2025—2026 学年（上）期末高中教学质量检测

高三数学试题

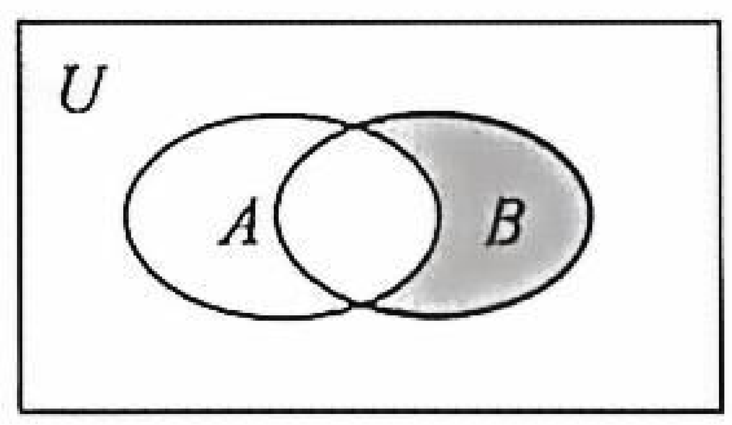
本试卷共 4 页，19 小题，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

考生注意：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，用 0.5mm 黑色签字笔将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$，若集合 $A=\{2,3,4\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}|x(x-3)\leqslant 0\}$，则图中阴影部分表示的集合为



A. $\{4\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{2,3\}$　　D. $\{0,1,2,3,4\}$

2. 若复数 $z=\dfrac{a-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$（i 为虚数单位，$a\in\mathbf{R}$）为纯虚数，则 $a=$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. ± 1

3. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项是

A. -120　　B. -20　　C. 20　　D. 120

4. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_2+a_3+a_4=3$，$a_5=5$，则 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_{11} 的第 60 百分位数是

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦点到渐近线的距离为 $2a$，则双曲线的离心率为

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{10}$

6. 若函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x)=e^{x}+a$，则 $f\left(\ln\dfrac{1}{3}\right)=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

7. 已知 $\alpha \in\left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$，且 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$

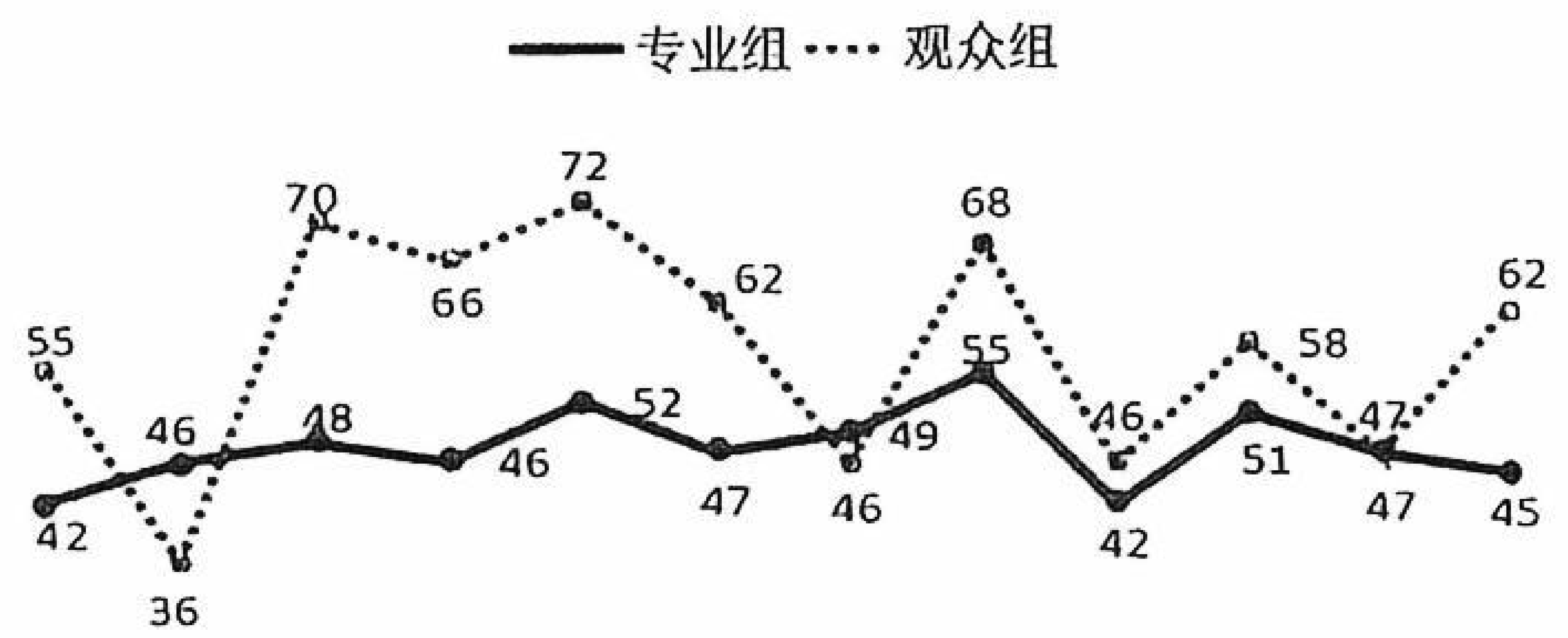
A. $-\dfrac{7}{9}$　　B. $-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$　　C. $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$　　D. $\dfrac{7}{9}$

8. 某舞台道具厂需定制一批圆锥形灯罩，要求灯罩的母线长度固定为 $2\sqrt{3}$ dm（骨架支撑长度），同时为了保证灯光折射角度均匀，要求将灯罩侧面沿母线剪开后展开图为一个半圆，那么该规格的圆锥形灯罩的外接球的表面积是

A. $4\pi\ \mathrm{dm}^2$　　B. $\dfrac{16\pi}{3}\ \mathrm{dm}^2$　　C. $\dfrac{32\pi}{3}\ \mathrm{dm}^2$　　D. $16\pi\ \mathrm{dm}^2$

二、多项选择题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。）

9. 在一个文艺比赛中，12 名专业人士和 12 名观众代表各组成一个评委小组，给参赛选手打分. 下面是两组评委对同一名选手的打分折线图，下列说法正确的是



A. 专业组的打分极差是 13

B. 专业组的打分平均分高于观众组的打分平均分

C. 观众组的打分方差高于专业组的打分方差

D. 观众组的打分中去掉最高分和最低分后平均分变高

10. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 BC，B_1C_1 的中点. 过 A，E，C_1 三点作平面 α，则

A. 平面 A_1BF∥平面 α

B. 平面 $BB_1D_1D\perp$平面 α

C. 点 C 到平面 α 的距离为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

D. 该正方体被平面 α 截得的截面的面积为$\sqrt{6}$

11. 已知函数$f(x)$为非常数函数，对$\forall x$，$y\in\mathbf{R}$，$f(x+y)=2f(x)f(y-1)$，则

A. $f(-1)=\dfrac{1}{2}$　　　　B. $f(x)>0$

C. $f(x)$是增函数　　　　D. $f(x-1)+f(-x-1)\geqslant 1$

三、填空题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。）

12. 直线 $y=2x+a$ 是曲线 $y=e^{x}+x$ 的切线，则 $a=$______.

13. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c. 若$A=\dfrac{2\pi}{3}$，$b=2$，$\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{2a}{c}$，$D$是$BC$的中点，则$AD=$______.

14. 已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是非零向量，$\boldsymbol{e}$是单位向量，且$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle=\dfrac{\pi}{6}$，$|\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{e}|=1$，则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最小值是______.

四、解答题（本大题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

15. （13 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=2a_n-n$.

（1）证明：数列$\{a_n+1\}$是等比数列；

（2）求数列$\{S_n\}$的前n项和T_n.

16. （15 分）

某公司举办抽奖活动，活动分为A，B两个项目，规则为：每位参与者先掷一枚质地均匀的骰子一次，若掷出点数为 1 或 2，则参加A项目抽奖；若掷出点数为 3，4，5，6，则参加B项目抽奖．每位参与者仅抽奖一次，已知A，B两个项目中奖的概率分别为$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{3}{10}$，中奖者可获得价值 200 元的购物券，未中奖者可获得价值 100 元的购物券.

（1）求每位参与者中奖的概率；

（2）已知甲、乙、丙 3 人参加抽奖活动，记 3 人获得的购物券总价值为X元，求X的分布列和期望.

17. （15 分）

已知$F(-1,0)$是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点，$C$，$D$分别是椭圆的左、右顶点，$|DF|=3|CF|$.

（1）求椭圆的方程；

（2）过点F的直线l交椭圆于A，B两点（异于C，D），记直线AC，BD的斜率分别为k_{AC}，k_{BD}. 证明：$k_{AC}=3k_{BD}$.

18. （17 分）

已知函数 $f(x)=\lambda\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\lambda>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图 1 所示，A，C 分别为图象的最高点和最低点，B，D 是图象与 x 轴的交点，$E(0,\ \sqrt{2})$ 是图象与 y 轴的交点. 现将绘有该图象的纸片沿着 x 轴翻折成如图 2 所示的直二面角 $A-BD-C$. 翻折后，$\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{6}$，$\cos\angle ABC=-\dfrac{1}{5}$.

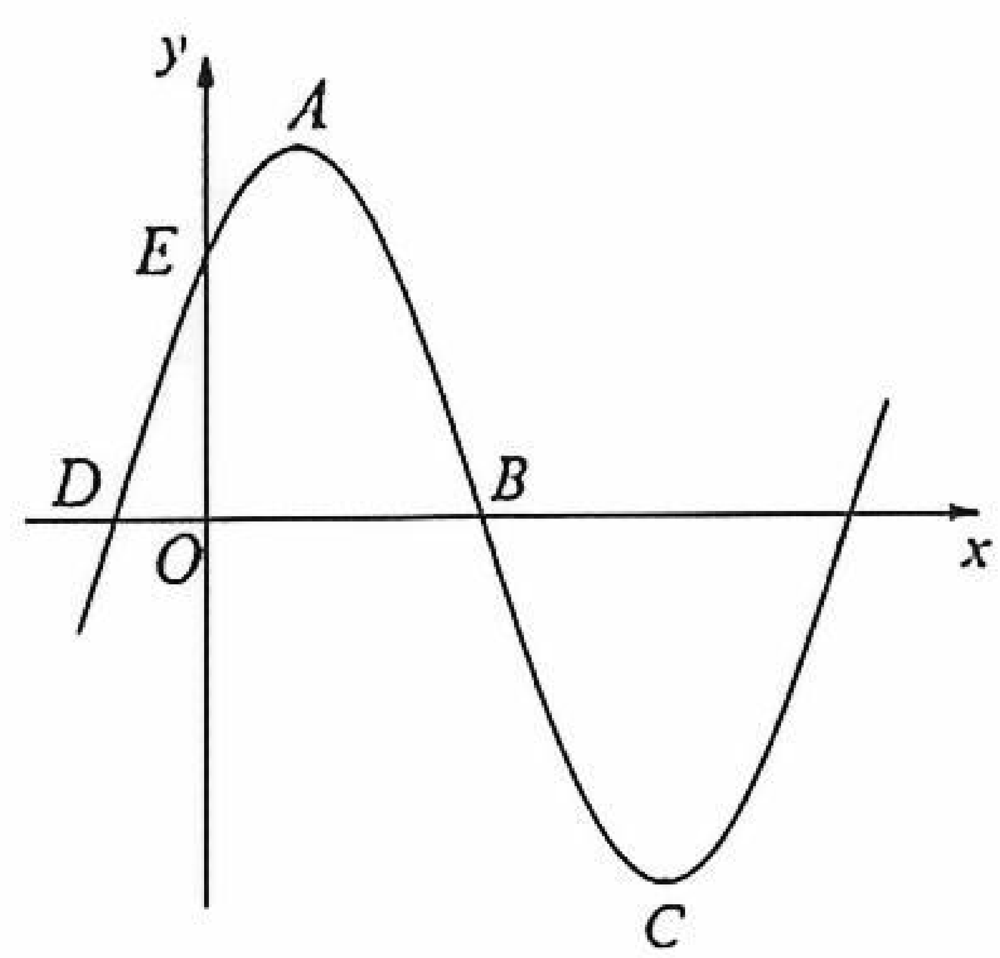


图 1

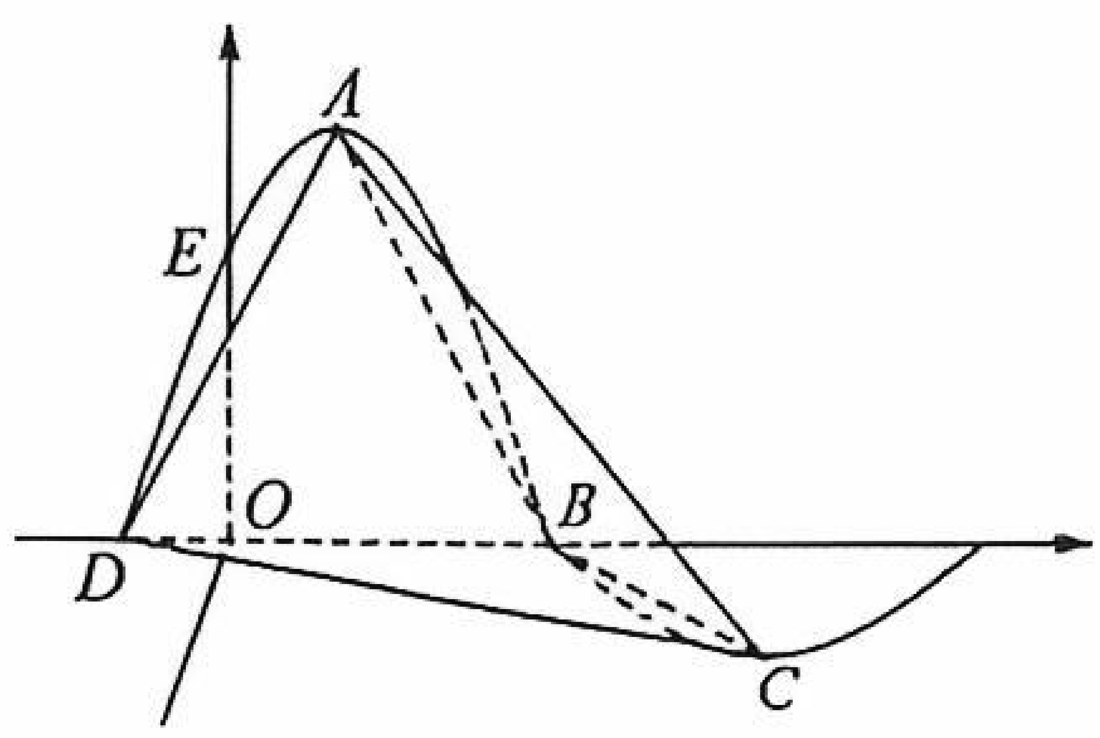


图 2

（1）求纸片翻折后，线段 AC 的长度；

（2）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（3）求纸片翻折后，平面 ABC 与平面 ACD 所成角的余弦值.

19. （17 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{e^{x-1}+1}+ax$.

（1）若 $f(x)$ 是增函数，求实数 a 的取值范围；

（2）证明：曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形；

（3）当 $a=1$ 时，对 $\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$，$f(x\sin x+t\cos x)+f\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)<4$，求实数 t 的取值范围.

2025—2026学年（上）期末高中教学质量检测

高三数学参考答案及评分细则

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考察内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数，选择题和填空题不给中间分。

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	B	C	C	A	C	D

二、多项选择题（本题共3小题，每小题6分，共18分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。）

题号	9	10	11
答案	ACD	AC	ABD

三、填空题（本大题共3小题，每小题5分，共15分。）

12. 1　　13. $\sqrt{3}$　　14. $\frac{1}{2}$

四、解答题（本大题共5小题，共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

15.（13分）

【解析】(1) 依题意，得

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2a_1-1$，所以 $a_1=1$．……………………1分

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2a_n-n)-\left[2a_{n-1}-(n-1)\right]=2a_n-2a_{n-1}-1$，

所以 $a_n=2a_{n-1}+1$，……………………4分

所以 $a_n+1=2(a_{n-1}+1)$．……………………5分

因此数列 $\{a_n+1\}$ 是以 $a_1+1=2$ 为首项，以2为公比的等比数列．……………………6分

(2) 由(1)可知，$a_n+1=2\times 2^{n-1}=2^n$，所以 $a_n=2^n-1$．……………………7分

所以 $S_n=2a_n-n=2^{n+1}-(n+2)$，……………………9分

所以$T_n=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n=\left(2^2-3\right)+\left(2^3-4\right)+\left(2^4-5\right)+\cdots+\left[2^{n+1}-(n+2)\right]$

$=\left(2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}\right)-\left[3+4+5+\cdots+(n+2)\right]$ ……………………………………10 分

$=\dfrac{4\times\left(1-2^n\right)}{1-2}-\dfrac{n(3+n+2)}{2}=2^{n+2}-4-\dfrac{n^2+5n}{2}=2^{n+2}-\dfrac{n^2+5n+8}{2}$. ……………………13 分

16.（15 分）

【解析】(1) 设$C=$“参与者参加A项目抽奖”，$\overline{C}=$“参与者参加B项目抽奖”，

$D=$“参与者中奖”，……………………………………………………………………1 分

则$P(C)=\dfrac{1}{3}$，$P\left(\overline{C}\right)=\dfrac{2}{3}$，$P(D|C)=\dfrac{3}{5}$，$P\left(D|\overline{C}\right)=\dfrac{3}{10}$. ……………………………… 3 分

所以$P(D)=P(CD)+P\left(\overline{C}D\right)=P(C)P(D|C)+P\left(\overline{C}\right)P\left(D|\overline{C}\right)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{2}{5}$.

所以每位参与者中奖的概率为$\dfrac{2}{5}$ ……………………………………………………………… 7 分

(2) 依题意得，X的所有可能取值为300，400，500，600. ……………………………8 分

$P(X=300)=C_3^0\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^0\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{27}{125}$，$P(X=400)=C_3^1\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^1\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{54}{125}$，

$P(X=500)=C_3^2\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^1=\dfrac{36}{125}$，$P(X=600)=C_3^3\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^3\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^0=\dfrac{8}{125}$，

……………………………………………………………………………………………12 分

所以X的分布列为

X	300	400	500	600
P	$\dfrac{27}{125}$	$\dfrac{54}{125}$	$\dfrac{36}{125}$	$\dfrac{8}{125}$

……………………………………………………………………………………………13 分

所以X的期望$E(X)=300\times\dfrac{27}{125}+400\times\dfrac{54}{125}+500\times\dfrac{36}{125}+600\times\dfrac{8}{125}=420$. ……………15 分

17.（15 分）

【解析】解法一：

(1) 依题意，得$c=1$，$a+c=3(a-c)$，……………………………………………… 2 分

所以$a=2$，所以$b^2=a^2-c^2=3$，………………………………………………………… 4 分

所以椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………… 5 分

(2) 因为直线l的斜率不为0，故可设直线l的方程为$x=my-1$，………………… 6 分

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ x=my-1,\end{cases}$得$\left(3m^2+4\right)y^2-6my-9=0$，…………………………………… 8 分

$\Delta=36m^2+36\left(3m^2+4\right)>0$．

设$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则$y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$． ………………… 10 分

因为$C(-2, 0)$，$D(2, 0)$，

所以$k_{AC}-3k_{BD}=\dfrac{y_1}{x_1+2}-\dfrac{3y_2}{x_2-2}=\dfrac{y_1}{my_1+1}-\dfrac{3y_2}{my_2-3}$

$$=\frac{(my_1y_2-3y_1)-(3my_1y_2+3y_2)}{(my_1+1)(my_2-3)}=\frac{-2my_1y_2-3(y_1+y_2)}{(my_1+1)(my_2-3)}$$ ……………… 13 分

$$=\frac{-2m\times(-9)-3\times 6m}{(my_1+1)(my_2-3)\left(3m^2+4\right)}=0.$$

即$k_{AC}=3k_{BD}$． …………………………………………………………………………… 15 分

解法二：

（1）同解法一．

（2）因为直线l的斜率不为0，故可设直线l的方程为$x=my-1$， ………………… 6 分

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ x=my-1,\end{cases}$得$\left(3m^2+4\right)y^2-6my-9=0$， …………………………………………… 8 分

$\Delta=36m^2+36\left(3m^2+4\right)>0$．

设$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则$y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$． ………………… 10 分

所以$\dfrac{y_1y_2}{y_1+y_2}=-\dfrac{9}{6m}=-\dfrac{3}{2m}$，所以$my_1y_2=-\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)$，

因为$C(-2, 0)$，$D(2, 0)$，…………………………………………………………………… 11 分

所以$\dfrac{k_{AC}}{k_{BD}}=\dfrac{\dfrac{y_1}{x_1+2}}{\dfrac{y_2}{x_2-2}}=\dfrac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\dfrac{y_1(my_2-1-2)}{y_2(my_1-1+2)}=\dfrac{my_1y_2-3y_1}{my_1y_2+y_2}$， ………………………… 13 分

$$=\frac{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)-3y_1}{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)+y_2}=\frac{-9y_1-3y_2}{-3y_1-y_2}=3$$，即$k_{AC}=3k_{BD}$． ……………………… 15 分

解法三：

（1）同解法一．

（2）因为直线l的斜率不为0，故可设直线l的方程为$x=my-1$， ………………… 6 分

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ x=my-1,\end{cases}$得$\left(3m^2+4\right)y^2-6my-9=0$， …………………………………………… 8 分

$\Delta=36m^2+36\left(3m^2+4\right)>0$．

设$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则$y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$． ……………………… 10 分

因为$C(-2,0)$，$D(2,0)$，

所以$\dfrac{k_{AC}}{k_{BD}}=\dfrac{\dfrac{y_1}{x_1+2}}{\dfrac{y_2}{x_2-2}}=\dfrac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\dfrac{y_1(my_2-1-2)}{y_2(my_1-1+2)}=\dfrac{my_1y_2-3y_1}{my_1y_2+y_2}$ ……………………………13分

$=\dfrac{-\dfrac{9m}{3m^2+4}-3\left(\dfrac{6m}{3m^2+4}-y_2\right)}{-\dfrac{9m}{3m^2+4}+y_2}=\dfrac{-9m-18m+3\left(3m^2+4\right)y_2}{-9m+\left(3m^2+4\right)y_2}=\dfrac{3\left[-9m+\left(3m^2+4\right)y_2\right]}{-9m+\left(3m^2+4\right)y_2}=3$，

即$k_{AC}=3k_{BD}$． ……………………………………………………………………………………………… 15分

解法四：

（1）同解法一.

（2）由（1）可知，$C(-2,0)$，$D(2,0)$．

当直线的斜率不存在时，直线l的方程为$x=-1$，不妨设点A在第二象限，

此时，直线l交椭圆于$A\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$，$B\left(-1,\ -\dfrac{3}{2}\right)$，$k_{AC}=\dfrac{3}{2}$，$k_{BD}=\dfrac{1}{2}$，此时$k_{AC}=3k_{BD}$．

…… 6 分

当直线l的斜率存在时，设直线l的方程为$y=k(x+1)$，

联立$\begin{cases}y=k(x+1),\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$\left(3+4k^2\right)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$， …………………………………… 8 分

因为l过焦点，所以l与椭圆必有两个交点．

设$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则$x_1+x_2=-\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$． ……………………… 10 分

因为$k_{AC}=\dfrac{y_1}{x_1+2}$，$k_{BD}=\dfrac{y_2}{x_2-2}$，

所以$k_{AC}-3k_{BD}=\dfrac{y_1}{x_1+2}-\dfrac{3y_2}{x_2-2}=\dfrac{y_1(x_2-2)-3y_2(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2-2)}$

$=\dfrac{k\left[(x_1+1)(x_2-2)-3(x_2+1)(x_1+2)\right]}{(x_1+2)(x_2-2)}$． …………………………………… 13 分

又因为$(x_1+1)(x_2-2)-3(x_2+1)(x_1+2)=-2x_1x_2-5(x_1+x_2)-8$

$=\dfrac{-2\left(4k^2-12\right)}{3+4k^2}-\dfrac{5\times8k^2}{3+4k^2}-8=0$，

所以$k_{AC}-3k_{BD}=0$，即$k_{AC}=3k_{BD}$．

综上所述，$k_{AC}=3k_{BE}$． ………………………………………………………………………… 15 分

18．（17 分）

【解析】解法一：

（1）在图 1 中分别作 $AF\perp x$ 轴，$CG\perp x$ 轴，垂足为 F 和 G，

由三角函数的性质可知：$AF=CG$，$BF=BG$，所以 $AB=BC$，……………………… 1 分

在图 2 中，$\cos\angle ABC=-\dfrac{1}{5}$，$\angle ABC\in(0,\pi)$，

所以 $\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，…………… 2 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\cdot\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{6}}{5}|AB|^2=\sqrt{6}$，

…………………………………………………………………………………………………4 分

解得 $AB=\sqrt{5}$，从而 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC}=2\sqrt{3}$． ……………… 5 分

（2）在图 2 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，$AF\subset$ 平面 ABD，$AF\perp BD$，所以 $AF\perp$ 平面 BCD，又 $CF\subset$ 平面 BCD，所以 $AF\perp CF$． ………… 7 分

设函数 $f(x)=\lambda\sin(\omega x+\varphi)$ 最小正周期为 T，

在 $Rt\triangle ABF$ 中，$AB^2=AF^2+BF^2=\lambda^2+\left(\dfrac{T}{4}\right)^2=5$，

在 $Rt\triangle AFC$ 中，$AC^2=AF^2+FC^2=\lambda^2+\left[\lambda^2+\left(\dfrac{T}{2}\right)^2\right]=2\lambda^2+\left(\dfrac{T}{2}\right)^2=12$

联立两式可得：$T=4$，$\lambda=2$，……………………………………………………………… 10 分

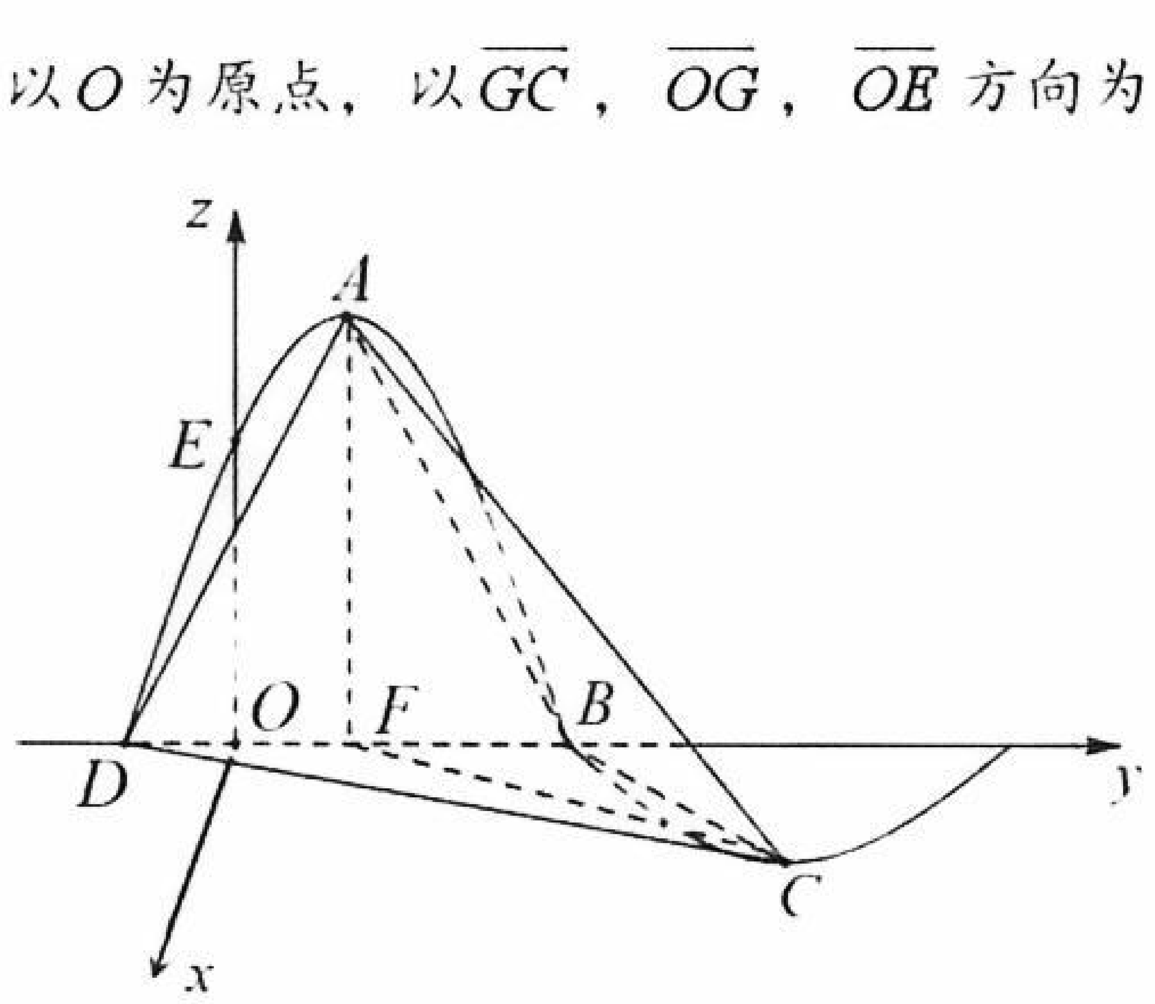
所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{2}$． ………………………………………………………………………… 11 分

将 $E\left(0,\sqrt{2}\right)$ 代入 $f(x)$ 得 $\sqrt{2}=2\sin\varphi$，

又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$． ……………………………… 12 分

（3）由 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 知，$AF=CG=2$，$OF=OD=\dfrac{1}{2}$，$BF=BG=1$．

以 O 为原点，以 $\overline{GC}$，$\overline{OG}$，$\overline{OE}$ 方向为 x，y，z 轴正方向建立空间直角坐标系，



则 $D\left(0,-\dfrac{1}{2},0\right)$，$A\left(0,\dfrac{1}{2},2\right)$，$B\left(0,\dfrac{3}{2},0\right)$，$C\left(2,\dfrac{5}{2},0\right)$，…………………………………… 13 分

所以 $\overrightarrow{DA}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(2,1,0)$． …………………………………… 14 分

设平面 DAC 法向量为 $\vec{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，平面 BAC 法向量 $\vec{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\vec{n}_1=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}_1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y_1+2z_1=0,\\ 2x_1+2y_1-2z_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=-2$，则 $x_1=3$，$z_1=1$，故 $\vec{n}_1=(3,-2,1)$． …………………………………… 15 分

由 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}_2=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}_2=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x_2+y_2=0,\\ 2x_2+2y_2-2z_2=0,\end{cases}$

令 $y_2=-2$，则 $x_2=1$，$z_2=-1$，故 $\vec{n}_2=(1,-2,-1)$． …………………………………… 16 分

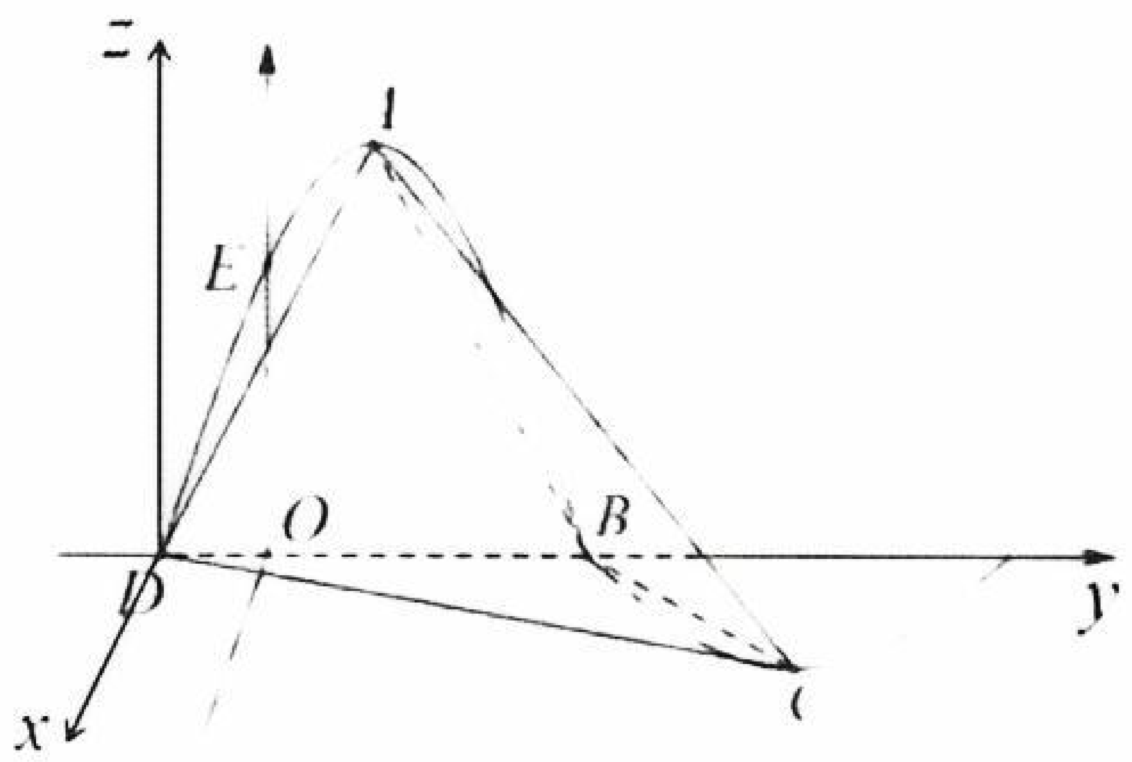
因此 $\left|\cos\langle\vec{n}_1,\ \vec{n}_2\rangle\right|=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\dfrac{3+4-1}{\sqrt{14}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$．

所以平面 ABC 与平面 ACD 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$． …………………………………… 17 分

解法二：

（1）（2）同解法一；

（3）以 D 为原点，以 $\overline{GC}$，$\overline{OG}$，$\overline{OE}$ 方向为 x，y，z 轴正方向建立空间直角坐标系，



则 $D(0,0,0)$，$A(0,1,2)$，$B(0,2,0)$，$C(2,3,0)$，…………………………………… 13 分

所以 $\overrightarrow{DA}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(2,1,0)$． …………………………………… 14 分

设平面 DAC 法向量为 $\vec{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，平面 BAC 法向量 $\vec{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\vec{n}_1=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}_1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y_1+2z_1=0,\\ 2x_1+2y_1-2z_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=-2$，则 $x_1=3$，$z_1=1$，故 $\vec{n}_1=(3,-2,1)$． …………………………………… 15 分

由 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}_2=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}_2=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x_2+y_2=0,\\ 2x_2+2y_2-2z_2=0,\end{cases}$

令 $y_2=-2$，则 $x_2=1$，$z_2=-1$，故 $\vec{n}_2=(1,-2,-1)$． …………………………………… 16 分

因此$\left|\cos\langle\vec{n}_1, \vec{n}_2\rangle\right|=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\dfrac{3+4-1}{\sqrt{14}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

所以平面ABC与平面ACD所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ……………………………………17分

19.（17分）

【解析】解法一:

（1）依题意，得$f'(x)=\dfrac{-2e^{x-1}}{\left(e^{x-1}+1\right)^2}+a$，……………………………………………2分

因为$f(x)$是增函数，所以$f'(x)\geq 0$，即$a\geq\dfrac{2e^{x-1}}{\left(e^{x-1}+1\right)^2}$在$\mathbf{R}$上恒成立，……………3分

因为$\dfrac{2e^{x-1}}{\left(e^{x-1}+1\right)^2}\leq\dfrac{2e^{x-1}}{\left(2\sqrt{e^{x-1}\times 1}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$（当且仅当$x=1$时等号成立），……………………4分

所以$a\geq\left[\dfrac{2e^{x-1}}{\left(e^{x-1}+1\right)^2}\right]_{\max}=\dfrac{1}{2}$，

经检验，当$a\geq\dfrac{1}{2}$时，$f(x)$是增函数. ………………………………………………………5分

（2）设$F(x)=f(x+1)-(a+1)$，则有$F(x)=\dfrac{2}{e^x+1}+a(x+1)-(a+1)=\dfrac{2}{e^x+1}+ax-1$，

所以$F(x)+F(-x)=\dfrac{2}{e^x+1}+ax-1+\dfrac{2}{e^{-x}+1}-ax-1=\dfrac{2\left(e^x+e^{-x}+2\right)}{\left(e^x+1\right)\left(e^{-x}+1\right)}-2=0$，

又因为$F(x)$的定义域为$\mathbf{R}$关于原点对称，所以$F(x)$是奇函数，其图象关于原点中心对称.

将$y=F(x)$的图象向右平移1个单位长度，再向上平移$a+1$个单位长度可得到$y=f(x)$的图象，所以曲线$y=f(x)$是关于点$(1, a+1)$成中心对称的图形. ……………………9分

（3）不等式$f(x\sin x+t\cos x)+f\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)<4$可化为$f(x\sin x+t\cos x)<4-f\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)$，

由（2）知，$f(x)+f(2-x)=2(a+1)$，

当$a=1$，$x=\dfrac{\pi}{2}$时，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4-f\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$f(x\sin x+t\cos x)<f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，………10分

又$f(x)$是增函数，所以$x\sin x+t\cos x<\dfrac{\pi}{2}$. ……………………………………………11分

因此，对$\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$，$x\sin x+t\cos x<\dfrac{\pi}{2}$恒成立.

令$g(x)=x\sin x+t\cos x$，则$g'(x)=(1-t)\sin x+x\cos x$. ……………………………12分

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 时：

①若 $t\geq 1$，则 $1-t\leq 0$，又因为 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，所以 $\cos x<0$，$\sin x>0$，

所以 $(1-t)\sin x\leq 0$，$x\cos x<0$，所以 $g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 单调递减，所以 $g(x)<f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$，所以 $t\geq 1$ 符合题意. ……… 13 分

②若 $t<1$，令 $h(x)=g'(x)=(1-t)\sin x+x\cos x$，则 $h'(x)=(2-t)\cos x-x\sin x$，

因为当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 上单调递减.

又 $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-t>0$，$h(\pi)=-\pi<0$，

所以存在唯一 $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，使得 $h(x_0)=g'(x_0)=0$.

因此当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\ x_0\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\ x_0\right)$ 上单调递增，

所以 $g(x)>g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$，所以 $g(x)<\frac{\pi}{2}$ 对任意 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 不恒成立，

所以 $t<1$ 不符合题意. ……………………………………………………………………… 14 分

由①②可知，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 时，若 $t\geq 1$，$x\sin x+t\cos x<\frac{\pi}{2}$ 恒成立. ………… 15 分

当 $x\in\left[\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$ 时，若 $t\geq 1$，则 $x\sin x+t\cos x<0<\frac{\pi}{2}$ 恒成立. ………………… 16 分

综上所述，t 的取值范围为 $[1,\ +\infty)$. ……………………………………………………… 17分

解法二：

（1）依题意，得 $f'(x)=\frac{-2e^{x-1}}{\left(e^{x-1}+1\right)^2}+a$，………………………………………………… 2 分

因为 $f(x)$ 是增函数，所以 $f'(x)\geq 0$，即 $a\geq\frac{2e^{x-1}}{\left(e^{x-1}+1\right)^2}$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，……………… 3 分

因为 $\frac{2e^{x-1}}{\left(e^{x-1}+1\right)^2}=\frac{2e^{x-1}}{\left(e^{x-1}\right)^2+2e^{x-1}+1}=\frac{2}{e^{x-1}+2+\frac{1}{e^{x-1}}}\leq\frac{2}{2\sqrt{e^{x-1}\cdot\frac{1}{e^{x-1}}}+2}=\frac{1}{2}$，

（当且仅当 $x=1$ 时等号成立），……………………………………………………………… 4 分

所以 $\left[\frac{2e^{x-1}}{\left(e^{x-1}+1\right)^2}\right]_{\max}=\frac{1}{2}$，所以 $a\geq\frac{1}{2}$.

经检验，当$a\geq\frac{1}{2}$时，$f(x)$是增函数．······5分

（2）因为$f(2-x)=\frac{2}{e^{1-x}+1}+a(2-x)=\frac{2e^{x-1}}{1+e^{x-1}}+2a-ax$，

所以$f(x)+f(2-x)=\frac{2}{e^{x-1}+1}+ax+\frac{2e^{x-1}}{1+e^{x-1}}+2a-ax=2(a+1)$，

所以$2(a+1)-f(x)=f(2-x)$．

因此，曲线$y=f(x)$上的点$(x,f(x))$关于$(1,a+1)$的对称点$(2-x,2(a+1)-f(x))$

也在曲线$y=f(x)$上，

所以曲线$y=f(x)$是关于点$(1,a+1)$成中心对称的图形．······9分

（3）不等式$f(x\sin x+t\cos x)+f\left(2-\frac{\pi}{2}\right)<4$可化为$f(x\sin x+t\cos x)<4-f\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$，

由（2）知，$f(x)+f(2-x)=2(a+1)$，

当$a=1$，$x=\frac{\pi}{2}$时，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4-f\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$，所以$f(x\sin x+t\cos x)<f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，······10分

又$f(x)$是增函数，所以$x\sin x+t\cos x<\frac{\pi}{2}$．······11分

因此，对$\forall x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，$x\sin x+t\cos x<\frac{\pi}{2}$恒成立．

因为$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，$\cos x<0$，所以$t>\frac{\frac{\pi}{2}-x\sin x}{\cos x}$恒成立．······12分

令$p(x)=\frac{\frac{\pi}{2}-x\sin x}{\cos x}$，$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，则$p'(x)=\frac{-\sin x\cos x+\frac{\pi}{2}\sin x-x}{\cos^2 x}$．

令$q(x)=-\sin x\cos x+\frac{\pi}{2}\sin x-x$，$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，则$q'(x)=\left(\frac{\pi}{2}-2\cos x\right)\cos x$．······13分

因为$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$时，所以$-1<\cos x<0$，所以$q'(x)=\left(\frac{\pi}{2}-2\cos x\right)\cos x<0$，

所以$q(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递减．······14分

因此，$q(x)<q\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，所以$p'(x)<0$，所以$p(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递减．

又因为$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}p(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-(\sin x+x\cos x)}{-\sin x}=1$，所以$p(x)<1$．······16分

因此，$t\geq1$，即t的取值范围为$[1,+\infty)$．······17分