县(市)______ 学校______ 姓名______ 班级______ 座号______

密 封 装 订 线

2025届宁德市普通高中毕业班五月份质量检测

数学试题

（满分：150分　时间：120分钟）

注意事项：

1. 答题前，学生务必在试卷、答题卡规定的地方填写自己的学校、准考证号、姓名.学生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的"准考证号、姓名"与学生本人准考证号、姓名是否一致.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3. 答题结束后，学生必须将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合$P=\{x\mid x(x-2)<0\}$，$Q=\{x\mid y=\sqrt{x-1}\}$，则$P\cap Q=$

A．$\{x\mid 1\le x<2\}$　B．$\{x\mid x\ge 1\}$　C．$\{x\mid x>0\}$　D．$\{x\mid 1<x<2\}$

2．复数z满足$zi=z-2$，则复数z的共轭复数为

A．$1+i$　B．$1-i$　C．$-1+i$　D．$-1-i$

3．设α，β是两个不同平面，m，n是平面β内的两条不同直线.甲：$m//\alpha$，$n//\alpha$，乙：$\alpha//\beta$，则

A．甲是乙的充分不必要条件　B．甲是乙的必要不充分条件

C．甲是乙的充要条件　D．甲是乙的既不充分也不必要条件

4．由如表所示的变量x,y之间的一组数据，得x,y之间的线性回归方程为$\hat{y}=-0.5x+10.5$，则

x	6	8	10	12
y	7	t	5.5	4.5

A.点$(8,t)$一定在回归直线上

B. x每增加1个单位，y大约增加0.5个单位

C. $t=7$

D. 去掉$(12,4.5)$这组数据后，求得的回归直线方程斜率将变大

5. 已知$(x+a)^n$的展开式中只有第 3 项的二项式系数最大．若展开式中所有项的系数和为 16，则 a 的值为

A. -3　　B. 1　　C. -1或3　　D. -3或1

6. 曲线$C: y=\frac{x+1}{e^x}$在点$P(x_0,y_0)$处切线斜率的取值范围为$\left[-\frac{\ln 2}{2},0\right]$，则$x_0$的取值范围为

A. $[0,\ln 2]$　　B. $[0,\ln 2]\cup[\ln 4,3]$

C. $[\ln 2,\ln 4]$　　D. $[0,\ln 2]\cup[\ln 4,+\infty)$

7. 若函数$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$在区间$[a,a+1]$上的最小值为$m$，最大值为$M$，则

A. $-2\le m\le -\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $-2\le m\le \sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}\le M\le 2$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le M\le 2$

8. 已知直线l_1：$y=x+t$与双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线分别相交于$A$，$B$两点，若线段$AB$的中点$M$在直线$l_2$：$y=-3x+3t$上，则双曲线$C$的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 若直线$y=(m-2)x+1$与抛物线C：$y^2=mx$只有 1 个公共点，则抛物线C的焦点坐标可以是

A. $\left(\frac{1}{4},0\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},0\right)$　　C. $\left(\frac{2}{3},0\right)$　　D. $(1,0)$

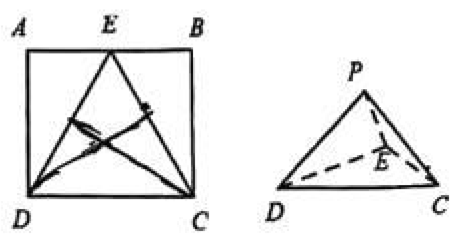
10. 如图，在矩形$ABCD$中，$BC=\sqrt{3}$，$AB=2$，E为AB中点，现分别沿DE，CE将ΔADE，ΔBCE翻折，使点A，B重合，记为点P，翻折后得到三棱锥$E-PCD$，则

A. $PD\perp EC$

B. 三棱锥$E-PCD$的体积为$\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. 二面角$C-PE-D$的余弦值为$\frac{1}{3}$

D. 三棱锥$E-PCD$外接球的半径为$\frac{\sqrt{22}}{4}$



11. 设函数 $f(x)=\left(\frac{1}{x}+a\right)\ln(1+x)+1(a\in\mathbf{R})$, 则

A. 当 $a=1$ 时，$f(x)$ 没有零点

B. 当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上不存在极值

C. 存在实数 a，使得曲线 $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$ 为轴对称图形

D. 存在实数 a，使得曲线 $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$ 为中心对称图形

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知向量 a 与 b 的夹角为 120°，$|a|=2$，$|a-2b|=2\sqrt{3}$，则 $|b|=$______.

13. 设函数 $f(x)=|\log_2 x|$，则满足 $f(x)<f(x-1)$ 的 x 的取值范围是______.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 共有 $m+k$ 项 $(n=m+k,\ m\geq k,\ m,k\in\mathbf{N}^*)$，其中 m 项为 0，k 项为 1. 若数列 $\{a_n\}$ 满足对任意 $i\leq m+k$，a_1,a_2，…，a_i 中的 0 的个数不少于 1 的个数，则称数列 $\{a_n\}$ 为"规范数列". 当 $m=3$，$k=3$ 时，"规范数列"的个数为________，记 P_{m+k} 表示数列 $\{a_n\}$ 是"规范数列"的概率，则 P_{m+2} 的最小值为________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）

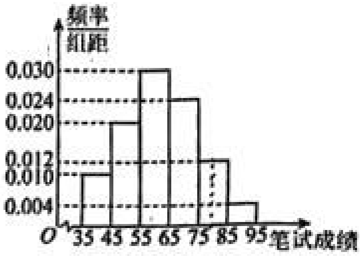
在 ΔABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 设向量 $\boldsymbol{m}=\left(\sqrt{3}\cos A,\cos A+\sin A\right)$,
$\boldsymbol{n}=(2\sin A,\cos A-\sin A)$，记 $f(A)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$，$A\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$.

（1）求函数 $f(A)$ 的最大值；

（2）若 $f(A)=1,a=\sqrt{3},\cos B\cos C=-\frac{1}{4}$，求 ΔABC 的面积.

16.（15分）

某地组织全市高中学生开展青少年劳动技能知识竞赛，竞赛分为笔试和操作两部分．随机抽取了100名高中学生的笔试成绩，绘制了频率分布直方图，如图所示．

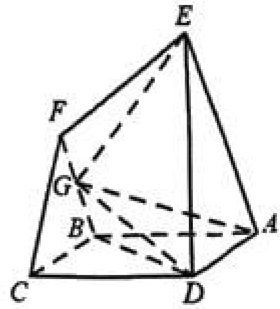


（1）根据频率分布直方图，估计笔试成绩的样本平均数和第一四分位数．

（2）用频率估计概率，笔试成绩在80分（含）以上记为良好．经统计，学生笔试等级为良好的情况下操作等级为良好的概率为0.8，学生笔试等级非良好的情况下操作等级为良好的概率为0.6．从全市所有高中学生中选取5人，记操作等级为良好的人数为X，求X的数学期望与方差．

17.（15分）

如图，平行四边形$ABCD$中，$AB=AD=BD=2$，$DE\perp$平面$ABCD$，$\triangle BCF$是等边三角形，平面$BCF\perp$平面$ABCD$．



（1）求证：$AD\perp EF$；

（2）若直线AE和平面$ABCD$所成角为60°，G为线段BF上一点，当平面ADG和平面AGE所成角的余弦值为$\frac{1}{5}$时，求BG的长．

18.（17分）

已知$\odot C: x^2+y^2-2x-15=0$，点$F(-1,0)$．在$\odot C$上任取一点P，线段PF的垂直平分线与线段PC相交于点R，当点P在圆上运动时，点R的轨迹为曲线Γ．

（1）求曲线Γ的方程；

（2）过点$D(4,0)$且斜率不为0的直线l与曲线Γ相交于M,N两点．

（i）若O为原点，求ΔMON面积的最大值；

（ii）点$A(-2,0)$，设点Q是线段MN上异于M,N的一点，直线QA，QM的斜率分别为k_1，k_2，且$k_1+k_2=0$，求$\dfrac{|DM|\cdot|NQ|}{|DN|\cdot|MQ|}$的值．

19.（17分）

设函数$f(x)=x\cos x$．

（1）求函数$g(x)=f(x)-x\ (0<x\le 1)$的值域；

（2）当$0<x\le\pi$时，$f(x)\le\dfrac{2ax}{x^2+2}$恒成立，求$a$的最小值；

（3）若$a_1=1$，$a_{n+1}=f(a_n)$，证明：$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}\cos a_k\le 2-2a_{n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$．

附：$\prod\limits_{k=1}^{n}\cos a_k=\cos a_1\cdot\cos a_2\cdot\cos a_3\cdots\cos a_n$．

2025届宁德市普通高中毕业班五月份质量检查

数学试题参考答案及评分标准

说明：

1.本解答指出了每题要考察的主要知识和能力，给出一种或几种解法供参考．如果考生的解法与给出的解法不同，可根据试题的主要考察内容比照评分标准确定相应的评分细则．

2.对解答题，当考生的解答在某一步出现错误，但整体解决方案可行且后续步骤没有出现推理或计算错误，则错误部分依细则扣分，并根据对后续步骤影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过后续部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3.解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4.解答题只给整数分数，填空题不给中间分．

一、选择题：本题考查基础知识和基本运算，每小题5分，满分40分．

1．A　2．B　3．B　4．C　5．D　6．D　7．B　8．C

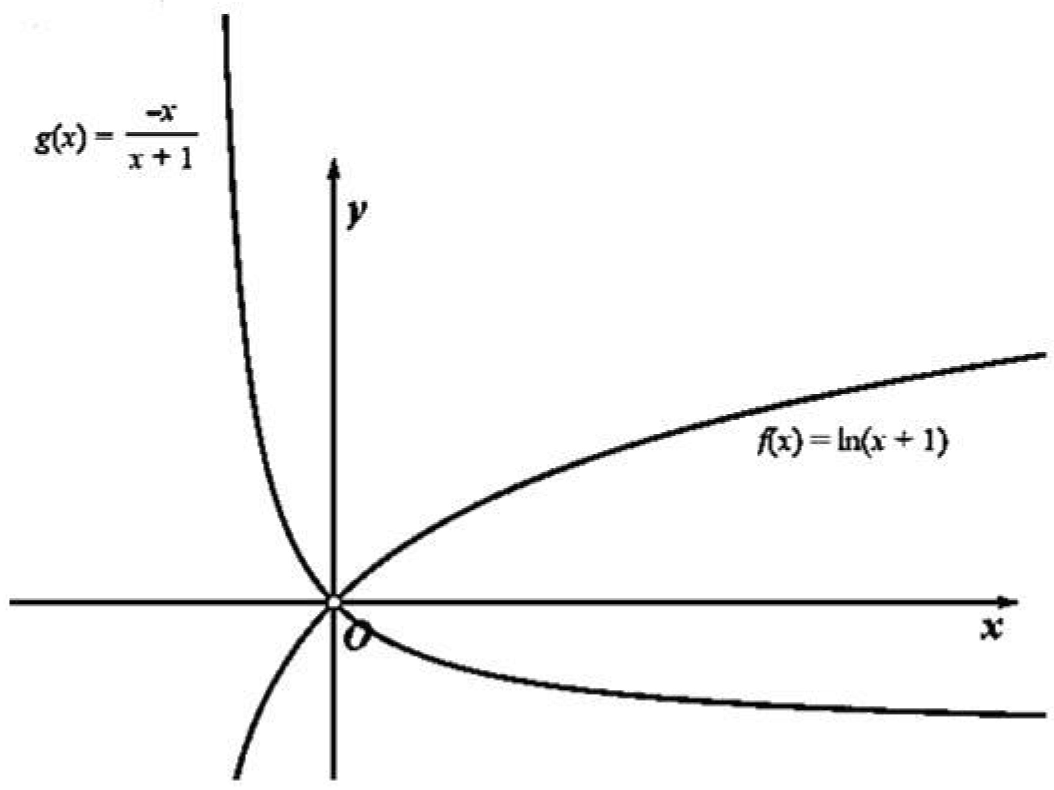
二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9．BC　10．BCD　11．ABC

11. 解法一：函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\ \ x>-1, 且x\neq 0\}$，由 $(\frac{1}{x}+1)\ln(x+1)+1=0$ 得

$\ln(x+1)=\frac{-x}{1+x}$ $(x>-1且x\neq 0)$．

作出 $y=\ln(x+1)$ 与 $y=\frac{-x}{1+x}$ 的图像，二者有唯一交点 $(0,0)$，不合题意，故 $f(x)$ 没有零点．故A正确.



$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+(\frac{1}{x}+a)\frac{1}{1+x}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1+ax}{x(1+x)}$$

$$=-\frac{1}{x^2}[\ln(1+x)-\frac{x(1+ax)}{1+x}],$$

令 $g(x)=\ln(1+x)-\frac{x(1+ax)}{1+x}$, $g'(x)=\frac{-2ax-ax^2+x}{(1+x)^2}$，

因为 $a<0, x>0$,所以 $g'(x)>0$，

又 $g(0)=0$，所以 $g(x)>0$,所以 $f'(x)<0$，

则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无极值，故B正确.

令 $h\left(x\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)=(x+a)\ln\frac{1+x}{x}+1$，

因为 $1+\frac{1}{x}>0$，所以 $x>0$ 或 $x<-1$，由对称性可知，故若存在对称轴或对称中心，必在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上.

考虑 $h(x)-h(-x-1)=[(x+a)\ln\frac{1+x}{x}+1]-[(-x-1+a)\ln\frac{x}{1+x}+1]$

$$=(x+a)\ln\frac{1+x}{x}+1-(x+1-a)\ln\frac{1+x}{x}=(2a-1)\ln\frac{1+x}{x},$$

当$a=\frac{1}{2}$时，$h(x)=h(-x-1)$，

所以$y=f(\frac{1}{x})$关于$x=-\frac{1}{2}$对称，故C正确.

考虑$h(x)+h(-x-1)=(x+a)\ln\frac{1+x}{x}+(x+1-a)\ln\frac{1+x}{x}+2=(2x+1)\ln\frac{1+x}{x}+2$，

所以不存在符合题意的常数a．故D错误.

故选ABC.

解法二：由解法一可得A正确.

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+(\frac{1}{x}+a)\frac{1}{1+x}\ (x>-1且x\neq 0)$.

易证：$\ln(x+1)>1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$，所以$f'(x)<-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{1+x}+(\frac{1}{x}+a)\frac{1}{1+x}=\frac{ax}{x(1+x)}<0$，

即$f(x)$在$(0,+\infty)$上无极值,故B正确.

由解法一可得C正确.

由解法一可得D错误.

故选ABC.

三、填空题：本题考查基础知识和基本运算，每小题5分，满分15分.

12．1　　13．$(1,\frac{\sqrt{5}+1}{2})$　　14．5，$\frac{1}{3}$

14.（1）当$m=3,k=3$时，符合题意得数列有

0,0,0,1,1,1　0,0,1,0,1,1　0,1,0,0,1,1　0,0,1,1,0,1　0,1,0,1,0,1

所以共有5种.

（2）记数列$\{a_n\}$为“规范数列”的个数为$f(m,k)$

显然第一项为0，当第二项为0时，规范数列个数为C_m^2，

当第二项为1时，第三项必然为0，此时规范数列个数为C_{m-1}^1，

所以$f(m,2)=C_m^2+C_{m-1}^1$.故

$$P_{m+2}=\frac{f(m,2)}{C_{m+2}^2}=\frac{m^2+m-2}{(m+2)(m+1)}=\frac{m-1}{m+1}=1-\frac{2}{m+1}$$

当$m=2$时，$(P_{m+2})_{\min}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

四、解答题：本大题共5小题，满分77分，解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤.

15. 本题主要考查正弦定理、三角形面积公式、三角恒等变化等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想、函数与方程思想等，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性与综合性．满分13分.

解法一：（1）因为$\boldsymbol{m}=(\sqrt{3}\cos A,\cos A+\sin A)$，$\boldsymbol{n}=(2\sin A,\cos A-\sin A)$

所以$f(A)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2\sqrt{3}\sin A\cos A+\cos^2 A-\sin^2 A$ ……………………………………………………………………1分

$=\sqrt{3}\sin 2A+\cos 2A=2\sin(2A+\frac{\pi}{6})$ ……………………………………………………………………………3分

又因为$A\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，所以$2A+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$，……………………………………………………………4分

所以$\sin(2A+\frac{\pi}{6})\in\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，……………………………………………………………………………5分

所以$f(A)_{\max}=f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}$ ………………………………………………………………………………………6分

（2）由（1）知若$f(A)=2\sin(2A+\frac{\pi}{6})=1$，

因为$A\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，所以$A=\frac{\pi}{3}$，………………………………………………………………………………7分

因为$\cos A=-\cos(B+C)=-\cos B\cos C+\sin B\sin C=\frac{1}{2}$，……………………………………………………8分

所以$\sin B\sin C=\frac{1}{4}$，…………………………………………………………………………………………………9分

因为$a=\sqrt{3},\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由正弦定理知$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

所以$\sin B=\frac{b}{2},\sin C=\frac{c}{2}$，……………………………………………………………………………………11分

所以$bc=1$ ………12分

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}$ ……………………………………………………………………………………13分

解法二：（1）同解法一

（2）由（1）知$f(A)=2\sin(2A+\frac{\pi}{6})=1$.

因为$A\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，所以$A=\frac{\pi}{3}$ ……………………………………………………………………………………7分

因为$\cos B\cos C=-\frac{1}{4}$，所以

$\cos B\cos\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=-\frac{1}{4}$，……………………………………………………………………………8分

$\cos B\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos B+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)=-\frac{1}{4}$，

$-\frac{1}{2}\cos^2 B+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\cos B=-\frac{1}{4}$，

$2\cos^2 B-2\sqrt{3}\sin B\cos B=1$，

$1+\cos 2B-\sqrt{3}\sin 2B=1$，所以$\tan 2B=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ……………………………………………………9分

又因为$B\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$,所以$\begin{cases}B=\frac{\pi}{12},\\ C=\frac{7\pi}{12}\end{cases}$或$\begin{cases}B=\frac{7\pi}{12},\\ C=\frac{\pi}{12}.\end{cases}$ ……………………………………………………11分

由正弦定理知$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

所以$b=2\sin B,c=2\sin C$，

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=2\sin A\sin B\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}$ ……………………………………………………13分

16. 本小题主要考查统计、全概率公式、概率的分布及期望、考查数学建模能力、运算求解能力、数据处理能力、应用意识，考查数学抽象、逻辑推理、数学建模、数据分析和数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性．满分15分．

解：（1）设笔试成绩样本平均数为$\overline{x}$，第一四分位数（即下四分位数）为t，则

$\overline{x}=40\times0.1+50\times0.2+60\times0.3+70\times0.24+80\times0.12+90\times0.04$ ……………………………………2分

$=62$ ……………………………………………………3分

又 $0.1+(t-45)\times0.02=0.25$ ……………………………………………………5分

$t=52.5$ ……………………………………………………6分

（2）记"笔试成绩等级良好"为事件A，"操作成绩等级为良好"为事件B，

依题意，$P(A)=\frac{0.12}{2}+0.04=0.1$，$P(\overline{A})=1-P(A)=0.9$ $P(B|A)=0.8$，

$P(B|\overline{A})=0.6$ ……………………………………………………8分

所以$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})$ ……………………………………………………9分

$=0.8\times0.1+0.6\times0.9$

$=0.62$ ……………………………………………………10分

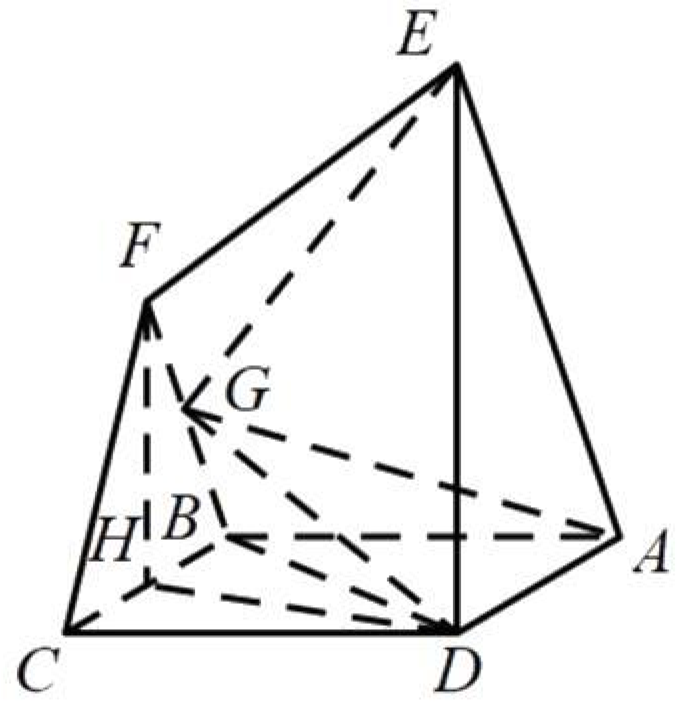
因为$X\sim B(5,0.62)$ ……………………………………………………11分

所以$E(X)=5\times0.62=3.1$ ……………………………………………………13分

$D(X)=5\times0.62\times(1-0.62)=1.178$ ……………………………………………………15分

17. 本小题主要考查空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，空间角的计算等基础知识，考查空间想象能力、逻辑推理能力、运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想等，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性与综合性．满分15分．

解：(1) 证明：取BC的中点H，连结DH，FH.



$\because DE \perp$平面$ABCD$，$\therefore DE \perp AD$，

$\because \triangledown BCF$是等边三角形，

$\therefore FH \perp BC$，……………………………………………………………1分

$\because$平面$BCF \perp$平面$ABCD$，$\therefore FH \perp$平面$ABCD$，

$\therefore DE // FH$，$\therefore D$，E，F，H共面，………………………………2分

$\because$平行四边形$ABCD$中，$AB = AD = BD = 2$，

$\therefore$平行四边形$ABCD$为边长为2的菱形，且$\angle BAD = 60^\circ$

在等边$\triangle BCD$中，$BH = CH = 1$，，

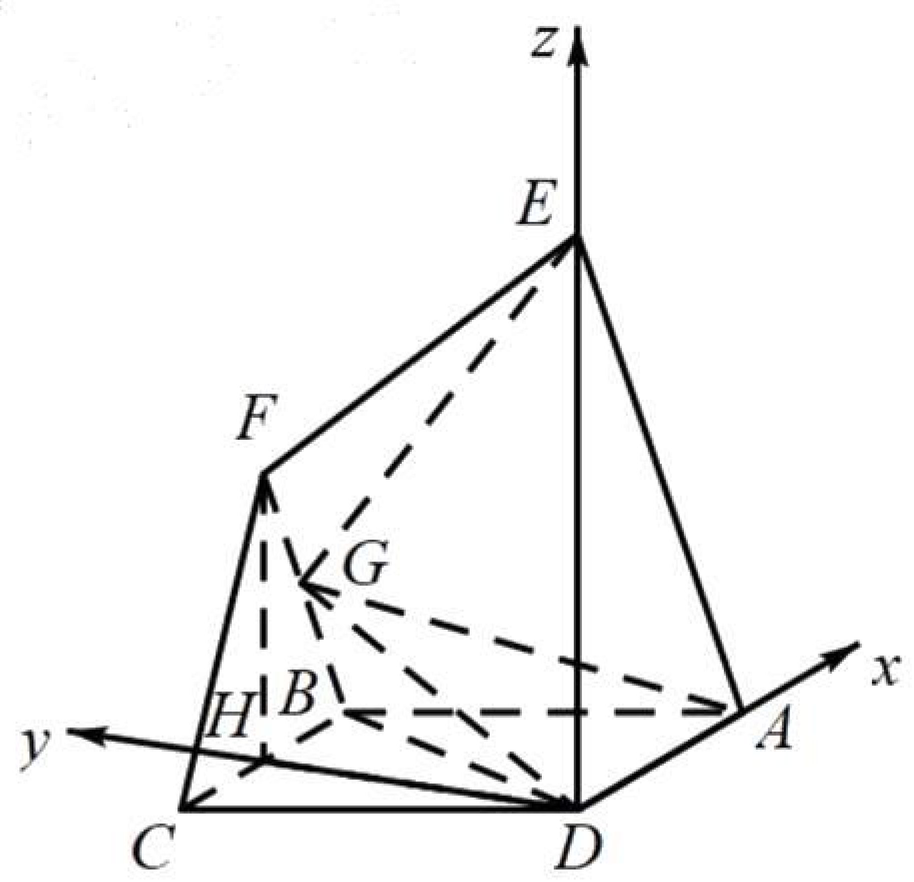
$\therefore DH \perp BC$，

$\because$四边形$ABCD$为菱形，$\therefore AD // BC$，$\therefore DH \perp AD$，……………………………………………………………………………4分

$\because DE \cap DH = D$，$\therefore AD \perp$平面$DEFH$，

$\therefore AD \perp EF$. ………………………………………………………………………………………………………6分

(2) 由 (1) 得$AD \perp DE$，$AD \perp DH$，



$\because DE \perp$平面$ABCD$，$\therefore$直线AE和平面$ABCD$所成角为$\angle DAE$，

即$\angle DAE = 60^0$，………………………………………………………7分

在$Rt\triangle ADE$中，$AD = 2$，$\therefore DE = 2\sqrt{3}, DH = \sqrt{3}$

以D为原点，DA，DH，DE所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则$A(2,0,0)$，$B(1,\sqrt{3},0)$，$E(0,0,2\sqrt{3})$，$F(0,\sqrt{3},\sqrt{3})$，

设$\overrightarrow{BG} = \lambda \overrightarrow{BF}\ (0 \le \lambda \le 1)$，

则$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = (-\lambda - 1, \sqrt{3}, \sqrt{3}\lambda)$，……………………………………………………………………8分

设$\boldsymbol{m} = (x_1, y_1, z_1)$是平面$ADG$的一个法向量，

则$\begin{cases} \boldsymbol{m} \perp \overrightarrow{DA}, \\ \boldsymbol{m} \perp \overrightarrow{AG}, \end{cases} \therefore \begin{cases} 2x_1 = 0, \\ (-\lambda - 1)x_1 + \sqrt{3}y_1 + \sqrt{3}\lambda z_1 = 0, \end{cases}$

取$y_1 = \lambda$，则$z_1 = -1$，

$\therefore \boldsymbol{m} = (0, \lambda, -1)$，………………………………………………………………………………………10分

设$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$是平面$AEG$的一个法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AE},\\\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AG},\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases}-2x_2+2\sqrt{3}z_2=0,\\(-\lambda-1)x_2+\sqrt{3}y_2+\sqrt{3}\lambda z_2=0,\end{cases}$

取$x_2=\sqrt{3}$，则$y_2=1$，$z_2=1$，$\therefore\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,1)$，……………………………………………………………………12分

$\because$平面ADG和平面AGE所成角的余弦值为$\frac{1}{5}$，

$\therefore\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|\lambda-1|}{\sqrt{\lambda^2+1}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{5}$，………………………………………………………………13分

$\therefore\lambda=\frac{1}{2}$或$\lambda=2$（舍去），$\therefore BG=\frac{1}{2}BF=1$……………………………………………………………15分

18. 本题主要考查圆、椭圆、直线与椭圆的位置关系等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力和创新能力，考查化归与转化思想、数形结合思想，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性，满分17分.

解法一：(1) 因为线段PF的垂直平分线与半径PC相交于点R，所以$RP=RF$.

又因为$|PC|=4$,所以$|RP|+|RC|=4$,所以$|RF|+|RC|=4$,

因为$F(-1,\ 0)$，$C(1,\ 0)$，

所以R的轨迹是以F、C为左右焦点的椭圆……………………………………………………………2分

所以$c=1,a=2$，所以Γ的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$………………………………………………………………4分

(2) 设直线l的方程为$x=ty+4$，点$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}x=ty+4,\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$消去$x$得：$(3t^2+4)y^2+24ty+36=0$，

则$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-24t}{3t^2+4},\\y_1\bullet y_2=\frac{36}{3t^2+4}\end{cases}$ $\Delta=144(t^2-4)>0$，则$t<-2$或$t>2$……………………………………………5分

$|y_1-y_2|=\frac{\sqrt{144(t^2-4)}}{3t^2+4)}$，………………………………………………………………………………6分

ΔMON面积$s=\frac{1}{2}\times4\times|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times4\times\frac{12\sqrt{(t^2-4)}}{3t^2+4}=\frac{24\sqrt{t^2-4}}{3t^2+4}$……………………………………9分

令$\sqrt{t^2-4}=u(u>0)$，则$t^2=u^2+4$，$s=\frac{24u}{3u^2+16}=\frac{24}{3u+\frac{16}{u}}\le\sqrt{3}$，

当且$u=\frac{4}{\sqrt{3}}$，即$t^2=\frac{28}{3}$时，ΔMON面积的最大值为$\sqrt{3}$……………………………………………10分

（3）因为$k_1+k_2=0$，所以直线QA,QM的倾斜角互补，所以$|QA|=|QD|$，

所以点Q在线段AD的垂直平分线上，所以$Q(1,-\frac{3}{t})$……………………………………………………11分

于是$|DM|=\sqrt{t^2+1}|y_1|$，$|DN|=\sqrt{t^2+1}|y_2|$，……………………………………………………12分

$|QM|=\sqrt{t^2+1}\left|y_1+\frac{3}{t}\right|$，$|QN|=\sqrt{t^2+1}\left|y_2+\frac{3}{t}\right|$……………………………………………13分

$\frac{|DM|\cdot|QN|}{|DN|\cdot|QM|}=\frac{|y_1|\cdot\left|y_2+\frac{3}{t}\right|}{|y_2|\cdot\left|y_1+\frac{3}{t}\right|}$，……………………………………………………14分

于是$\frac{|DM|\cdot|QN|}{|DN|\cdot|QM|}=\frac{\left|y_1\cdot(y_2+\frac{3}{t})\right|}{\left|y_2\cdot(y_1+\frac{3}{t})\right|}=\frac{\left|y_1\cdot y_2+\frac{3}{t}y_1\right|}{\left|y_1\cdot y_2+\frac{3}{t}y_2\right|}$，……………………………………………15分

因为$y_1\bullet y_2=\frac{-3}{2t}(y_1+y_2)$，

所以$\frac{|DM|\cdot|QN|}{|DN|\cdot|QM|}=\frac{\left|\frac{-3}{2t}(y_1+y_2)+\frac{3}{t}y_1\right|}{\left|\frac{3}{2t}(y_1+y_2)-\frac{3}{t}y_2\right|}=\frac{\left|\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2\right|}{\left|\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2\right|}=1$.

所以$\frac{|DM|\cdot|QN|}{|DN|\cdot|QM|}$的值1……………………………………………………………17分

解法二：（1）同解法一.

（2）显然直线l的斜率k存在且非零，设直线l的方程为$y=k(x-4)$，点$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=k(x-4),\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$

消去y得：$(4k^2+3)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$，

则$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{32k^2}{4k^2+3},\\x_1\bullet x_2=\frac{64k^2-12}{4k^2+3}\end{cases}$，$\Delta=144(1-4k^2)>0$，则$-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$且$k\neq0$，……………………………5分

$|MN|=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{k^2+1}\times\frac{12\sqrt{1-4k^2}}{4k^2+3}$……………………………………6分

O点到直线l的距离$d=\frac{4|k|}{\sqrt{k^2+1}}$，……………………………………………………………7分

所以ΔMON面积$s=\frac{1}{2}\times\sqrt{k^2+1}\times\frac{12\sqrt{1-4k^2}}{4k^2+3}\times\frac{4|k|}{\sqrt{k^2+1}}$

$=\frac{24|k|\cdot\sqrt{1-4k^2}}{4k^2+3}=\frac{24\sqrt{k^2-4k^4}}{4k^2+3}$ ……………………………………8分

$s^2=\frac{24^2\left(k^2-4k^4\right)}{\left(4k^2+3\right)^2}=-144\times[1-\frac{7}{4k^2+3}+\frac{12}{\left(4k^2+3\right)^2}]$

令$u=\frac{1}{4k^2+3}$，则$s^2=-144\left(12u^2-7u+1\right)$，……………………………………9分

当$u=\frac{7}{24}$,即$k^2=\frac{3}{28}$时，s^2的最大值为3，所以ΔMON面积的最大值为$\sqrt{3}$ ……………………10分

（3）同解法一.

解法三：（1）同解法一.

（2）显然直线l的斜率k存在且非零，设直线l的方程为$y=k(x-4)$，点$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases}y=k(x-4)\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$，

消去y得：$(4k^2+3)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$，

则$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{32k^2}{4k^2+3},\\x_1\bullet x_2=\frac{64k^2-12}{4k^2+3}\end{cases}$ $\Delta=144(1-4k^2)>0$，则$-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$且$k\neq0$，……………………………5分

$|MN|=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{k^2+1}\times\frac{12\sqrt{1-4k^2}}{4k^2+3}$ ……………………………6分

O点到线l的距离$d=\frac{4|k|}{\sqrt{k^2+1}}$，……………………………………………………7分

所以ΔMON面积$s=\frac{1}{2}\times\sqrt{k^2+1}\times\frac{12\sqrt{1-4k^2}}{4k^2+3}\times\frac{4|k|}{\sqrt{k^2+1}}$

$=\frac{24|k|\cdot\sqrt{1-4k^2}}{4k^2+3}=\frac{24\sqrt{k^2-4k^4}}{4k^2+3}$ ……………………………………8分

$s=24\times\frac{\sqrt{k^2(1-4k^2)}}{4k^2+3}=\frac{24}{4\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{16k^2\times3(1-4k^2)}}{4k^2+3}$

$$\le 2\sqrt{3}\times\frac{\frac{16k^2+3(1-4k^2)}{2}}{4k^2+3}=\sqrt{3}$$，……8分

即当$k^2=\dfrac{3}{28}$时，s有最大值为$\sqrt{3}$……10分

（2）（1）同解法一.

19. 本小题主要考查数列递推等基础知识，导数及其应用、函数的零点和不等式等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力等，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、数形结合思想，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性与综合性．满分17分．

解：（1）由$g(x)=f(x)-x=x\cos x-x$，$x\in(0,1]$，

得$g'(x)=\cos x-x\sin x-1$……1分

因为$x\in(0,1]$，则$\cos x-1<0$，$-x\sin x<0$即$g'(x)<0$……2分

所以$g(x)$在区间$(0,1]$递减，……3分

即$g(x)$值域为$[\cos 1-1,0)$……4分

（2）在区间$(0,\pi]$上，由$f(x)\le\dfrac{2ax}{x^2+2}$恒成立，得$2a\ge\left[(x^2+2)\cos x\right]_{\max}$，……5分

设$h(x)=(x^2+2)\cos x$，当$x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$时，$h(x)\le 0$，故只需研究$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时的情形……6分

$h'(x)=2x\cos x-(2+x^2)\sin x$，在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上，$h''(x)=-4x\sin x-x^2\cos x<0$

所以，$h'(x)$在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上递减，所以$h'(x)<h'(0)=0$……7分

即$h(x)=(x^2+2)\cos x$在在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上递减，所以$h(x)<h(0)=2$……8分

所以$2a\ge 2$，a的最小值为1……9分

（3）由$a_1=1$，$a_{n+1}=f(a_n)$，得$a_{n+1}=a_n\cos a_n$即$\cos a_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，

所以$\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos a_k=\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdots\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_{n+1}$……11分

由（1）可知，当$x\in(0,1]$时，$f(x)-x<0$，所以当$a_1=1$，$0<a_2<a_1\le 1$

当$0<a_n\le 1$时，有$0<a_{n+1}<a_n\le 1$，……13分

又由（2）知$x\in(0,1]$时，$\cos x\le\dfrac{2}{x^2+2}$，所以$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\cos a_n\le\dfrac{2}{a_n^2+2}$……14分

所以，$\frac{1}{a_{n+1}} \geq \frac{2+a_n^2}{2a_n} = \frac{1}{a_n} + \frac{a_n}{2}$，故 $a_n \leq \frac{2}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}$，……………………………………………………………15 分

所以 $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq (\frac{2}{a_2} - \frac{2}{a_1}) + (\frac{2}{a_3} - \frac{2}{a_2}) + (\frac{2}{a_4} - \frac{2}{a_3}) + \cdots + (\frac{2}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}) = \frac{2}{a_{n+1}} - 2$ ………………………………………16 分

所以 $\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \prod_{k=1}^{n} \cos a_k \leq 2 - 2a_{n+1}$ ………………………………………………………………………………………17 分