \sqrt{QE^2 + EF^2} = \sqrt{QE^2 + AB^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$, 14 分



所以 $\triangle QBC$ 的面积为 $\frac{1}{2}BC \cdot QF = \frac{3\sqrt{15}}{4}$, 15 分

18. (17 分)

设函数 $f(x) = x \ln(a-x)$, $a > 0$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 证明: $f(x)$ 存在唯一极大值点;

(3) 记 $f(x)$ 的极大值点为 x_0 , 若存在 a , 使得 $f(x_0) \leq a+b$, 求 b 的取值范围.

解: (1) 当 $a=2$ 时, $f(x) = x \ln(2-x)$, $f'(x) = \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$, 1 分

所以 $f(1)=0$, $f'(1)=-1$, 3 分

所以 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=-x+1$ 4 分

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, a)$, $f'(x) = \ln(a-x) - \frac{x}{a-x}$, 5 分

设 $g(x) = f'(x) = \ln(a-x) - \frac{x}{a-x}$, 则 $g'(x) = -\frac{1}{a-x} - \frac{a}{(a-x)^2} = \frac{x-2a}{(a-x)^2} < 0$, 6 分

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递减, 7 分

又 $g\left(a - \frac{1}{e}\right) = -ae < 0$, $g(-1) = \ln(a+1) + \frac{1}{a+1} > 0$,

所以存在唯一的 $x_0 \in \left(-1, a - \frac{1}{e}\right)$ 使得 $f'(x_0) = 0$,

当 $x \in (-\infty, x_0)$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $x \in (x_0, a)$ 时 $f'(x) < 0$, 9 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 单调递增, 在 (x_0, a) 单调递减,

所以 $f(x)$ 存在唯一的极大值点; 10 分

(3) 由 (2) 可得 $f_{\max}(x) = f(x_0) = x_0 \ln(a-x_0)$, 且 $\ln(a-x_0) = \frac{x_0}{a-x_0}$, 11 分

令 $a-x_0 = t > 0$, 则 $\ln t = \frac{a}{t} - 1$, 即 $a = t \ln t + t$,

所以 $f(x_0) - a = (a-t) \ln t - a = t \ln^2 t - t \ln t - t$, 令 $h(t) = t \ln^2 t - t \ln t - t$, 12 分

依题意, 存在 a , 使得 $f(x_0) - a \leq b$, 即 $h_{\min}(t) \leq b$,

$h'(t) = \ln^2 t + \ln t - 2 = (\ln t - 1)(\ln t + 2)$,

令 $h'(t) > 0$, 解得 $0 < t < e^{-2}$ 或 $t > e$, 令 $h'(t) < 0$, 解得 $e^{-2} < t < e$,

所以 $h(t)$ 在 $(0, e^{-2})$, $(e, +\infty)$ 上单调递增, 在 (e^{-2}, e) 上单调递减, 14 分

当 $t \in (0, e^{-2})$ 时, $h(t) = t(\ln^2 t - \ln t - 1) = t\left(\left(\ln t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right) > t\left(\left(-2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right) = 5t > 0$ 16 分

分

又 $h(e) = -e$, 则 $h_{\min}(t) = h(e) = -e$, 此时 $a = 2e$, $x_0 = e$.

所以 b 的取值范围是 $[-e, +\infty)$ 17 分

19. (17 分)

已知抛物线 $E: y^2 = 2x$, $D_1(1,0)$, $k_1 = 1$, λ 为常数, $\lambda > 1$. 按照如下方式依次构造点 $D_n (n = 2, 3, \dots)$: 过 D_{n-1} 作斜率为 $k_{n-1} (k_{n-1} > 0)$ 的直线交 E 于 A_{n-1} , B_{n-1} 两点, 使得 $|D_{n-1}A_{n-1}| = \lambda |D_{n-1}B_{n-1}|$, 令 D_n 为线段 $A_{n-1}B_{n-1}$ 的垂直平分线与 x 轴的交点, 记 D_n 的坐标为 $(x_n, 0)$.

(1) 求 λ ;

(2) 证明: $x_n k_n^2 = 1$;

(3) 设 S_n 为 $\triangle A_n B_n D_{n+1}$ 的面积, 证明: $\sum_{i=1}^n \frac{S_{i+1}}{S_i} < \sqrt{2}(2n+1)$.

解: (1) 设 $A_1(a_1, c_1)$, $B_1(b_1, d_1)$, 易知直线 $A_1 B_1$ 的方程为 $x = y + 1$, 1 分

联立 $\begin{cases} y^2 = 2x, \\ x = y + 1, \end{cases}$ 可得 $y^2 - 2y - 2 = 0$, 解得 $c_1 = 1 + \sqrt{3}$, $d_1 = 1 - \sqrt{3}$, 2 分

所以 $\lambda = \frac{|D_1 A_1|}{|D_1 B_1|} = \frac{|c_1|}{|d_1|} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}$ 4 分

(2) 设直线 $A_n B_n$ 的方程为 $x = \frac{y}{k_n} + x_n (k_n > 0)$, $A_n(a_n, c_n)$, $B_n(b_n, d_n)$,

联立 $\begin{cases} y^2 = 2x, \\ x = \frac{y}{k_n} + x_n, \end{cases}$ 可得 $k_n y^2 - 2y - 2k_n x_n = 0$,

由韦达定理可得, $c_n + d_n = \frac{2}{k_n}$, $c_n d_n = -2x_n$, 5 分

由 $\frac{|D_n A_n|}{|D_n B_n|} = \frac{|c_n|}{|d_n|} = -\frac{c_n}{d_n} = \lambda$, 6 分

因为 $\frac{(c_n + d_n)^2}{c_n d_n} = 2 - (\lambda + \frac{1}{\lambda}) = -2$, 8 分

所以 $\frac{(\frac{2}{k_n})^2}{-2x_n} = -2$, 化简得 $x_n k_n^2 = 1$,

所以 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $x_n k_n^2$ 为定值 1. 9 分

(3) 设 $A_n B_n$ 的中点为 M_n , 则 $M_n(\frac{a_n + b_n}{2}, \frac{c_n + d_n}{2})$, 由(2)可知, $k_n = \sqrt{\frac{1}{x_n}}$, 则 $M_n(2x_n, \sqrt{x_n})$,

所以 $A_n B_n$ 的垂直平分线方程为 $y = -\sqrt{x_n}x + 2\sqrt{x_n}x_n + \sqrt{x_n}$,

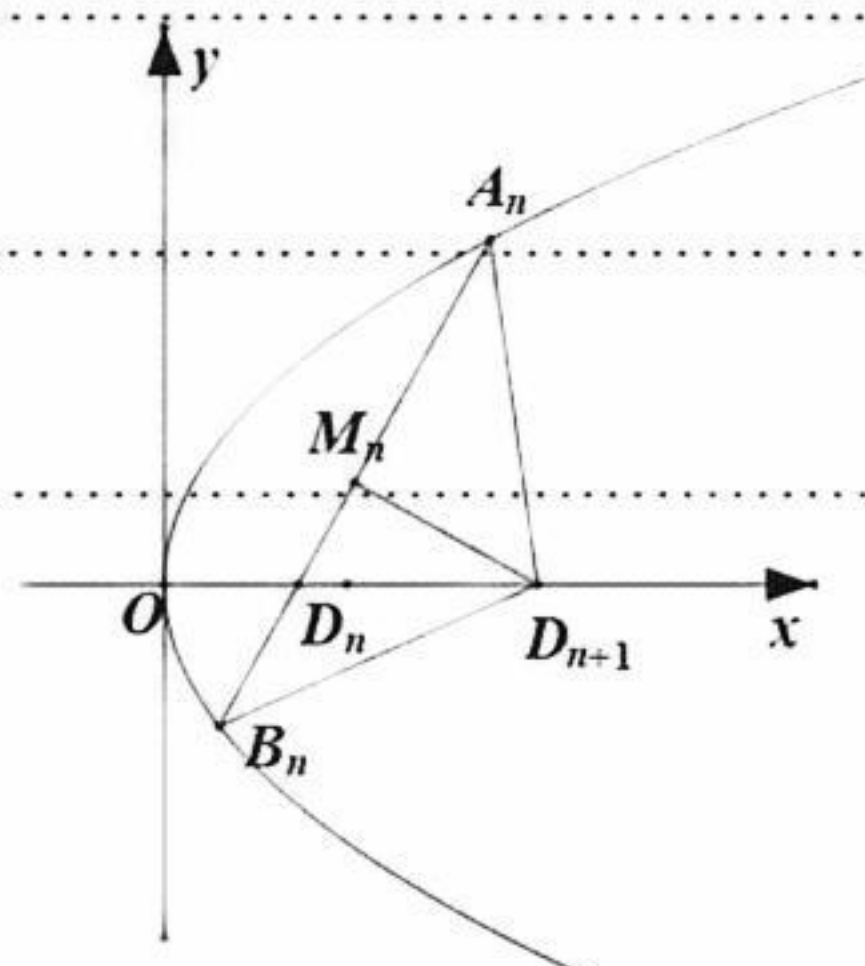
所以 $D_{n+1}(2x_n + 1, 0)$, 即 $x_{n+1} = 2x_n + 1$, 11 分

所以 $x_{n+1} + 1 = 2(x_n + 1)$, 即 $\{x_n + 1\}$ 是以 $x_1 + 1 = 2$ 为首项, 公比为 2 的等比数列,

解得 $x_n = 2^n - 1$, 12 分

因为 $|c_i - d_i| = \frac{\sqrt{4 + 8k_i^2 x_i}}{k_i} = 2\sqrt{3x_i}$,

则 $S_i = S_{\triangle A_i D_i D_{i+1}} + S_{\triangle B_i D_i D_{i+1}} = \frac{1}{2} |D_i D_{i+1}| \cdot |c_i - d_i| = (x_{i+1} - x_i) \sqrt{3x_i} = 2^i \sqrt{3(2^i - 1)}$ 13 分



$$\text{所以 } \frac{S_{i+1}}{S_i} = 2\sqrt{\frac{2^{i+1}-1}{2^i-1}} = 2\sqrt{2+\frac{1}{2^i-1}} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{2(2^i-1)}},$$

$$\text{因为 } \sqrt{1+\frac{1}{2(2^i-1)}} < \frac{1+1+\frac{1}{2(2^i-1)}}{2} = 1+\frac{1}{4(2^i-1)}, \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \frac{1}{2^i-1} = \frac{1}{2^{i-1}+2^{i-1}-1} \leq \frac{1}{2^{i-1}},$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^n \frac{S_{i+1}}{S_i} < \sum_{i=1}^n 2\sqrt{2} \cdot \left(1+\frac{1}{2^{i+1}}\right) = 2\sqrt{2}n + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} < 2\sqrt{2}n + \sqrt{2} \dots\dots\dots 17 \text{ 分}$$