保密★启用前

准考证号______________________姓名__________

（在此卷上答题无效）

2026届高中毕业班模拟测试

数　学

2026.3

本试卷共4页，考试时间120分钟，总分150分.

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将答题卡交回.

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知α为第四象限角，$\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$，则$\cos\alpha=$

A. $-\dfrac{4}{5}$　　B. $-\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

2. 若复数z和$(1+i)z+1$均为纯虚数，则$|z|=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 设M、N为全集U的两个非空子集，若$M\subset \complement_U N$，则$N\cap(\complement_U M)=$

A. $\varnothing$　　B. N　　C. $\complement_U M$　　D. $\complement_U(M\cup N)$

4. 若直线$y=kx(k\neq 0)$和$y=0$被圆$(x-2)^2+(y-1)^2=5$所截得的弦长相等，则$k=$

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{4}{3}$　　C. 2　　D. 4

5. 已知函数$f(x)=\sin x+a\cos x$，若$f(x)\leqslant f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，则$f\left(\dfrac{13\pi}{3}\right)=$

A. 0　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

6. 设函数$f(x)=e^x+e^{-x}$，记$a=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$b=f\left(\log_2\dfrac{3}{2}\right)$，$c=f(2^{0.1})$，则

A. $b>a>c$　　B. $b>c>a$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

7. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点D满足$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}$，若$\triangle ABC$的面积为2，则$BD$的最小值为

A. $\sqrt{2}$　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. 2　　　　D. 3

8. 已知四面体$ABCD$的各顶点均在球O的球面上，平面$ABC\perp$平面BCD，$BC=2$，若$\triangle ABC$与$\triangle BCD$的外接圆面积之和为8π，则球O的半径为

A. $\sqrt{5}$　　　　B. $\sqrt{6}$　　　　C. $\sqrt{7}$　　　　D. 3

二、多项选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 为了研究某款新上市智能手环的直播间展示时长(单位:分钟)与即时下单量(单位:件)之间的关系，某电商平台随机记录了5场直播带货的数据，如下表所示：

直播间展示时长 x	1	2	3	4	5
即时下单量 y	12	18	25	30	34

若y与x的经验回归方程为$\hat{y}=\hat{b}x+7$，样本相关系数为r，则

A. $r>0$

B. 回归直线过点$(3,25)$

C. $\hat{b}=5.6$

D. 当直播间展示时长为10分钟时，即时下单量的值估计为63

10. 已知曲线$C: x|x|-y|y|=1$与坐标轴交于A，B两点，点P在C上，则

A. $|AB|=\sqrt{2}$

B. C为轴对称图形

C. 直线$y=x$与C有两个公共点

D. 使得$\triangle PAB$的面积为$\frac{1}{4}$的点P恰有2个

11. 设正整数$n=a_0\cdot 2^0+a_1\cdot 2^1+\cdots+a_8\cdot 2^8+a_9\cdot 2^9$，其中$a_i\in\{0,1\}$，$i=0,1,2,\cdots,9$. 定义$\omega(n)=a_0+a_1+\cdots+a_9$. 设集合$A=\{n\mid\omega(n)=2\}$，从$A$中随机选取一个元素，记为$X$，则

A. $10\in A$

B. A中的元素个数为36

C. $P(X\geqslant 100)=\frac{8}{15}$

D. $E(X)=\frac{1023}{5}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 在$\triangle ABC$中，$C=90°$，$AB=2$，$BC=1$，以$\triangle ABC$一边BC所在直线为轴，其余两边旋转一周形成的面围成的几何体的体积为 ▲ .

13. 某校安排3名男生和2名女生分两组去甲、乙两地参加社会调研，已知每组至多3人，且至少有1名男生，则不同的安排方案共有 ▲ 种(用数字作答).

14. 若函数$f(x)=|x^2-ax+1|-ax$恰有两个零点，则a的取值范围是 ▲ .

四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13分)

记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_1=3$，$S_n=na_n-n(n-1)$.

(1) 证明$\{a_n\}$是等差数列，并求a_n；

(2) 记数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，证明：$T_n<\frac{3}{4}$.

16. (15分)

设函数$f(x)=e^{2x}-2ax$.

(1) 讨论$f(x)$的单调性；

(2) 证明：当$a>0$时，$f(x)\geqslant \ln a-\frac{a^2}{2}+\frac{3}{2}$

17. (15分)

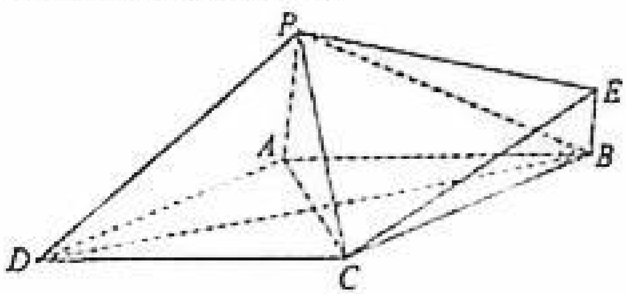
如图，在四棱锥P-$ABCD$中，底面$ABCD$为菱形，$\angle ADC=60°$，$AB=PB=PD=4$.

(1) 证明：$BD\perp$平面PAC；

(2) 已知$PA=2$，点E满足$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{AP}$，$0<\lambda<1$，$BD//$平面$PEC$.

(i) 求λ；

(ii) 求平面PBD与平面PEC夹角的余弦值.



18. (17分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A,B，$|AB|=4$，直线 $y=1$ 交 C 于 P，Q 两点，$|PQ|=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

(1) 求 C 的方程；

(2) 点 M 在线段 PQ 上，直线 AM，BM 分别交 C 于 D，E 两点，直线 AE，BD 交于点 N.

(i) 证明：$MN\perp AB$；

(ii) 判断 y 轴上是否存在定点 T，使得 $|NT|+|NM|$ 为定值，若存在，求出 T 的坐标；若不存在，说明理由.

19. (17分)

某班级在课堂上开展传递卡片游戏，规则如下：

①将 $n(n\in N^*,n\geq 2)$ 个学生依次编号为 $1,2,\cdots,n$，每个学生手中均有红卡、黑卡各一张；

②老师先给1号学生随机等可能地发放一张红卡或黑卡；

③2号从1号手中的三张卡片中随机抽取一张，接着，3号从2号手中的三张卡片中随机抽取一张，重复上述操作，直至 n 号从 $n-1$ 号手中的三张卡片中随机抽取一张；

④老师从 n 号手中的三张卡片中随机取出一张弃置.

则一轮游戏结束.

(1)求在一轮游戏结束后，1号学生手中恰有两张红卡的概率；

(2)求在一轮游戏结束后，n 号学生手中红卡张数的期望；

(3)在一轮游戏结束后，将手持两张同色卡片的学生淘汰，余下的学生重新编号，并按照游戏规则重新进行下一轮游戏；当且仅当只剩一个学生未被淘汰或所有学生均被淘汰时，游戏终止.求比赛进行两轮后终止，且此时只剩一个学生未被淘汰的概率.

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-2\sqrt{3}x_1+y_1-\sqrt{3}z_1=0\\ 4\sqrt{3}x_1=0\end{cases}$，令$y_1=\sqrt{3}$，$\boldsymbol{m}=\left(0,\sqrt{3},1\right)$． ……12 分

设平面 PEC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-2\sqrt{3}x_2+\dfrac{3}{2}y_2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_2=0\\ 3y_2-\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，令$y_2=1$，$\boldsymbol{n}=\left(0,1,\sqrt{3}\right)$． ……13 分

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ……14 分

所以平面 PBD 与平面 PEC 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$． ……15 分

解法二：（1）同解法一；厦门中学生助手微信公众号

（2）（i）同解法一；

（ii）过 P 作 BD 的平行线 l，因为 $l/\!/BD$，$EF/\!/BD$，所以 $l/\!/EF$，

所以 l 为平面 PBD 与平面 PEC 的交线． ……11 分

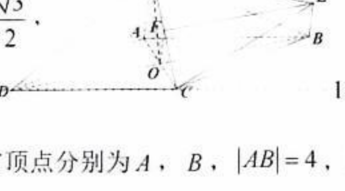
由（1）可得，$BD\perp PO$，$BD\perp$ 平面 PAC，$PC\subset$ 平面 PAC，所以 $BD\perp PC$，

因为 $l/\!/BD$，所以 $l\perp PC$，$l\perp PO$，

所以 $\angle OPC$ 为平面 PBD 与平面 PEC 夹角． ……13 分

因为 $OP=\sqrt{PB^2-OB^2}=2$，且 $OA=AP=2$，

所以 $\angle AOP=60^\circ$，$\angle OPC=30^\circ$，所以 $\cos\angle OPC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，



所以平面 PBD 与平面 PEC 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$． ……15 分

18．（17 分）已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A，B，$|AB|=4$，直线 $y=1$ 交 C 于 P，Q 两点，$|PQ|=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$．

（1）求 C 的方程；

（2）点 M 在线段 PQ 上，直线 AM，BM 分别交 C 于 D，E 两点，直线 AE，BD 交于点 N．

（i）证明：$MN\perp AB$；厦门中学生助手微信公众号

（ii）判断 y 轴上是否存在定点 T，使得 $|NT|+|NM|$ 为定值，若存在，求出 T 的坐标；若不存在，说明理由．

解：解法一：（1）依题意，$|AB|=2a=4$，所以 $a=2$， ……1 分

易知点 $\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},1\right)$ 在 C 上， ……2 分

所以 $\dfrac{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}{a^2}+\dfrac{1^2}{b^2}=1$，结合 $a=2$，解得 $b^2=3$， ……3 分

所以 C 的方程 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$． ……4 分

（2）（i）设 $M(x_0,1)\left(-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}<x_0<\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，$D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，

设直线 AM：$x=(x_0+2)y-2$，BM：$x=(x_0-2)y+2$．

由 $\begin{cases}x=(x_0+2)y-2\\ 3x^2+4y^2-12=0\end{cases}$ 可得，$\left[3(x_0+2)^2+4\right]y^2-12(x_0+2)y=0$，

所以 $y_1=\dfrac{12(x_0+2)}{3(x_0+2)^2+4}$， ……6 分

联立直线 BM 和 C 可得，$y_2=-\dfrac{12(x_0-2)}{3(x_0-2)^2+4}$， ……7 分

所以直线 BD 的斜率为 $\dfrac{y_1}{x_1-2}=\dfrac{y_1}{(x_0+2)y_1-4}=-\dfrac{3}{4}(x_0+2)$，

所以直线 BD：$y=-\dfrac{3}{4}(x_0+2)(x-2)$， ……8 分

同理直线 AE 的斜率为 $\dfrac{y_2}{x_2+2}=\dfrac{y_2}{(x_0-2)y_2+4}=-\dfrac{3}{4}(x_0-2)$，

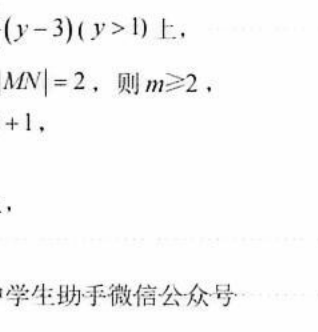
所以直线 AE：$y=-\dfrac{3}{4}(x_0-2)(x+2)$， 厦门中学生助手微信公众号 ……9 分

由 $\begin{cases}y=-\dfrac{3}{4}(x_0+2)(x-2)\\ y=-\dfrac{3}{4}(x_0-2)(x+2)\end{cases}$ 可得，$N\left(x_0,-\dfrac{3}{4}(x_0^2-4)\right)$，

所以 $MN\perp AB$． ……11 分

（ii）假设存在点 $T(0,t)$，使得 $|NT|+|NM|$ 为定值 m，

即 $|NT|+|NM|=\sqrt{x_0^2+\left(3-t-\dfrac{3x_0^2}{4}\right)^2}+2-\dfrac{3x_0^2}{4}=m$， ……12 分



所以 $\dfrac{x_0^2}{2}(3t-3m-1)+(t-3)^2-(m-2)^2=0$， ……14 分

故 $\begin{cases}3t-3m-1=0\\ (t-3)^2-(m-2)^2=0\end{cases}$，解得 $t=\dfrac{8}{3}$，$m=\dfrac{7}{3}$， ……16 分

所以存在 $T\left(0,\dfrac{8}{3}\right)$，使得 $|NT|+|NM|=\dfrac{7}{3}$ 为定值． ……17 分

解法二：（1）同解法一；

（2）（i）同解法一；

（ii）由（i）可知，点 $N(x_N,y_N)$ 在抛物线 Γ：$x^2=-\dfrac{4}{3}(y-3)(y>1)$ 上， ……12 分

假设 $|NT|+|NM|=m$，当 $M(0,1)$ 时，$N(0,3)$，此时 $|MN|=2$，则 $m\geqslant2$，

如图，M 到直线 $y=m+1$ 的距离 m，又 $1<y_N\leqslant3\leqslant m+1$，

则 N 点到直线 $y=m+1$ 的距离为 $m-|NM|=|NT|$，

所以 N 应在以 T 为焦点，$y=m+1$ 为准线的抛物线上，

所以 T 只能为 Γ 的焦点，$y=m+1$ 为 Γ 的准线， ……14 分

可求得 Γ 的焦点为 $\left(0,\dfrac{8}{3}\right)$，准线为 $y=\dfrac{10}{3}$， 厦门中学生助手微信公众号 ……16 分

所以当 T 为 $\left(0,\dfrac{8}{3}\right)$ 时，$|NT|=\dfrac{10}{3}-y_N$，$|NM|=y_N-1$，

所以 $|NT|+|NM|=\dfrac{10}{3}-y_N+y_N-1=\dfrac{7}{3}$．

所以存在 $T\left(0,\dfrac{8}{3}\right)$，使得 $|NT|+|NM|=\dfrac{7}{3}$ 为定值． ……17 分

解法三：（1）同解法一；

（2）（i）设 $S(x_s,y_s)$ 为 C 上一点，则 $k_{SA}\times k_{SB}=\dfrac{y_s}{x_s+2}\times\dfrac{y_s}{x_s-2}=\dfrac{y_s^2}{x_s^2-4}=-\dfrac{3}{4}$， ……6 分

设 $M(x_0,1)$，则 $k_{EB}=k_{MB}=\dfrac{1}{x_0-2}$，$k_{DA}=k_{MA}=\dfrac{1}{x_0+2}$，

因为 $k_{MB}\times k_{AE}=-\dfrac{3}{4}$，$k_{MA}\times k_{BD}=-\dfrac{3}{4}$，所以 $k_{AE}=-\dfrac{3}{4}(x_0-2)$，$k_{BD}=-\dfrac{3}{4}(x_0+2)$， ……8 分

所以直线 BD：$y=-\dfrac{3}{4}(x_0+2)(x-2)$，$AE$：$y=-\dfrac{3}{4}(x_0-2)(x+2)$， ……9 分

由 $\begin{cases}y=-\dfrac{3}{4}(x_0+2)(x-2)\\ y=-\dfrac{3}{4}(x_0-2)(x+2)\end{cases}$ 可得，$N\left(x_0,-\dfrac{3}{4}(x_0^2-4)\right)$，

所以 $MN\perp AB$． 厦门中学生助手微信公众号 ……11 分

（ii）同解法一、二；

解法四：（1）同解法一；

（2）（i）设 $D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$ 设直线 l_{AM}：$x=t_1y-2$，令 $y=1$，则 $M(t_1-2,1)$，

同理，设直线 l_{BM}：$x=t_2y+2$，令 $y=1$，则 $M(t_2+2,1)$，则有 $t_1-t_2=4$， ……5 分

联立 $\begin{cases}3x^2+4y^2-12=0\\ x=t_1y-2\end{cases}$，得 $(3t_1^2+4)y^2-12t_1y=0$，由韦达定理得 $y_1=\dfrac{12t_1}{3t_1^2+4}$，

代入直线 l_{AM} 得 $x_1=\dfrac{6t_1^2-8}{3t_1^2+4}$，所以 $D\left(\dfrac{6t_1^2-8}{3t_1^2+4},\dfrac{12t_1}{3t_1^2+4}\right)$，所以 $k_{BD}=\dfrac{12t_1}{-16}=-\dfrac{3t_1}{4}$，

所以 l_{BD}：$y=-\dfrac{3t_1}{4}(x-2)$，① ……7 分

联立 $\begin{cases}3x^2+4y^2-12=0\\ x=t_2y+2\end{cases}$，得 $(3t_2^2+4)y^2+12t_2y=0$，由韦达定理得 $y_2=-\dfrac{12t_2}{3t_2^2+4}$，

代入直线 l_{BM} 得 $E\left(\dfrac{-6t_2^2+8}{3t_2^2+4},\dfrac{-12t_2}{3t_2^2+4}\right)$，得 $k_{AE}=\dfrac{-12t_2}{16}=-\dfrac{3t_2}{4}$，

所以 l_{AE}：$y=-\dfrac{3t_2}{4}(x+2)$，② ……9 分

19．（17 分）某班级在课堂上开展传递卡片游戏，规则如下：厦门中学生助手微信公众号

①将 $n(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant2)$ 个学生依次编号为 1，2，…，n，每个学生手中均有红卡、黑卡各一张；

②老师先给 1 号学生随机等可能地发放一张红卡或黑卡；

③2 号从 1 号手中的三张卡片中随机抽取一张，接着，3 号从 2 号手中的三张卡片中随机抽取一张，重复上述操作，直至 n 号从 $n-1$ 号手中的三张卡片中随机抽取一张；

④老师从 n 号手中的三张卡片中随机取出一张弃置．

则一轮游戏结束．

（1）求在一轮游戏结束后，1 号学生恰有两张红卡的概率；

（2）求在一轮游戏结束后，n 号学生手中红卡张数的期望；

（3）在一轮游戏结束后，将手持两张同色卡片的学生淘汰，余下的学生重新编号，并按照游戏规则重新进行下一轮游戏；当且仅当只剩一个学生未被淘汰或所有学生均被淘汰时，游戏终止．求经过两轮游戏后只剩一个学生未被淘汰的概率．

解：（1）记 $D=$“一轮游戏结束后 1 号手中有两张红卡”．

若要 1 号手中是两张红卡，则应从在 1 号手中放入红卡，取出黑卡， ……2 分

所以 $P(D)=\dfrac{1\times1}{2\times3}=\dfrac{1}{6}$，

所以一轮游戏结束后，1 号学生恰有两张红卡的概率为 $\dfrac{1}{6}$； ……4 分

（2）记 $A_i=$“抽取卡片后 i 号学生手中有两张红卡和一张黑卡”，

$B_i=$“从 i 号手中取出的卡为红卡”，所以 $P(A_1)=\dfrac{1}{2}$，

$A_i=A_{i-1}B_{i-1}+\overline{A_{i-1}}B_{i-1}=B_{i-1}(2\leqslant i\leqslant n)$，$P\left(B_{i-1}|A_{i-1}\right)=\dfrac{2}{3}$，$P\left(B_{i-1}|\overline{A_{i-1}}\right)=\dfrac{1}{3}$，

则由全概率公式可得：

$P(A_i)=P(A_{i-1})P\left(B_{i-1}|A_{i-1}\right)+P\left(\overline{A_{i-1}}\right)P\left(B_{i-1}|\overline{A_{i-1}}\right)=\dfrac{2}{3}P(A_{i-1})+\dfrac{1}{3}P\left(\overline{A_{i-1}}\right)$，

则 $P(A_i)=\dfrac{1}{3}P(A_{i-1})+\dfrac{1}{3}$， ……6 分

$P(A_i)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(P(A_{i-1})-\dfrac{1}{2}\right)$，

所以 $P(A_i)=\dfrac{1}{2}$，$(1\leqslant i\leqslant n)$， ……8 分

假设一轮游戏结束后，n 号手中红卡个数 $X=0,1,2$，

$P(X=0)=P\left(\overline{A_n}\right)\times P\left(B_n|\overline{A_n}\right)=\dfrac{1}{6}$，

$P(X=1)=P(A_n)P(B_n|A_n)+P\left(\overline{A_n}\right)P\left(\overline{B_n}|\overline{A_n}\right)=\dfrac{2}{3}$，

$P(X=2)=P(A_n)\times P\left(\overline{B_n}|A_n\right)=\dfrac{1}{6}$，

所以 $E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{2}{3}+2\times\dfrac{1}{6}=1$． ……10 分

（3）由题意可知，一轮游戏后至少还有剩下两位学生未被淘汰，厦门中学生助手微信公众号

记 $M_k=$“一轮游戏后剩 k 个学生未被淘汰”，其中 $k=2,3,\cdots,n$，

记 $N=$“两轮游戏后恰好剩一个学生未被淘汰”，

则 $N=M_2N+M_3N+\cdots+M_nN$，

由（2）可知每个学生被淘汰的概率均为 $\dfrac{1}{3}$， ……11 分

所以 $P(N|M_k)=\mathrm{C}_k^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{2}{3}$， ……12 分

所以 $P(M_kN)=P(M_k)P(N|M_k)=\mathrm{C}_n^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\mathrm{C}_k^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}\dfrac{2}{3}=2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n k\mathrm{C}_n^k\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$， ……13 分

由全概率公式可得：

$P(N)=P(M_2N)+P(M_3N)+\cdots+P(M_nN)=2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\cdot\sum\limits_{k=2}^{n}k\mathrm{C}_n^k\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$ ……14 分

$\sum\limits_{k=2}^{n}n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}=\sum\limits_{k=2}^{n}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k=\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k-\mathrm{C}_{n-1}^{0}\left(\dfrac{2}{3}\right)^0\right)=\left(\left(1+\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-1\right)$

所以 $P(N)=\dfrac{4n}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\left(\left(\dfrac{5}{3}\right)^{n-1}-1\right)=\dfrac{4n}{3^{n+1}}\left(\left(\dfrac{5}{3}\right)^{n-1}-1\right)$ ……16 分

所以两轮游戏结束后，恰好剩一个学生未被淘汰的概率为 $\dfrac{4n}{3^{n+1}}\left(\left(\dfrac{5}{3}\right)^{n-1}-1\right)$

（或 $\dfrac{4n}{9}\cdot\left(\left(\dfrac{5}{9}\right)^{n-1}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$）． ……17 分

2026 届高中毕业班模拟测试参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C	A	B	B	D	C	B	C	ACD	ABD	ACD

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．答案：C

解析：因为 α 为第四象限角，所以 $\cos\alpha>0$，$\sin\alpha=-\frac{4}{3}\cos\alpha$，结合 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可得 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，故选 C．厦门中学生助手微信公众号

2．答案：A

解析：设 $z=bi\,(b\neq0)$，则 $(1+i)z+1=1-b+bi$，由纯虚数的定义得 $1-b=0$，所以 $b=1$，$|z|=b=1$，故选 A．

3．答案：B

解析：因为 $A\subseteq \complement_U B$，所以 $A\cap B=\varnothing$，所以 $B\subseteq \complement_U A$，故 $B\cap(\complement_U A)=B$，故选 B．

4．答案：B

解析：由题意得：圆心 $(2,1)$ 到直线 $y=kx(k\neq0)$ 和 $y=0$ 的距离相等，所以 $\frac{|2k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=\frac{4}{3}$（$k=0$ 舍去），故选 B．

5．答案：D

解析：由题意得 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 是 $f(x)$ 的最大值，所以 $f(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{1+a^2}$，解得 $a=\sqrt{3}$．

所以 $f(\frac{13\pi}{3})=f(\frac{13\pi}{3}-2\times2\pi)=f(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$．故选 D．

6．答案：C

解析：由 $f(x)=f(-x)$ 可知 $f(x)$ 是偶函数，当 $x>0$ 时，$f'(x)=e^x-e^{-x}>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增．由 $\sqrt{2}<\frac{3}{2}$ 得 $\log_2\frac{3}{2}>\frac{1}{2}$，所以 $b=f(\log_2\frac{3}{2})>f(\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{2})=a$．

又 $2^{0.1}>1>\log_2\frac{3}{2}$，所以 $c=f(2^{0.1})>f(\log_2\frac{3}{2})=b$，故选 C．

7．答案：B

解析：方法一：依题意，$\triangle ABD$ 的面积为 1，设 $AD=m$，则 $AB=2m$，所以

$S=\frac{1}{2}\cdot m\cdot 2m\sin A=1$，即 $m^2=\frac{1}{\sin A}$，在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理可得，

$BD^2=(2m)^2+m^2-2\cdot2m\cdot m\cos A$，所以 $BD^2=\frac{5-4\cos A}{\sin A}$，设 $\frac{5-4\cos A}{\sin A}=k(k>0)$，

则 $k\sin A+4\cos A=5\leq\sqrt{k^2+16}$，解得 $k\geq3$，当且仅当 $\sin A=\frac{3}{5}$ 时，等号成立，

所以 $BD\geq\sqrt{3}$，故选 B．厦门中学生助手微信公众号

方法二：以 BC 的中点为坐标原点，建立平面直角坐标系，不妨设 $B(-m,0)$，$C(m,0)$，

$A(0,\frac{2}{m})$，所以 $D(\frac{m}{2},\frac{1}{m})$，所以 $BD^2=\frac{9}{4}m^2+\frac{1}{m^2}\geq2\sqrt{\frac{9}{4}m^2\cdot\frac{1}{m^2}}=3$，当且仅当 $m^2=\frac{2}{3}$ 时等号成立，所以 $BD\geq\sqrt{3}$，故选 B．

8．答案：C

解析：设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 的外接圆半径分别为 r_1，r_2，所以 $\pi(r_1^2+r_2^2)=8\pi$，即 $r_1^2+r_2^2=8$，设球 O 的半径为 R，BC 的中点为 M，则 $OM^2=R^2-r_1^2+R^2-r_2^2$，又 $OM^2+BM^2=R^2$，所以 $R^2-r_1^2+R^2-r_2^2+1^2=R^2$，解得 $R=\sqrt{7}$，故选 C．

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．答案：ACD

解析：对于选项 A：由表格可知，y 随 x 的增大而增大，样本数据正相关，所以相关系数 $r>0$，A 选项正确．

对于选项 B：计算得 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\frac{12+18+25+30+34}{5}=23.8$，所以回归直线过点 $(3,23.8)$，B 选项错误；

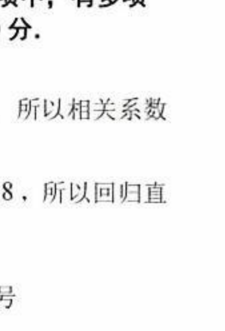
对于选项 C：$\hat{b}=\frac{23.8-7}{3}=5.6$，选项 C 正确；厦门中学生助手微信公众号

对于选项 D：当 $x=10$ 时，响应变量的预测值 $\hat{y}=5.6\times10+7=63$，D 选项正确，故选 ACD．

10．答案：ABD

解析：当 $x>0,y>0$ 时，C：$x^2-y^2=1$；当 $x<0,y>0$ 时，C：$-x^2-y^2=1$，不存在；

当 $x<0,y<0$ 时，C：$y^2-x^2=1$；当 $x>-0,y<0$ 时，C：$x^2+y^2=1$；



对于选项 A：令 $x=0$，解得 $y=-1$，令 $y=0$，解得 $x=1$，所以 $(1,0)$，$(0,1)$ 两点之间的距离为 $\sqrt{2}$，所以 $|AB|=\sqrt{2}$，故选项 A 正确；

对于选项 B：设 (x,y) 在 C 上，因为 (x,y) 关于 $y=-x$ 的对称点 $(-y,-x)$ 也在 C 上，所以 C 关于直线 $y=-x$ 对称，C 为轴对称图形，故选项 B 正确；

对于选项 C：将直线 $y=x$ 与 C 联立可得，$x|x|-x|x|=1$，该方程无解，故选项 C 错误；

对于选项 D：若 $\triangle PAB$ 的面积为 $\frac{1}{4}$，则 P 到直线 AB 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$，若 P 在第四象限，则 $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，因为 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}<\frac{1}{4}$，所以不存在满足条件的点 P．因为曲线 C：$x^2-y^2=1(x>0,y>0)$，C：$y^2-x^2=1(x<0,y<0)$ 的渐近线为 $y=x$，直线 $y=x$ 与 $y=x-1$ 之间的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，若 $\triangle PAB$ 的面积为 $\frac{1}{4}$，则 P 到直线 AB（$y=x$）的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$，满足题意的点 P 恰有两个，故选项 D 正确；故选 ABD．

11．答案：ACD

解析：对于选项 A：$10=2^3+2^1$，所以 $\omega(10)=2$，A 选项正确；

对于选项 B：A 中的元素个数为 $C_{10}^2=45$，B 选项错误；

对于选项 C：设 $n=2^s+2^t(s>t)$，A 中满足 $X\geq100$ 的元素如下：

因为 $2^6+2^5=96<100$，以 s 的大小作为分类依据，$s=7$ 共有 7 个，$s=8$ 共有 8 个，$s=9$ 共有 9 个，所以 $P(X\geq100)=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$，C 选项正确；

对于选项 D：$2^9\times9+(2^0+2^1+\cdots2^8)+2^8\times8+(2^0+2^1+\cdots2^7)+\cdots+2^1\times1+2^0=9\times1023$，

所以 $E(X)=\frac{9\times1023}{45}=\frac{1023}{5}$，D 选项正确；故选 ACD．

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．答案：π

解析：$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3}$，旋转所得几何体是以 AC 为底面半径，BC 为高的圆锥，体积 $V=\frac{1}{3}\pi\times AC^2\times BC=\pi$．

13．答案：18　厦门中学生助手微信公众号

解析：若一组 2 名男生，另一组 1 名男生 2 名女生，情况有 $C_3^1\times A_2^2=6$ 种；若一组 1 名男生 1 名女生，另一组 2 名男生 1 名女生，情况有 $C_3^1\times C_2^1\times A_2^2=12$ 种．所以不同的安排方案共有 18 种．

14．答案：$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

解析：设 $ax=t$，依题意，即 $|\frac{t^2}{a^2}-t+1|=t$ 有两个非负实数根，

所以 $\frac{t^2}{a^2}-t+1=t$ 或 $-(\frac{t^2}{a^2}-t+1)=t$（舍），所以 $\frac{1}{a^2}=\frac{2t-1}{t^2}=1-(\frac{1}{t}-1)^2<1$，

解得 $a>1$ 或 $a<-1$，故填 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$．

四、解答题：共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．(13 分) 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=3$，$S_n=na_n-n(n-1)$．

（1）证明 $\{a_n\}$ 是等差数列，并求 a_n；

（2）记数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明：$T_n<\frac{3}{4}$．

解：（1）当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}-(n-1)(n-2)$，…… 1 分

两式相减得，$a_n=S_n-S_{n-1}=na_n-(n-1)a_{n-1}-(n-1)n+(n-1)(n-2)$，…… 2 分

即 $(n-1)(a_n-a_{n-1}-2)=0$，…… 3 分

由于 $n-1\geqslant1$，所以 $a_n-a_{n-1}=2\,(n\geqslant2)$，…… 4 分

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 3，公差为 2 的等差数列．…… 5 分

所以 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$．…… 6 分

（2）由（1）知 $S_n=n^2+2n$，…… 8 分

所以 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，…… 9 分

所以 $T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，…… 10 分

所以 $T_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$，…… 12 分

又因为 $\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}>0$，所以 $T_n<\frac{3}{4}$．…… 13 分

16．（15 分）设函数 $f(x)=e^{2x}-2ax$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；厦门中学生助手微信公众号

（2）证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant\ln a-\frac{a^2}{2}+\frac{3}{2}$．

解：解法一：（1）$f'(x)=2(e^{2x}-a)$．…… 1 分

当 $a\leqslant0$ 时，$e^{2x}-a>0$，所以 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；…… 3 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)<0$，解得 $x<\frac{\ln a}{2}$，令 $f'(x)>0$，解得 $x>\frac{\ln a}{2}$，…… 5 分

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{\ln a}{2}\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{\ln a}{2},+\infty\right)$ 单调递增．

综上，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{\ln a}{2}\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{\ln a}{2},+\infty\right)$ 单调递增．…… 6 分

（2）由（1）知，当 $a>0$ 时，$f_{\min}(x)=f\left(\frac{\ln a}{2}\right)=a-a\ln a$．…… 7 分

下证 $a-a\ln a\geqslant\ln a-\frac{a^2}{2}+\frac{3}{2}$，即证 $(1+a)\ln a-\frac{a^2}{2}-a+\frac{3}{2}\leqslant0$．…… 8 分

令 $g(a)=(1+a)\ln a-\frac{a^2}{2}-a+\frac{3}{2}$，则 $g'(a)=\ln a-a+\frac{1}{a}$．…… 9 分

设 $h(a)=g'(a)$，则 $h'(a)=\frac{-a^2+a-1}{a^2}=-\frac{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{a^2}<0$．

所以 $h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减．　厦门中学生助手微信公众号　11 分

又 $h(1)=0$，则当 $a\in(0,1)$ 时，$h(a)>0$，$a\in(1,+\infty)$ 时，$h(a)<0$，

所以 $g(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减．…… 13 分

所以 $g(a)\leqslant g(1)=0$，…… 14 分

即 $(1+a)\ln a-\frac{a^2}{2}-a+\frac{3}{2}\leqslant0$，

所以 $f(x)\geqslant\ln a-\frac{a^2}{2}+\frac{3}{2}$．…… 15 分

解法二：（1）同解法一；厦门中学生助手微信公众号

（2）由（1）知，当 $a>0$ 时，$f_{\min}(x)=f(\frac{\ln a}{2})=a-a\ln a$．…… 7 分

下证 $a-a\ln a\geqslant\ln a-\frac{a^2}{2}+\frac{3}{2}$，即证 $\ln a-\frac{a^2-2a+3}{2(a+1)}\leqslant0$．…… 8 分

令 $g(a)=\ln a-\frac{a^2-2a+3}{2(a+1)}$，则 $g'(a)=\frac{a^3+a-2}{2a(a+1)^2}=\frac{(a-1)(a^2-a+2)}{2a(a+1)^2}$．…… 10 分

又 $a^2-a+2=(a-1)^2+1>0$，…… 11 分

所以当 $a\in(0,1)$ 时，$g'(a)>0$，$a\in(1,+\infty)$ 时，$g'(a)<0$，

所以 $g(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减．…… 13 分

所以 $g(a)\leqslant g(1)=0$，…… 14 分

即 $(1+a)\ln a-\frac{a^2}{2}-a+\frac{3}{2}\leqslant0$，所以 $f(x)\geqslant\ln a-\frac{a^2}{2}+\frac{3}{2}$．…… 15 分

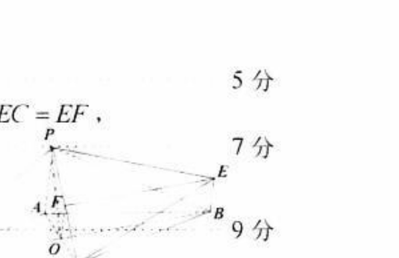
17．（15 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle ADC=60°$，$AB=PB=PD=4$．

（1）证明：$BD\perp$ 平面 PAC；

（2）已知 $PA=2$，点 E 满足 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{AP}$，$0<\lambda<1$，$BD//$ 平面 PEC．

（i）求 λ；

（ii）求平面 PBD 与平面 PEC 夹角的余弦值．



解：解法一：（1）因为 $ABCD$ 为菱形，所以 $BD\perp AC$．…… 1 分

设 AC，BD 交于点 O，则 $OB=OD$，又因为 $PB=PD$，所以 $BD\perp OP$，…… 2 分

因为 $AC\cap OP=O$，AC，$OP\subset$ 平面 PAC，

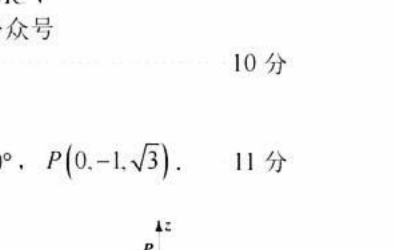
所以 $BD\perp$ 平面 PAC．…… 4 分

（2）（i）取 PC 中点 F，则 $OF//PA$ 且 $OF=\frac{1}{2}PA$．

又因为 $PA//EB$，所以 $OF//EB$，即 O,F,E,B 四点共面．…… 5 分

因为 $OB//$ 平面 PEC，$OB\subset$ 平面 $OBEF$，平面 $OBEF\cap$ 平面 $PEC=EF$，

所以 $OB//EF$．…… 7 分



因此 $OFEB$ 是平行四边形，

故 $OF=BE=\frac{1}{2}AP$，即 $\lambda=\frac{1}{2}$．…… 9 分

（ii）由（1）可知，$BD\perp$ 平面 PAC，因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以平面 $ABCD\perp$ 平面 PAC，因为平面 $ABCD\cap$ 平面 $PAC=AC$，

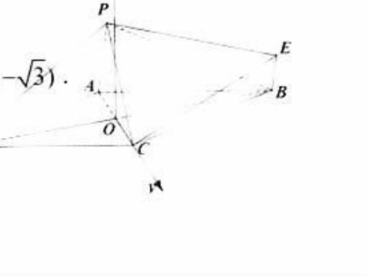
所以在平面 PAC 内作 Oz 垂直于 AC，厦门中学生助手微信公众号

如图，以 O 为原点，建立空间直角坐标系 $O-xyz$．…… 10 分

则 $D(2\sqrt{3},0,0)$，$B(-2\sqrt{3},0,0)$，$A(0,-2,0)$，$C(0,2,0)$．

因为 $OP=\sqrt{PB^2-OB^2}=2$，且 $OA=AP=2$，所以 $\angle AOP=60°$，$P(0,-1,\sqrt{3})$．…… 11 分

因此 $\overrightarrow{AP}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，



由此可知 $\overrightarrow{PB}=(-2\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PE}=\left(-2\sqrt{3},\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{PC}=(0,3,-\sqrt{3})$．

设平面 PBD 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则