保密★使用前

泉州市2026届高中毕业班模拟考试（一）

2026.03

高 三 数 学

本试卷共19题，满分150分，共4页。考试用时120分钟。

★龙马精神★

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 考生作答时，将答案答在答题卡上。请按照题号在各题的答题区域（黑色线框）内作答，超出答题区域书写的答案无效。在草稿纸、试题卷上答题无效。
3. 选择题答案使用2B铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号；非选择题答案使用0.5毫米的黑色中性（签字）笔或碳素笔书写，字体工整、笔迹清楚。
4. 保持答题卡卡面清洁，不折叠、不破损。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{-1,0\}$，$B=\{x\mid\sqrt{x}=2\}$，则 $A\cup B=$

A．$\varnothing$　　B．$\{-1,0\}$　　C．$\{-1,0,2\}$　　D．$\{-1,0,4\}$

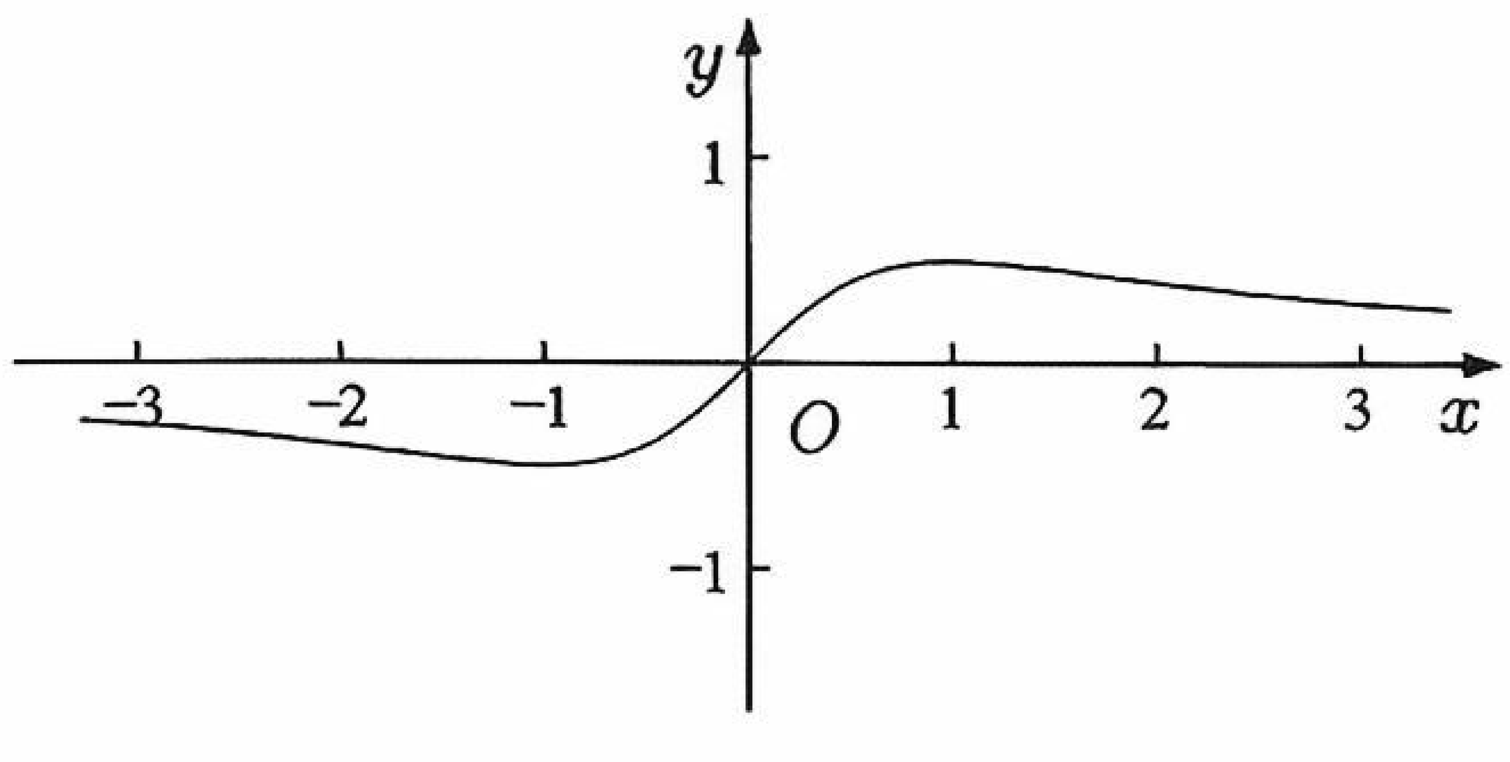
2．若复数 z 满足 $|z|^2=\mathrm{i}z$，则 $z=$

A．$-\mathrm{i}$　　B．i　　C．0或$-\mathrm{i}$　　D．0或i

3．已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{b}=(6,6,6)$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

4．已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图，则 $f(x)$ 的解析式可能是



A．$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

B．$f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$

C．$f(x)=\sin\dfrac{\pi}{2}x$

D．$f(x)=x\ln(|x|+1)$

5．为推进“数字适老，智慧生活”，某社区开展AI应用培训活动．现随机抽取一位学员，其每日在线学习积分 X 的取值分别为 $0,1,2$，若 $E(X)=1$，$P(X\geqslant 1)=0.9$，则 $D(X)=$

A．0.1　　B．0.2　　C．0.3　　D．0.4

6．已知直线 $l:x-y-2=0$，圆 C 关于 y 轴对称，且过点 $A(-1,3),B(1,1)$，则圆 C 上的点到 l 的距离的最大值与最小值之和等于

A．$\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$4\sqrt{2}$

7. 已知α,β,γ成等差数列，$2\sin\alpha-\sin\gamma=2\cos\beta$，$2\cos\alpha+\cos\gamma=3\sin\beta$，则$\cos(\alpha+\gamma)=$

A. $-\dfrac{3}{13}$　　B. $\dfrac{3}{13}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. 1

8. 已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$的图象是一条连续不断的曲线，且$f(-x)+f(x)=0$，若当$x>0$时，$[f(x)+f'(x)]e^{x}>[f(x)-f'(x)]e^{-x}$，则

A. $f(e)<f(-e)$　　B. $xf(x)\leqslant 0$

C. $f(x)$存在极值点　　D. $f(x)$有且只有一个零点

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，有选错的得0分，部分选对的得部分分。

9. 数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\lambda a_n+\mu$，则下列说法正确的是

A. 当$\lambda=1,\mu=2$时，$a_n=2n-1$　　B. 当$\lambda=2,\mu=0$时，$a_n=2^n$

C. 当$\lambda=-1,\mu=1$时，$a_{2026}=1$　　D. 当$\lambda=2,\mu=2$时，$a_n=3\times2^{n-1}-2$

10. 如图所示的花灯的轮廓是正六棱柱$ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，其棱长均相等，且所有棱长的总和为36，则

A. AB// 平面CD_1F

B. $BD_1\perp$平面B_1DE

C. 直线DE到平面B_1CF的距离等于$\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

D. 平面ABC_1与平面B_1CF的夹角的余弦值等于$\dfrac{1}{7}$

11. 以坐标轴为对称轴的双曲线C过点$(\sqrt{2},2\sqrt{2})$，其一条渐近线过点$(1,2\sqrt{2})$，且两焦点为F_1,F_2．若直线$l:x=my+t$分别与C的两支交于M,N两点，线段MN的中点为P，则下列说法正确的是

A. 双曲线C的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$

B. 若$m=1$，则点P在直线$y=4x$上

C. 若$t=0$，则$|MF_1|\cdot|NF_1|$的取值范围为$(8,+\infty)$

D. 若$t=3$，则$\triangle MF_1F_2$与$\triangle NF_1F_2$的内切圆的半径之比为2或$\dfrac{1}{2}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12. 某学习小组由6名男生和4名女生组成，从中依次随机抽取2人参加知识竞赛，则在第一次抽到男生的条件下，第二次抽到女生的概率等于__________.

13. 将10个数从小到大排列，若这列数成等差数列，且所有奇数项的和为30，所有偶数项的和为40，则这列数的中位数等于__________.

14. 若存在4条不同的直线既是圆$x^2+y^2=4$的切线，也是曲线$y=ax+\dfrac{1}{x}(a>0)$的切线，则a的取值范围是__________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(2,0)$，动点 P 关于 O 的对称点为 Q，且直线 AP,AQ 的斜率之积是 $-\frac{1}{4}$，记 P 的轨迹为曲线 E．

（1）求 E 的方程；

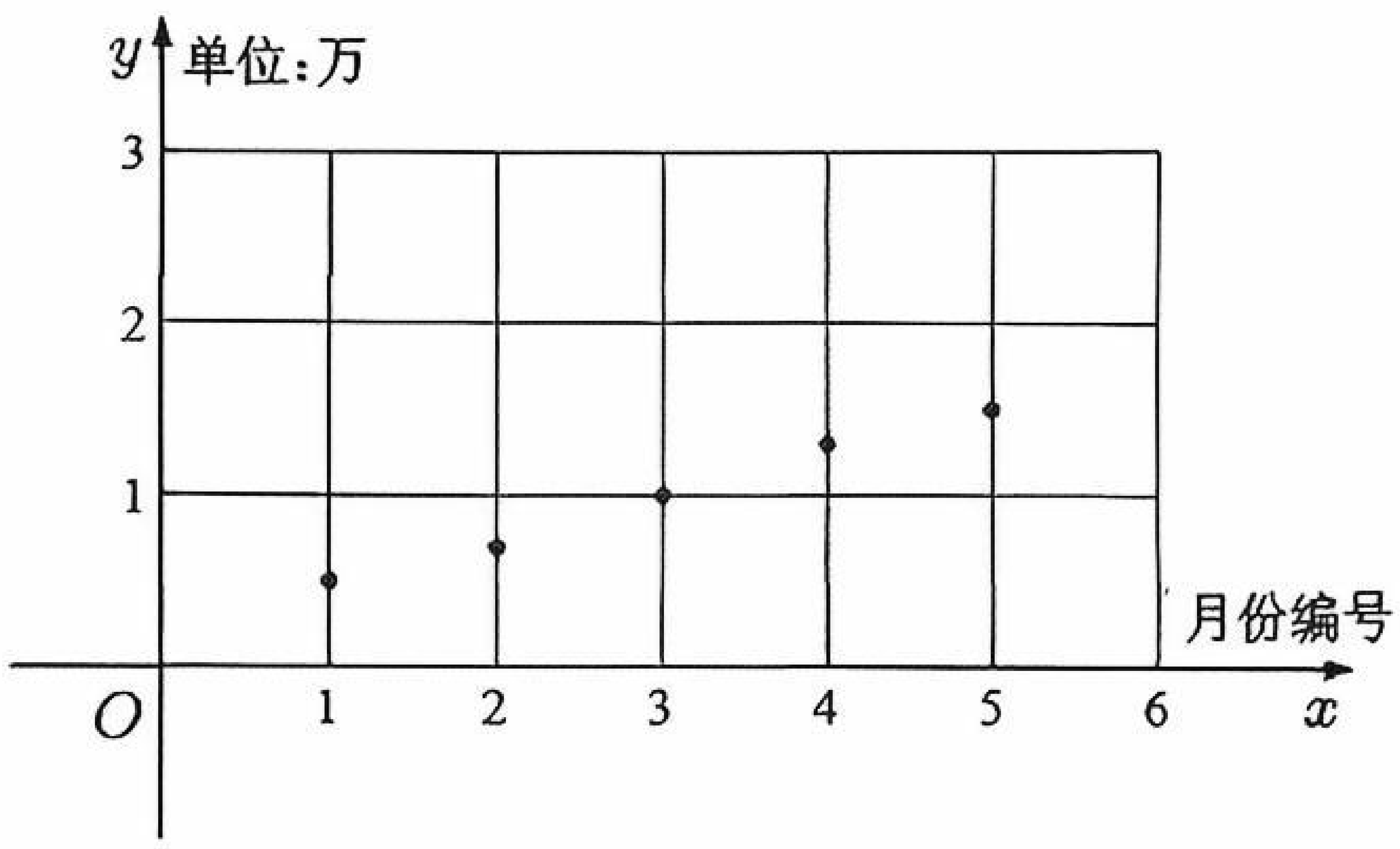
（2）若 P 关于 x 轴的对称点为 M，求△PQM 的面积的最大值．

16.（15 分）

为深入贯彻“五育融合”的教育理念，某地在中小学全面推广劳动教育实践课程，定期统计学生参与劳动实践的情况，下表是课程开设后前 5 个月的数据，其中 x 表示月份编号，y 表示该月份日平均参与劳动实践的学生人数（单位：万）．

月份编号 x	1	2	3	4	5
日平均参与人数 y	0.5	0.7	1	1.3	1.5

根据表格数据得到如图所示的散点图．



（1）根据散点图推断 y 与 x 是否线性相关，计算样本相关系数，并推断它们的相关程度；

（2）由（1）所得结论，建立 y 关于 x 的回归方程，并预测第 6 个月的日平均参与人数；

（3）假设第 6 个月（按 30 天计）的日参与人数 Y（单位：万）服从正态分布 $N(\mu,0.02^2)$，并视（2）的结果为 μ 的值，预测该月份日参与人数超过1.75 万的天数是否不少于 25 天．

附：

①样本相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$；

②回归直线 $y=bx+a$ 的斜率的最小二乘估计为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$；

③$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=55$，$\sum\limits_{i=1}^{5}y_i^2=5.68$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=17.6$，$\sqrt{1.7}\approx1.304$；

④若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(|X-\mu|<\sigma)=0.6827$．

17.（15 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A,B、C 所对的边分别为 a,b,c，其面积为 S．已知 $2S+\sqrt{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$．

（1）求 A；

（2）点 D 满足 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，且 $CD=2AD$，求 $\dfrac{b^2+c^2}{a^2}$．

18.（17 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln x-ax-1$．

（1）证明：$f(x)$ 有且只有一个极值点；

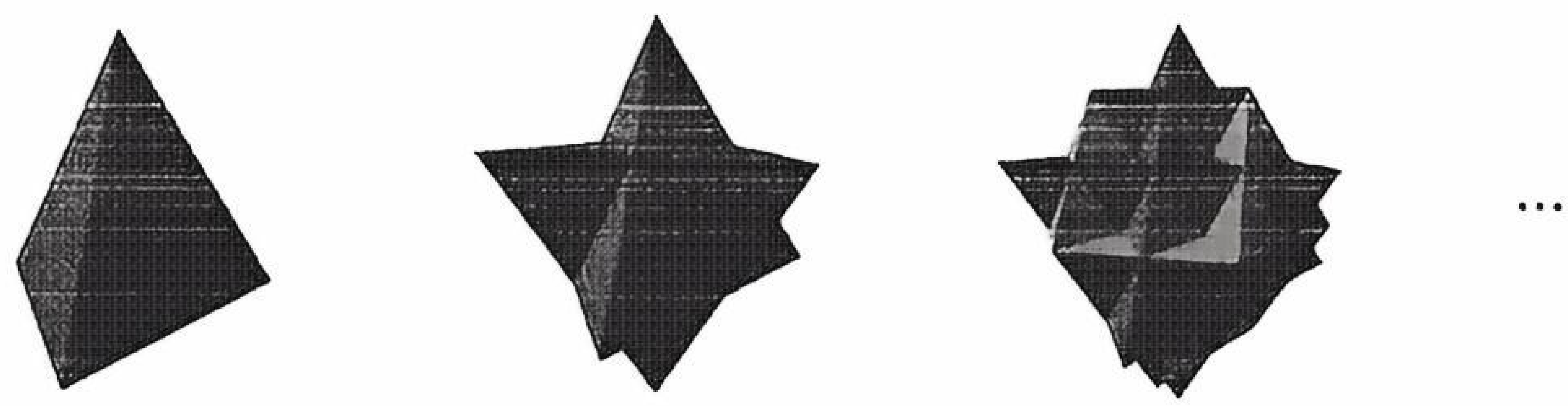
（2）若 $f(x)$ 恰有两个零点．

（i）证明：$a>\mathrm{e}-1$；

（ii）记 $f(x)$ 的极值点为 x_0，若 $m(x_0-\ln x_0)\leqslant a$，求 m 的取值范围．

19.（17 分）

科赫四面体是一种借助递归迭代生成的分形几何体．其构造过程是：从一个正四面体开始，在该几何体的每个正三角形面上，移除以各边中点为顶点的小三角形，并以此小三角形为底面，向外构建小正四面体．如图，持续重复对新生成的几何体执行上述操作，最终得到科赫四面体．



现有一种高效吸附材料，其结构为科赫四面体模型，此模型是由棱长为 $6\sqrt{2}$ 的正四面体经过持续重复上述操作得到的．记第 n 次操作后生成的几何体为 F_n，设 F_n 的表面积为 S_n，体积为 V_n．

（1）求 S_1,S_2,V_1,V_2；

（2）在材料科学中，物料的表面积与体积之比被定义为比表面积，其值越大，吸附能力越强．根据比表面积 $\dfrac{S_n}{V_n}$ 随 n 的变化趋势，说明该材料吸附能力强的原因．

（3）是否存在一个球形容器，能够使该材料整体放入其中？若存在，求其半径的最小值；若不存在，请说明理由．

保密★使用前

泉州市 2026 届高中毕业班模拟考试（一）

2026.03

数学参考答案及评分细则

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题序	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	C	A	B	D	B	D

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

题序	9	10	11
答案	AD	ACD	ACD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．$\frac{4}{9}$　　13．7　　14．$(\frac{3}{4},+\infty)$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15．（13 分）

【命题意图】

本题主要考查椭圆的标准方程、简单几何性质等知识；考查运算求解能力、逻辑推理能力等；考查化归与转化思想、数形结合思想、函数与方程思想等；体现基础性、综合性，导向对数学运算、直观想象、逻辑推理等核心素养的关注.

【试题解析】

解法一：(1)设 $P(x,y)$，则 $Q(-x,-y)$，则 ························ 1 分

$k_{AP}=\frac{y}{x-2}$，$k_{BP}=\frac{-y}{-x-2}$，且 $x\neq\pm2$，························ 3 分

由 $k_{AP}\cdot k_{BP}=-\frac{1}{4}$，得 $\frac{y}{x-2}\cdot\frac{-y}{-x-2}=-\frac{1}{4}$，························ 4 分

整理，得 $4y^2=4-x^2$，即 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，························ 5 分

故 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1(x\neq\pm2)$．（约束条件也可写成 $y\neq0$）························ 6 分

(2)依题意，得 $M(x,-y)$，则 $\overrightarrow{MP}=(0,2y)$，$\overrightarrow{MQ}=(-2x,0)$，

所以 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$，从而 $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MQ}$，所以 $PM\perp QM$，························ 1 分

则$\triangle PQM$的面积$S=\dfrac{1}{2}|PM|\cdot|QM|=\dfrac{1}{2}|2y|\cdot|2x|=2|xy|$， ………………………… 3 分

因为点P在曲线上，则$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，所以$1=\dfrac{x^2}{4}+y^2\geqslant 2\left|\dfrac{x}{2}\right|\cdot|y|$， ………………………… 5 分

即$|xy|\leqslant 1$，当且仅当$\left|\dfrac{x}{2}\right|=|y|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时取"$=$". ………………………… 6 分

故$\triangle PQM$面积的最大值为2. ………………………… 7 分

解法二：（1）同解法一； ………………………… 6 分

（2）设$P(2\cos\theta,\sin\theta),\theta\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$，

则$Q(-2\cos\theta,-\sin\theta)$，$M(2\cos\theta,-\sin\theta)$， ………………………… 1 分

所以$\overrightarrow{MP}=(0,2\sin\theta)$，$\overrightarrow{MQ}=(-4\cos\theta,0)$，

所以$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$，从而$\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MQ}$，所以$PM\perp QM$， ………………………… 2 分

则$\triangle PQM$的面积$S=\dfrac{1}{2}|PM|\cdot|QM|=\dfrac{1}{2}|2\sin\theta|\cdot|4\cos\theta|=2|\sin 2\theta|$， ………………………… 4 分

又$|\sin 2\theta|\leqslant 1$，$2\theta\in(0,2\pi)\cup(2\pi,4\pi)$，

故当$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$或$2\theta=\dfrac{3\pi}{2}$或$2\theta=\dfrac{5\pi}{2}$或$2\theta=\dfrac{7\pi}{2}$，

即$\theta=\dfrac{\pi}{4}$或$\theta=\dfrac{3\pi}{4}$或$\theta=\dfrac{5\pi}{4}$或$\theta=\dfrac{7\pi}{4}$时， ………………………… 6 分

$S_{\max}=2$. ………………………… 7 分

解法三：（1）同解法一； ………………………… 6 分

（2）当直线PQ的斜率不存在时，点M与点Q重合，此时不合题意；

当直线PQ的斜率存在时，设直线PQ的方程为$y=kx(k\neq 0)$，$P(x,y)$，

则$Q(-x,-y),M(x,-y)$，从而$\overrightarrow{MP}=(0,2y)$，$\overrightarrow{MQ}=(-2x,0)$，

所以$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$，从而$\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MQ}$，所以$PM\perp QM$， ………………………… 1 分

由$\begin{cases} y=kx, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$消去$y$，得$(1+4k^2)x^2=4$，整理，得$x^2=\dfrac{4}{1+4k^2}$， ………………………… 2 分

所以△PQM 的面积 $S=\frac{1}{2}|PM|\cdot|QM|=\frac{1}{2}|2y|\cdot|2x|=2|kx^2|=\frac{8|k|}{1+4k^2}=\frac{8}{4|k|+\frac{1}{|k|}}$ $(k\neq 0)$，

……………………………………………………………………………………………… 4 分

因为 $4|k|+\frac{1}{|k|}\geqslant 2\sqrt{4|k|\cdot\frac{1}{|k|}}=4$，当且仅当 $4|k|=\frac{1}{|k|}$，即 $|k|=\frac{1}{2}$ 时取"="，…………… 6 分

所以 $S_{\max}=2$． ……………………………………………………………………… 7 分

16．（15 分）

【命题意图】

本小题主要考查变量间的相关关系、样本相关系数、一元线性回归方程、正态分布的等知识；考查运算求解能力等；考查数形结合思想、化归与转化思想、或然与必然思想等；体现综合性、应用性，导向对数学建模、数学运算核心素养的关注．

【试题解析】

解法一：（1）根据散点图直观判断 y 与 x 之间线性相关． ………………………………… 1 分

因为 $\bar{x}=3$，$\bar{y}=1$， …………………………………………………………… 2 分

$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\,\bar{y}=2.6$，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2=10$，$\sum_{i=1}^{5}y_i^2-5\bar{y}^2=0.68$， ………………………… 3 分

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2)}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}y_i^2-5\bar{y}^2}}=\frac{2.6}{\sqrt{10\times 0.68}}=\frac{2.6}{2\sqrt{1.7}}\approx 0.997$$，………………………… 5 分

所以 y 与 x 的线性相关程度强；（求出 r 的值并直接判断不扣分 ………………… 6 分

（也可利用"$r>0.75$"或"r 接近 1"判断相关程度强）

（2）设 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，则 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{2.6}{10}=0.26$，……………………………… 1 分

$\hat{a}=\bar{y}-b\bar{x}=1-0.26\times 3=0.22$， ……………………………………………… 2 分

所以 $\hat{y}=0.26x+0.22$， …………………………………………………………… 3 分

故 $x=6$ 时，$\hat{y}=0.26\times 6+0.22=1.78$． ………………………………………… 4 分

（3）依题意，得 $Y \sim N(1.78, 0.02^2)$，

由正态分布性质，可知 $P(Y>1.75) > P(Y>1.76) = P(Y>\mu-\sigma)$． ………………………… 1 分

因为 $P(|Y-\mu|<\sigma) = 0.6827$，

所以 $P(Y>\mu-\sigma) = 0.5 + \dfrac{P(|Y-\mu|<\sigma)}{2} = 0.5 + \dfrac{0.6827}{2} = 0.84135$． ………………………… 3 分

因为 $0.84135 > \dfrac{25}{30}$， ………………………………………………………………………… 4 分

所以该月日参与人数超过 1.75 万人的天数不少于 25 天． ………………………………… 5 分

解法二：（1）根据散点图直观判断 y 与 x 之间具有线性相关关系． …………………… 1 分

因为 $\bar{x}=3$，$\bar{y}=1$， ……………………………………………………………………………… 2 分

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = 2.6$，$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2 = 10$，$\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2 = 0.68$， ………………………… 3 分

$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}} = \dfrac{2.6}{\sqrt{10\times 0.68}} = \dfrac{2.6}{2\sqrt{1.7}} \approx 0.997$， ………………………… 5 分

所以 y 与 x 的线性相关程度强；（求出 r 的值并直接判断不扣分） ………………………… 6 分

（也可利用“$r>0.75$”或“r 接近 1”判断相关程度强）

（2）设 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2} = \dfrac{2.6}{10} = 0.26$， ………………………… 1 分

$\hat{a}=\bar{y}-b\bar{x}=1-0.26\times 3=0.22$， ……………………………………………………… 2 分

所以 $\hat{y}=0.26x+0.22$， ……………………………………………………………………………… 3 分

故 $x=6$ 时，$\hat{y}=0.26\times 6+0.22=1.78$． ………………………………………………………… 4 分

（3）同解法一． ………………………………………………………………………………………… 5 分

17．（15 分）

【命题意图】

本小题主要考查平面向量、解三角形等知识；考查运算求解能力、推理论证能力等；考查数形结合思想、化归与转化思想等；体现基础性、综合性、应用性，导向对数学运算、直观想

象、逻辑推理等核心素养的关注．

【试题解析】

解法一：（1）由正弦定理，得 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$， ………………………………………………… 2 分

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cos A=cb\cos A$ ………………………………………………… 4 分

由 $2S+\sqrt{3}\overline{AB}\cdot\overline{AC}=0$，得 $bc\sin A+\sqrt{3}bc\cos A=0$，整理，得 $\tan A=-\sqrt{3}$， ………… 5 分

又因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$． ………………………………………………… 6 分

（2）由（1）知，$A=\frac{2\pi}{3}$，

如图，延长 AB 到点 E，使得 $EB=BA$，则 $\overline{AD}=\frac{2}{3}\overline{AE}+\frac{1}{3}\overline{AC}$， ………………………… 1 分

整得，得 $\overline{CD}=2\overline{DE}$，又 $CD=2DA$，所以 $DA=DE$， ………………………………… 2 分

设 $DE=t$，则 $DA=t$，$DC=2t$，$CE=3t$， ………………………………………… 3 分

在 $\triangle ACE$ 中，由余弦定理，得

$CE^2=AE^2+AC^2-2AE\cdot AC\cdot\cos A$，即 $9t^2=b^2+4c^2+2bc$ …① ………………… 4 分

同理，在 $\triangle ADE$ 中，由余弦定理，得 $2t^2-2t^2\cos\angle ADE=4c^2$ …③ ………………… 5 分

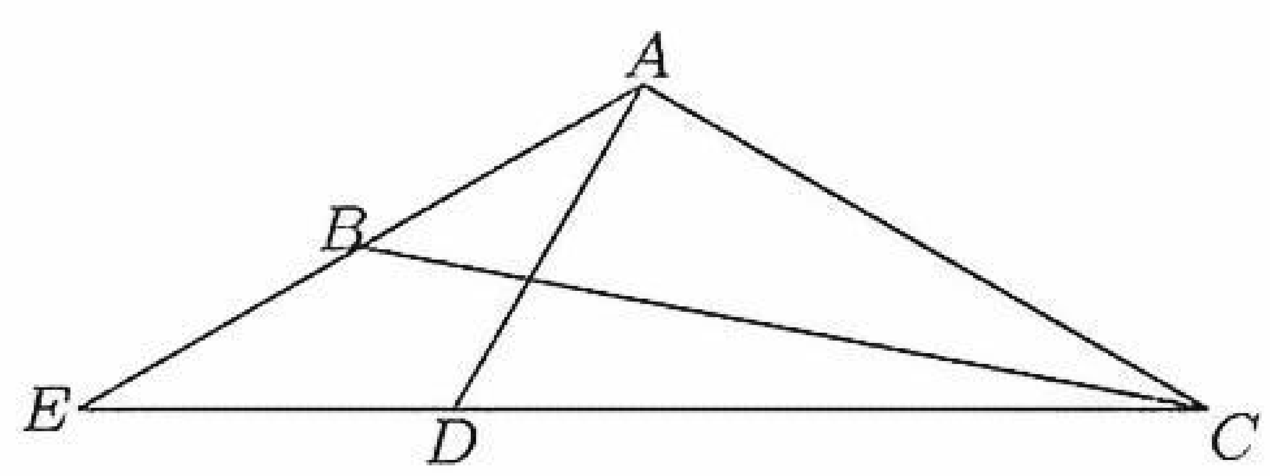
在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理，得 $5t^2-4t^2\cos\angle ADE=b^2$ …④ ………………………… 6 分

④＋③×2，得 $9t^2=b^2+8c^2$ …⑤ ………………………………………………… 7 分

⑤－①，得 $4c^2-2bc=0$，化简，得 $b=2c$，即 $AE=AC$， ………………………… 8 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $a^2=c^2+b^2-2\times bc\times\cos\frac{2\pi}{3}=7c^2$，

所以 $\frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{5c^2}{7c^2}=\frac{5}{7}$． ………………………………………………… 9 分



解法二：（1）同解法一； ………………………………………………… 6 分

（2）由 $\overline{AD}=\frac{4}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC}$，得 $\overline{AD}^2=(\frac{4}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC})^2$，

整理，得 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{16}{9}\overrightarrow{AB}^2+\frac{8}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2$，

即 $|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{16}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{8}{9}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A+\frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2$，即 $|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{16}{9}c^2-\frac{4}{9}bc+\frac{1}{9}b^2$ …… 1 分

如图在 $\triangle ABC$ 中延长 AB 至点 E 使得 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}$，则 $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$，

由 $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 得 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 整理得 $2\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$

即 $2\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DC}$，所以点 E,D,C 共线，且 $2ED=CD$． …………………………………… 2 分

设 $ED=x$，则由 $CD=2AD$，得 $AD=x$， $ED=2x$， $CE=3x$ …………………………………… 3 分

在 $\triangle ACE$ 中，由余弦定理 $CE^2=AC^2+AE^2-2AC\cdot AE\cos\angle CAE$，

即 $(3x)^2=b^2+(2c)^2-2b\times 2c\times\cos\frac{2\pi}{3}$，整理，得 $9x^2=b^2+4c^2+2bc$ ①………………… 4 分

又由 $|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{16}{9}c^2-\frac{4}{9}bc+\frac{1}{9}b^2$，得 $x^2=\frac{16}{9}c^2-\frac{4}{9}bc+\frac{1}{9}b^2$，

整理，得 $9x^2=b^2+16c^2-4bc$ ②…………………………………………………………… 5 分

由①－②，得 $b^2+4c^2+2bc=b^2+16c^2-4bc$，化简，得 $b=2c$ ………………………… 6 分

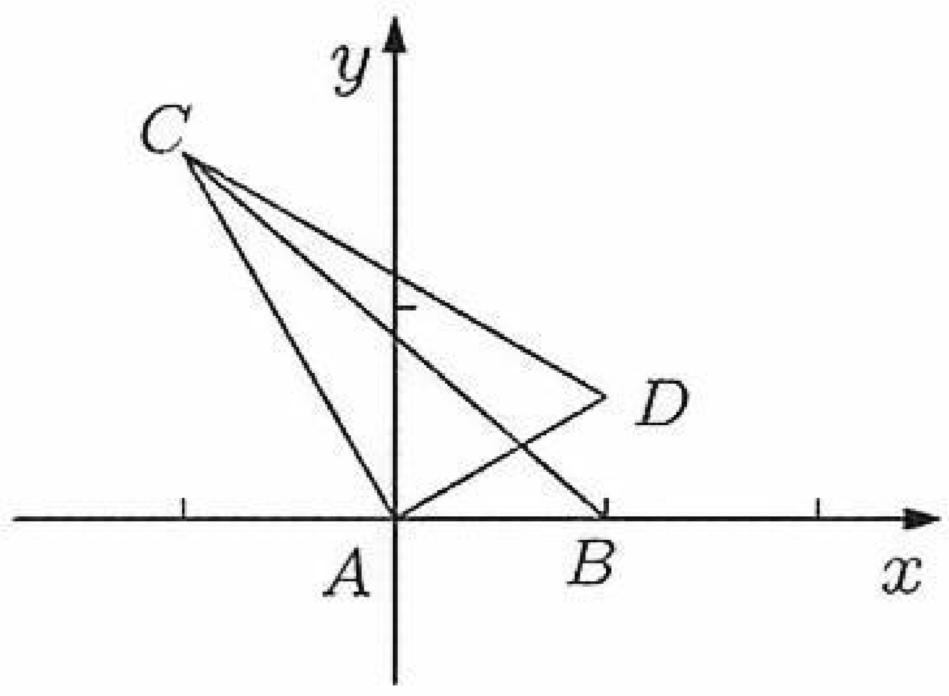
又在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{2\pi}{3}=b^2+c^2+bc$，即 $a^2=b^2+c^2+bc=7c^2$， ………………… 7 分

所以 $\frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{4c^2+c^2}{7c^2}=\frac{5}{7}$． ………………………………………………………… 9 分

解法三：（1）同解法一； ………………………………………………………………… 6 分

（2）如图，以 A 为原点， AB 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系 xAy，



由（1）知， $\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\overrightarrow{AB}=(c,0)$， $\overrightarrow{AC}=(-\frac{b}{2},\frac{\sqrt{3}b}{2})$， ……………………… 2 分

则 $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}(c,0)+\frac{1}{3}(-\frac{b}{2},\frac{\sqrt{3}b}{2})=(\frac{4}{3}c-\frac{b}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}b)$， ………………… 3 分

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=(\frac{4}{3}c+\frac{b}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}b)$， ······························ 4 分

因为 $CD=2AD$，所以 $(\frac{4}{3}c+\frac{b}{3})^2+(-\frac{\sqrt{3}}{3}b)^2=4\left[(\frac{4}{3}c-\frac{b}{6})^2+(\frac{\sqrt{3}}{6}b)^2\right]$， ··············· 5 分

整理，得 $\frac{4}{3}c+\frac{b}{3}=2(\frac{4}{3}c-\frac{b}{6})$ 或 $\frac{4}{3}c+\frac{b}{3}=-2(\frac{4}{3}c-\frac{b}{6})$，

即 $b=2c$ 或 $c=0$（舍去）， ······························ 6 分

又在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{2\pi}{3}=b^2+c^2+bc=7c^2$， ······························ 8 分

故 $\frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{4c^2+c^2}{7c^2}=\frac{5}{7}$． ······························ 9 分

解法四：（1）同解法一； ······························ 6 分

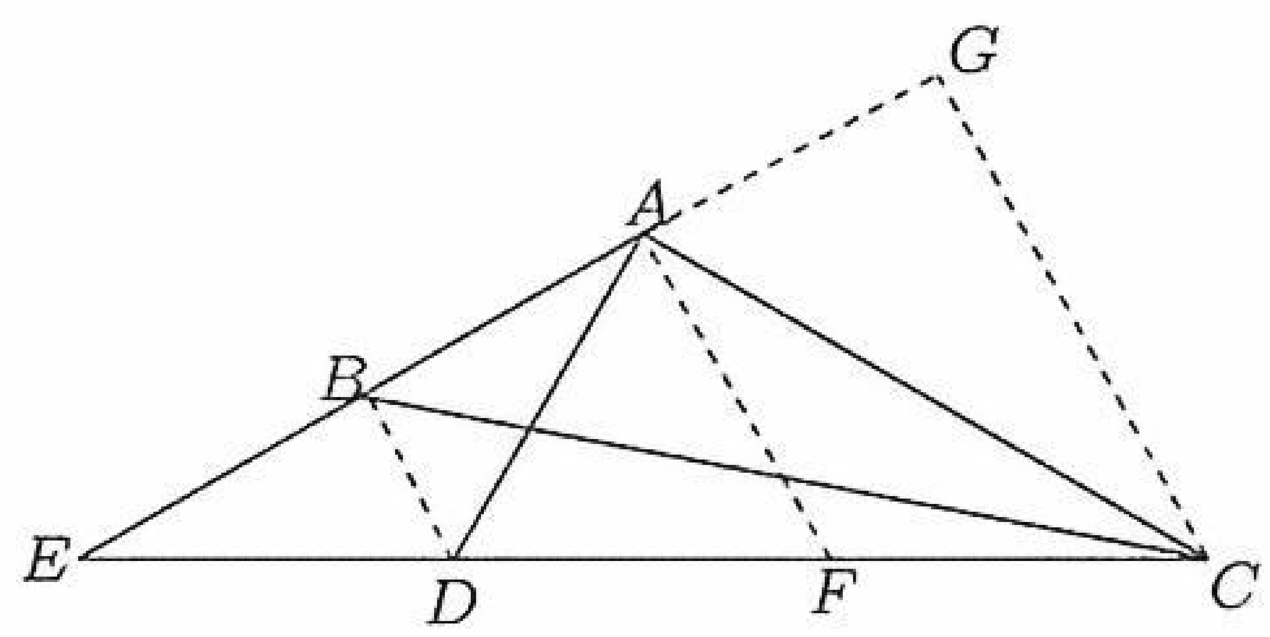
（2）由（1）知，$A=\frac{2\pi}{3}$，

如图，延长 AB 到点 E，使得 $EB=BA$，则 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$， ······························ 1 分

整得，得 $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DE}$，又 $CD=2DA$，所以 $DA=DE$， ······························ 2 分

取 DC 的中点 F，连结 BD,FA，

则 $BD\perp AE$，$BD=DF=FC$， ······························ 3 分



从而 $BD/\!/AF$，

过点 C 作 $CG\perp BA$ 于 G，则 $BD/\!/CG$，

所以 $AF/\!/CG/\!/BD$，所以 $\frac{BA}{AG}=\frac{DF}{FC}=1$， ······························ 4 分

在 $\triangle ACG$ 中，$\angle AGC=90°$，

所以 $AG=AC\cdot\cos\angle CAG=b\cdot\cos 60°=\frac{1}{2}b$，$CG=b\sin\angle CAG=\frac{\sqrt{3}}{2}b$， ··············· 5 分

故 $\frac{1}{2}b=c$ 即 $b=2c$， ······························ 6 分

又在Rt△CBG中，$CB^2=GB^2+GC^2$，即 $a^2=\frac{3b^2}{4}+(c+\frac{b}{2})^2$，

整理，得 $a^2=7c^2$，…………………………………………………………………… 8 分

所以 $\frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{4c^2+c^2}{7c^2}=\frac{5}{7}$． ………………………………………………………… 9 分

18．（17 分）

【命题意图】

本题主要考查函数的极值与零点、方程与不等式等知识；考查运算求解能力、推理论证能力等；考查化归与转化思想、数形结合思想、函数与方程思想等；体现基础性、综合性，导向对数学运算、直观想象、数学抽象，逻辑推理等核心素养的关注．

【试题解析】

解法一：（1）函数 $f(x)$ 的定义域 $(0,+\infty)$，$f'(x)=e^x-\frac{1}{x}-a$，……………………………… 1 分

令 $g(x)=e^x-\frac{1}{x}-a$，因为 $g'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，

所以 $g(x)=e^x-\frac{1}{x}-a$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，即 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}-a$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增．

又 $x\to 0, f'(x)=e^x-\frac{1}{x}-a<0$；$x\to+\infty, f'(x)=e^x-\frac{1}{x}-a>0$． ……………………… 2 分

（没有交代极限扣 1 分）

所以存在唯一的实数 x_0，使得 $f'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=a$． ……………………………… 3 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 单调递增；

故 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值点，即 $f(x)$ 有唯一的极值点；…………………………………… 4 分

（2）（i）证明：由（1），得 $f(x)_{极小值}=f(x_0)$．

①当 $f(x_0)\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 至多一个零点，不合题意，舍去；……………………………… 1 分

②当 $f(x_0)<0$ 即 $e^{x_0}-\ln x_0-ax_0-1<0$ 时，

由$\begin{cases} e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=a, \\ e^{x_0}-\ln x_0-ax_0-1<0, \end{cases}$ 消去a得，$(1-x_0)e^{x_0}-\ln x_0<0$，…………………………………… 2 分

令 $p(x)=(1-x)e^{x}-\ln x(x>0)$，

因为$p'(x)=-xe^{x}-\dfrac{1}{x}<0$，所以$p(x)=(1-x)e^{x}-\ln x$为减函数，

又因为$p(1)=0$，所以$(1-x_0)e^{x_0}-\ln x_0<0$的解集为$(1,+\infty)$．…………………………… 3 分

又$y=e^{x}-\dfrac{1}{x}$在$(1,+\infty)$单调递增，所以$a=e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}\in(e-1,+\infty)$．……………………… 4 分

又$x\to 0, f(x)>0$；$x\to+\infty, f(x)>0$．（没有交代极限扣 1 分）

此时$f(x)$有两个不同的零点，即$a>e-1$．…………………………………………………… 5 分

（ii）由于$x_0\in(1,+\infty)$，所以$x_0>\ln x_0$可化为$m\leqslant\dfrac{e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}}{x_0-\ln x_0}$．………………………… 1 分

令$h(x)=\dfrac{e^{x}-\dfrac{1}{x}}{x-\ln x}, x\in(1,+\infty)$，…………………………………………………………………… 2 分

则$h'(x)=\dfrac{(e^{x}+\dfrac{1}{x^2})(x-\ln x)-(e^{x}-\dfrac{1}{x})(1-\dfrac{1}{x})}{(x-\ln x)^2}$

$=\dfrac{e^{x}((x-\ln x)-(1-\dfrac{1}{x}))+\dfrac{1}{x^2}(x-\ln x)+\dfrac{1}{x}(1-\dfrac{1}{x})}{(x-\ln x)^2}$

$=\dfrac{e^{x}(x-\ln x-1+\dfrac{1}{x})+\dfrac{1}{x^2}(2x-\ln x-1)}{(x-\ln x)^2}$ …………………………………………… 3 分

由$\ln x\leqslant x-1$，得$x-\ln x-1\geqslant 0$，从而$x-\ln x-1+\dfrac{1}{x}\geqslant\dfrac{1}{x}>0$．……………………… 4 分

令$g(x)=2x-\ln x-1$，$g'(x)=2-\dfrac{1}{x}>0$，所以$g(x)$在$(1,+\infty)$单调递增，

所以$g(x)>g(1)=2-\ln 2-1=1-\ln 2>0$，所以$2x-\ln x-1>0$，………………………… 5 分

即$\dfrac{e^{x}(x-\ln x-1+\dfrac{1}{x})+\dfrac{1}{x^2}(2x-\ln x-1)}{(x-\ln x)^2}>0$，…………………………………………… 6 分

所以$h'(x)>0$，所以$h(x)$在$(1,+\infty)$单调递增．…………………………………………… 7 分

所以$h(x) > h(1) = \mathrm{e} - 1$，

故$m \leqslant \mathrm{e} - 1$． ……………………………………………………………… 8分

解法二：（1）函数$f(x)$的定义域$(0,+\infty)$，$f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x} - a$， ……………………… 1分

令$g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x} - a$，因为$g'(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x^2} > 0$，

所以$g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x} - a$在$(0,+\infty)$单调递增，即$f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x} - a$在$(0,+\infty)$单调递增.

由于$f'(\dfrac{1}{|a|+\mathrm{e}+1}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{|a|+\mathrm{e}+1}} - \dfrac{1}{\dfrac{1}{|a|+\mathrm{e}+1}} - a = \mathrm{e}^{\frac{1}{|a|+\mathrm{e}+1}} - (|a|+\mathrm{e}+1) - a$

$< \mathrm{e} - (|a|+\mathrm{e}+1) - a < -|a| - a - 1 < 0$，

$f'(|a|+2) = \mathrm{e}^{|a|+2} - \dfrac{1}{|a|+2} - a > |a|+2+1 - \dfrac{1}{|a|+2} - a > 0$， ……………………… 2分

所以存在唯一的实数$x_0 \in (\dfrac{1}{|a|+2}, |a|+2)$，使得$f'(x_0) = 0$，即$\mathrm{e}^{x_0} - \dfrac{1}{x_0} = a$， ……… 3分

当$x \in (0, x_0)$时，$f'(x) < 0$，所以$f(x)$单调递减；

当$x \in (x_0, +\infty)$时，$f'(x) > 0$，所以$f(x)$单调递增；

故$x = x_0$为$f(x)$的唯一极值点. ……………………………………………………… 4分

（2）（i）由（1），可得$f(x)_{极小值} = f(x_0)$.

①当$f(x_0) \geqslant 0$时，$f(x)$至多一个零点，不合题意，舍去； ………………………… 1分

②当$f(x_0) < 0$即$\mathrm{e}^{x_0} - \ln x_0 - ax_0 - 1 < 0$时，

由$\begin{cases} \mathrm{e}^{x_0} - \dfrac{1}{x_0} = a, \\ \mathrm{e}^{x_0} - \ln x_0 - ax_0 - 1 < 0, \end{cases}$ 消去a，得$(1 - x_0)\mathrm{e}^{x_0} - \ln x_0 < 0$， ……………… 2分

令$p(x) = (1 - x)\mathrm{e}^x - \ln x$，

因为$p'(x) = -x\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x} < 0$，所以$p(x) = (1 - x)\mathrm{e}^x - \ln x$单调递减.

又因为$p(1) = 0$，所以$(1 - x_0)\mathrm{e}^{x_0} - \ln x_0 < 0$的解集为$(1, +\infty)$. ……………………… 3分

又 $y=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $a=\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}\in(\mathrm{e}-1,+\infty)$． ………………………… 4 分

此时 $f(\mathrm{e}^{-a})=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-a}}-\ln\mathrm{e}^{-a}-a\mathrm{e}^{-a}-1>1+a-a\mathrm{e}^{-a}-1=a(1-\mathrm{e}^{-a})>0$

$f(a+1)=\mathrm{e}^{a+1}-\ln(a+1)-a(a+1)-1>(a+1)^2-(a+1-1)-a(a+1)-1=0$

又 $a+1-x_0=\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}-x_0+1>0$，则 $\mathrm{e}^{-a}<x_0<a+1$，

由零点存在性定理，存在 $x_1\in(\mathrm{e}^{-a},x_0)$， $x_2\in(x_0,a+1)$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$．

综上，可得 $a>\mathrm{e}-1$． ………………………………………………………… 5 分

（ii）将 $\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=a$ 代入整理得 $\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}\geqslant m(x_0-\ln x_0)$ ………………………… 1 分

令 $h(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}-m(x-\ln x)$，

（1）当 $m\leqslant0$ 时，因为 $x>1$，所以 $\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}>0$， $x>\ln x$，

所以 $h(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}-m(x-\ln x)>0$，显然成立； ………………………… 2 分

（2）当 $m>0$ 时， $h'(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x^2}-m(1-\dfrac{1}{x})=\dfrac{1}{x}[x\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}-m(x-1)]$，

令 $g(x)=x\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}-m(x-1)$，则 $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x^2}-m$．

显然 $g'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $g'(x)>2\mathrm{e}-1-m$． ………………………… 3 分

①当 $m\leqslant2\mathrm{e}-1$，则 $g'(x)>2\mathrm{e}-1-m\geqslant0$，

此时 $g(x)=x\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}-m(x-1)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

所以 $g(x)>\mathrm{e}+1>0$，即 $h'(x)>0$． ………………………………………… 4 分

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $h(x)>h(1)=\mathrm{e}-1-m$，

欲使 $h(x)>0$，只需 $\mathrm{e}-1-m\geqslant0$，即 $m\leqslant\mathrm{e}-1$．

即 $0<m\leqslant\mathrm{e}-1$ 时，符合题意． ………………………………………… 5 分

②当 $m>2\mathrm{e}-1$ 时，则 $h(1)=\mathrm{e}-1-m<0$，

又 $h(2)=\mathrm{e}^2-\dfrac{1}{2}-m(2-\ln2)$，

⑴若 $h(2)\geqslant0$，则 $h(1)h(2)\leqslant0$，

又 $h(x)=e^x-\frac{1}{x}-m(x-\ln x)$ 在 $(1,+\infty)$ 连续，

则存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $h(x_0)<0$，这与 $h(x)\geqslant 0$ 矛盾；……………………………… 6 分

⑵若 $h(2)<0$，则 $h(x)\geqslant 0$ 显然不恒成立……………………………………………… 7 分

综上，实数 m 的取值范围为 $m\leqslant e-1$. ………………………………………………… 8 分

解法三：（1）及（i）同解法一或解法二；……………………………………………… 4 分

（ii）将 $e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=a$ 代入整理得 $e^{x_0}-\frac{1}{x_0}\geqslant m(x_0-\ln x_0)$ ………………………… 1 分

令 $h(x)=e^x-\frac{1}{x}-m(x-\ln x)$

①当 $m>e-1$ 时，$h(1)=e-1-m<e-1-(e-1)=0$. ……………………………… 2 分

又 $h(2)=e^2-\frac{1}{2}-m(2-\ln 2)$，

若 $h(2)\geqslant 0$，则 $h(1)h(2)\leqslant 0$，

又 $h(x)=e^x-\frac{1}{x}-m(x-\ln x)$ 在 $(1,+\infty)$ 的图象是连续不断的，

故存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $h(x_0)<0$，这与 $h(x)\geqslant 0$ 矛盾；……………………………… 3 分

若 $h(2)<0$，则 $h(x)\geqslant 0$ 显然不恒成立

所以 $m>e-1$ 时，$h(x)=e^x-\frac{1}{x}-m(x-\ln x)>0$ 不恒成立. ……………………… 4 分

②当 $m\leqslant e-1$，因为 $x>\ln x$，$h(x)\geqslant e^x-\frac{1}{x}-(e-1)(x-\ln x)$，……………… 5 分

令 $p(x)=e^x-\frac{1}{x}-(e-1)(x-\ln x)$，$p(1)=0$

又 $p'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}-(e-1)(1-\frac{1}{x})$，………………………………………… 6 分

因为 $x>1$，所以 $e^x>e$.

所以 $p'(x)>e+\frac{1}{x^2}-(e-1)(1-\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}+\frac{e-1}{x}+1>0$

所以 $p(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，………………………………………………………… 7 分

所以 $p(x)>p(1)=0$.

综上，实数 m 的取值范围为 $m\leqslant e-1$. ………………………………………………… 8 分

19.（17 分）

【命题意图】

本小题主要考查空间几何体、数列及其前n项和、不等式等知识；考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力等；考查数形结合思想、化归与转化思想、创新意识等；体现基础性、综合性、应用性与创新性，导向对直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养的关注．

【试题解析】

解法一：（1）正四面体$ABCD$的表面积为$4\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(6\sqrt{2})^2=72\sqrt{3}$． ……………………………… 1 分

依题意，得$S_1=72\sqrt{3}\times\dfrac{3}{2}=108\sqrt{3}$； ……………………………………………………… 2 分

$S_2=108\sqrt{3}\times\dfrac{3}{2}=162\sqrt{3}$； ……………………………………………………………… 3 分

正四面体$ABCD$的体积为$\dfrac{1}{3}\times18\sqrt{3}\times4\sqrt{3}=72$． ……………………………………… 4 分

$V_1=72+72\times(\dfrac{1}{2})^3\times4=108$； ………………………………………………………… 5 分

$V_2=108+72\times(\dfrac{1}{2})^6\times6\times4=135$． ………………………………………………… 6 分

（无详细计算过程但答案正确均给分）

（2）（i）依题意每次操作后，几何体的表面积变为上一次的$\dfrac{3}{2}$倍，

故数列$\{S_n\}$是首项为$108\sqrt{3}$，公比为$\dfrac{3}{2}$的等比数列，

所以$S_n=72\sqrt{3}\cdot(\dfrac{3}{2})^n$； ……………………………………………………………… 1 分

依题意得，$V_n-V_{n-1}=72\times(\dfrac{1}{8})^n\times6^{n-1}\times4(n\geqslant2)$， ……………………………… 2 分

所以$V_n=108+\sum\limits_{k=2}^{n}72\times(\dfrac{1}{8})^k\times6^{k-1}\times4=108+\sum\limits_{k=2}^{n}36\times(\dfrac{3}{4})^{k-1}$

$=108+108[1-(\dfrac{3}{4})^{n-1}]=216-144\times(\dfrac{3}{4})^n$．$(n\geqslant2)$； …………………………… 3 分

又当$n=1$时，$216-144\times(\dfrac{3}{4})^n=108=V_1$

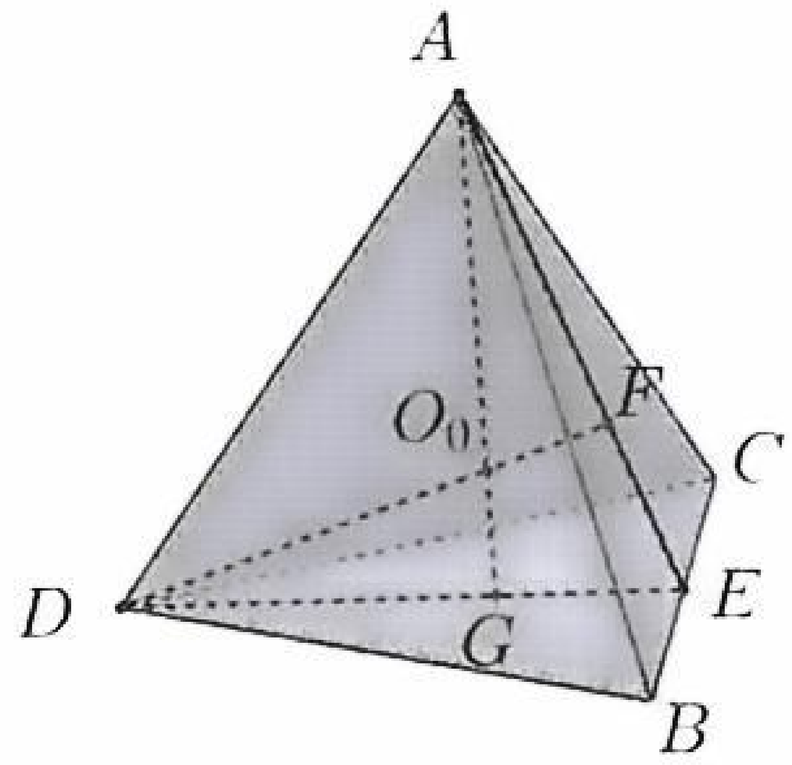
故$V_n=216-144\times(\dfrac{3}{4})^n(n\in\mathbf{N}^*)$． ………………………………………………… 4 分

又$\{S_n\}$为递增数列，且当$n\to+\infty$时，$S_n\to+\infty$；$\{V_n\}$为递增数列，且当$n\to+\infty$时，

$V_n \to 216$，所以当 $n \to +\infty$ 时，$\frac{S_n}{V_n} \to +\infty$，故由此解释，该结构吸附能力强．或 $\frac{S_n}{V_n} > \frac{S_n}{V_1}$，故当 $n \to +\infty$ 时，$\frac{S_n}{V_n} \to +\infty$，此处说理合情合理即可酌情给分 ……………………… 6 分

（ii）存在，R 的最小值即为正四面体 $ABCD$ 的外接球半径为 $3\sqrt{3}$． ……………… 1 分

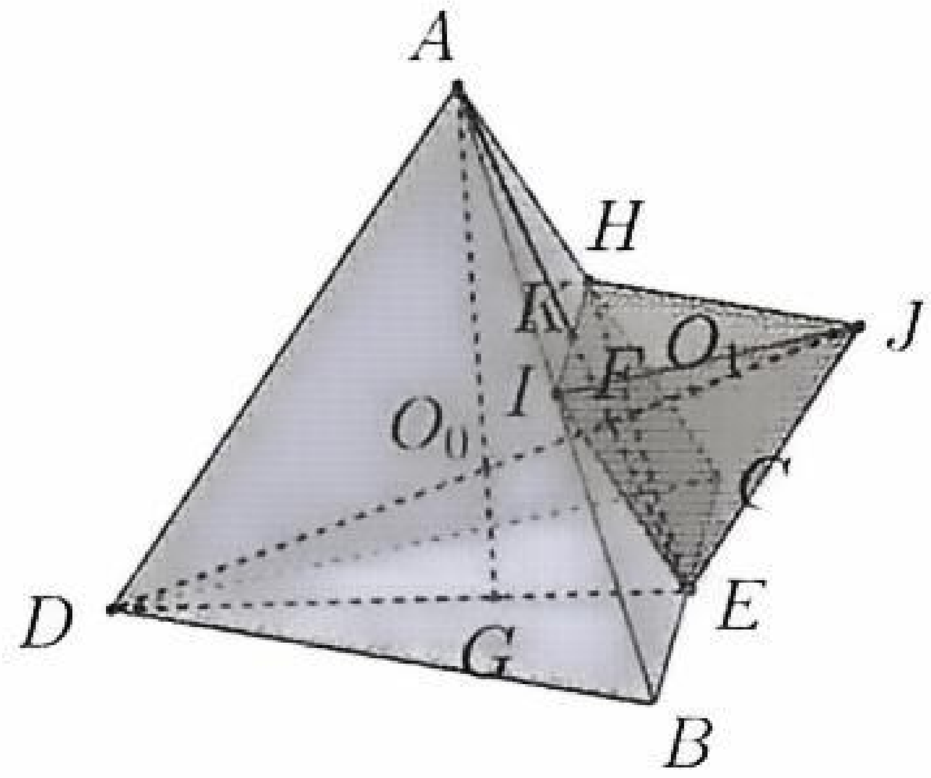
理由如下：



过点 A 作 $AG \perp$ 平面 BCD 于点 G，因为四面体 $ABCD$ 为正四面体，故 G 为 $\triangle BCD$ 外心，即重心，内心，垂心，则 G 在 DE 上，且 $DG = 2GE$，同理得 F 在 AE 上，且 $AF = 2FE$，则 O_0 为四面体 $ABCD$ 的外接球球心和内切球球心，设四面体棱长为 a，$AO_0 = DO_0 = R_0, GO_0 = FO_0 = r_0$，则 $DG = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$，所以 $AG = \frac{\sqrt{6}}{3} a$，则由 $(\frac{\sqrt{6}}{3} a - R_0)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3} a)^2 = R_0^{\ 2}$，解得 $R_0 = \frac{\sqrt{6}}{4} a$，所以 $r_0 = \frac{\sqrt{6}}{3} a - \frac{\sqrt{6}}{4} a = \frac{\sqrt{6}}{12} a$．

记第 1 次操作后构造的任一正四面体 T_1（即四面体 $EHIJ$）的外接球球心为 O_1，连结 O_0O_1．

则 $JO_1 \perp$ 平面 EHI，设垂足为 F'，$AE \cap HI = K$，则 F' 为 $\triangle EHI$ 的外心，重心，垂心，故 F' 在 EK 上，且 $EF = \frac{2}{3} EK = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} AE = \frac{1}{3} AE$，故 F' 与 F 重合，所以 D, O_0, O_1, F, J 共线，则 $O_0O_1 \perp$ 平面 EHI，故 $O_0O_1 = \frac{\sqrt{6}}{12} a + \frac{\sqrt{6}}{12} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{6}}{8} a$．



记第2次操作后在T_1上构造的任一正四面体T_2的外接球球心为O_2，连结O_1O_2，依次类推，

第n次操作后在T_{n-1}上构造的任一正四面体T_n的外接球球心为O_n，其任意顶点为P_n，连结$O_{n-1}O_n$，O_nP_n．则依题意得：

$|\overrightarrow{O_0O_1}|=\dfrac{\sqrt{6}}{8}\times 6\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$|\overrightarrow{O_nP_n}|=6\sqrt{2}\times(\dfrac{1}{2})^n\times\dfrac{\sqrt{6}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2^n}$，…………………………………… 2 分

$|\overrightarrow{O_{n-1}O_n}|=\dfrac{\sqrt{6}}{12}\times 6\sqrt{2}\times(\dfrac{1}{2})^{n-1}+\dfrac{\sqrt{6}}{12}\times 6\sqrt{2}\times(\dfrac{1}{2})^n=\dfrac{\sqrt{6}}{12}\times 6\sqrt{2}\times(\dfrac{1}{2})^{n-1}(1+\dfrac{1}{2})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1}(n\geqslant 1)$，

…………………………………………………………………………………………………… 3 分

从而$|\overrightarrow{O_0O_1}|+|\overrightarrow{O_1O_2}|+|\overrightarrow{O_2O_3}|+\cdots+|\overrightarrow{O_{n-1}O_n}|+|\overrightarrow{O_nP_n}|=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2^n}=3\sqrt{3}$． …………… 4 分

又$\overrightarrow{O_0P_n}=\overrightarrow{O_0O_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2O_3}+\cdots+\overrightarrow{O_{n-1}O_n}+\overrightarrow{O_nP_n}$，

所以$|\overrightarrow{O_0P_n}|\leqslant|\overrightarrow{O_0O_1}|+|\overrightarrow{O_1O_2}|+|\overrightarrow{O_2O_3}|+\cdots+|\overrightarrow{O_{n-1}O_n}|+|\overrightarrow{O_nP_n}|=3\sqrt{3}$，故$|O_0P_n|\leqslant 3\sqrt{3}$，即无论第几次迭代，$F_n$的任意顶点到$O_0$的距离都不会超过正四面体$ABCD$的外接球半径，

又$O_0P_1=3\sqrt{3}$，

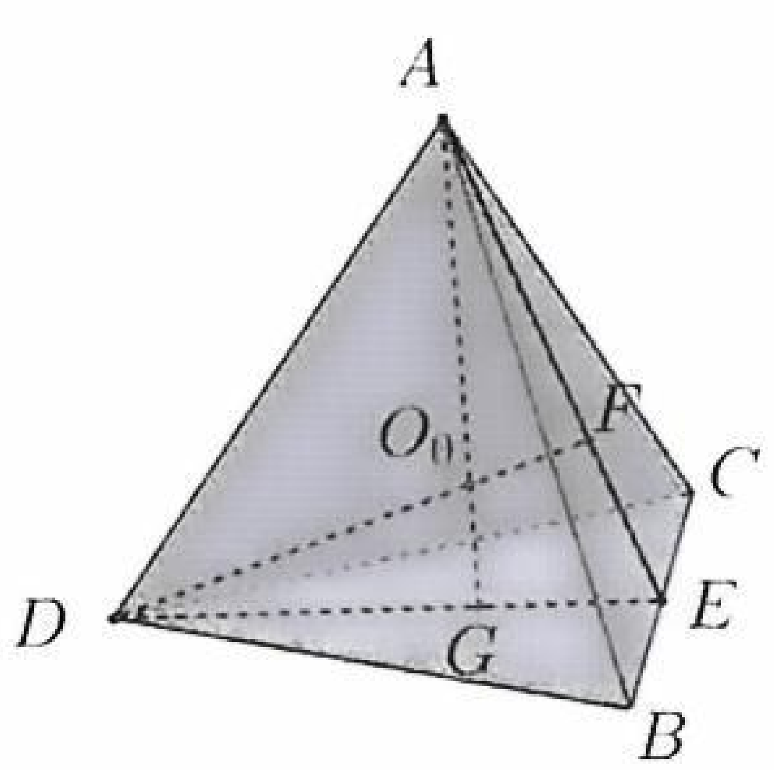
故R的最小值即为$3\sqrt{3}$． ………………………………………………………………… 5 分

解法二：（1）同解法一；…………………………………………………………………… 6 分

（2）（i）同解法一；…………………………………………………………………… 6 分

（ii）存在，R的最小值即为正四面体$ABCD$的外接球半径为$3\sqrt{3}$． ………………… 1 分

理由如下：



过点A作$AG\perp$平面BCD于点G，因为四面体$ABCD$为正四面体，

故G为$\triangle BCD$外心，即重心，内心，垂心，则G在DE上，且$DG=2GE$，

同理得F在AE上，且$AF=2FE$，则O_0为四面体$ABCD$的外接球球心和内切球球心，

设四面体棱长为a，$AO_0=DO_0=R_0,GO_0=FO_0=r_0$，则$DG=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

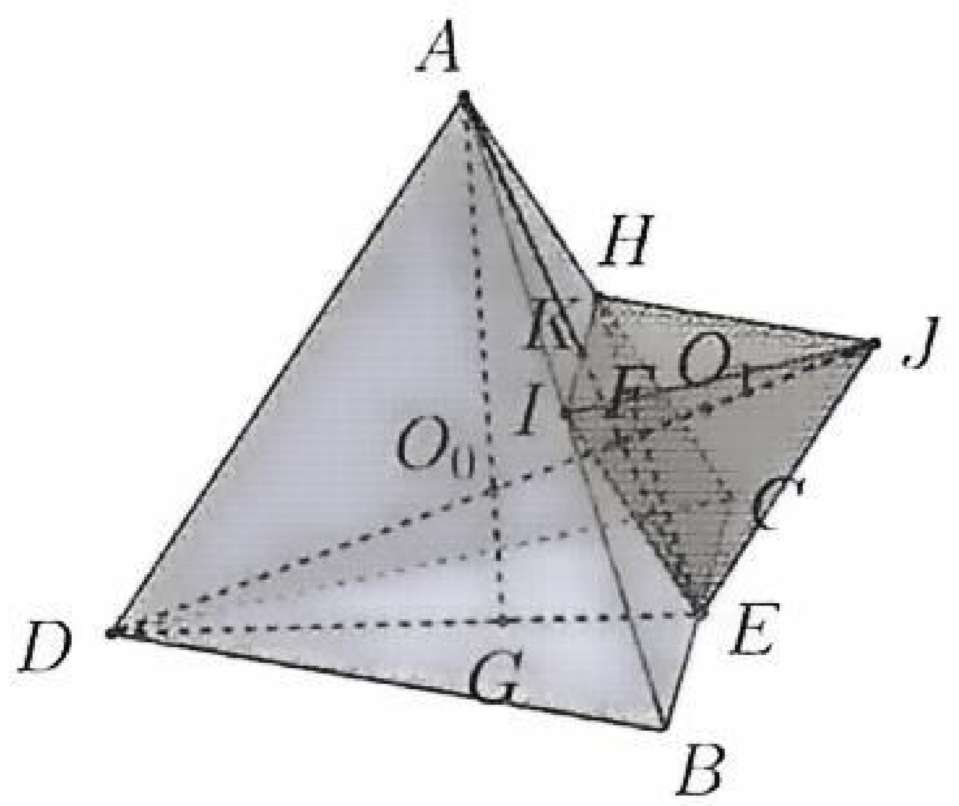
所以$AG=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，则由$(\frac{\sqrt{6}}{3}a-R_0)^2+(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2={R_0}^2$，解得$R_0=\frac{\sqrt{6}}{4}a$，

所以$r_0=\frac{\sqrt{6}}{3}a-\frac{\sqrt{6}}{4}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a$.

记第 1 次操作后构造的任一正四面体T_1（即四面体$EHIJ$）的外接球球心为O_1，连结O_0O_1. 则$JO_1\perp$平面EHI，设垂足为F'，$AE\cap HI=K$，则F'为$\triangle EHI$的外心，重心，垂心，

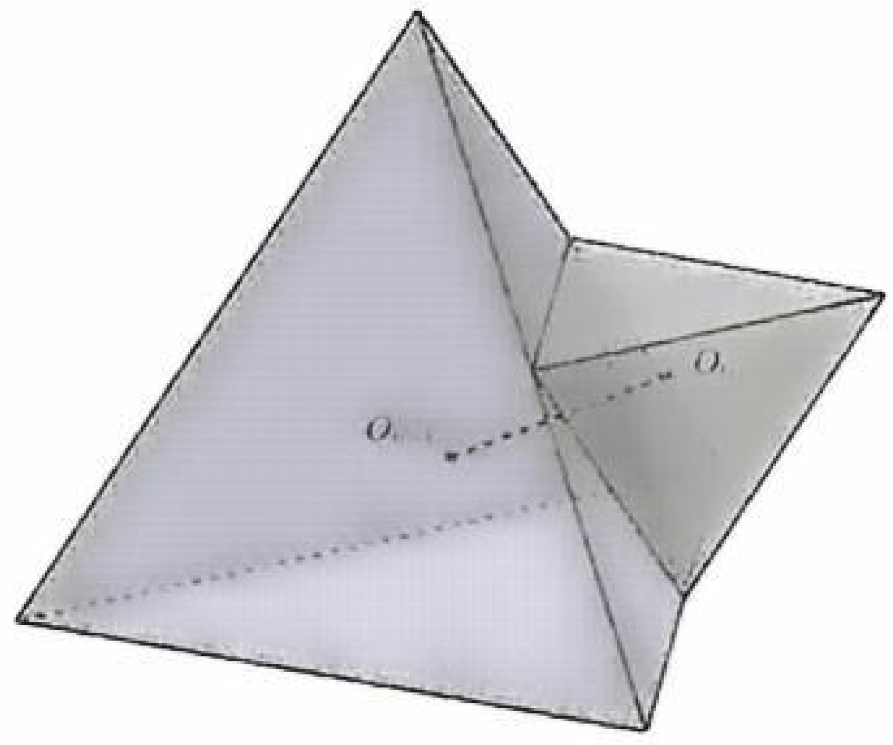
故F'在EK上，且$EF=\frac{2}{3}EK=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}AE=\frac{1}{3}AE$，故$F'$与$F$重合，

所以D,O_0,O_1,F,J共线，则$O_0O_1\perp$平面EHI，故$O_0O_1=\frac{\sqrt{6}}{12}a+\frac{\sqrt{6}}{12}\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{6}}{8}a$.



以此类推，几何体F_{n-1}最新构造的任一四面体T_{n-1}及其在F_n上对应的四面体T_n，棱长分别为x和$\frac{x}{2}$，其外接球球心为别为O_{n-1}和O_n，半径为R_{n-1}和R_n，记正四面体$ABCD$的中心为O_0，则$O_{n-1}O_n=\frac{\sqrt{6}}{8}x$. ………………………………………………………………… 2 分

因为$R_n=\frac{\sqrt{6}}{8}x$，$R_{n-1}=\frac{\sqrt{6}}{4}x$，所以$R_{n-1}-R_n=\frac{\sqrt{6}}{8}x$，故$R_{n-1}-R_n=O_{n-1}O_n$. ……… 3 分



记球O_n体内（含表面）所有点P的集合为M_n，

因为$PO_{n-1}\leqslant PO_n+O_nO_{n-1}\leqslant R_n+R_{n-1}-R_n=R_{n-1}$，所以$M_n\subsetneqq M_{n-1}(n\geqslant 1)$， ……………… 4 分

故$M_{n-1}\subsetneqq M_{n-2},M_{n-2}\subsetneqq M_{n-3},\cdots,M_1\subsetneqq M_0$，所以$M_n\subsetneqq M_0(n\geqslant 1)$，

因为球O_n为四面体的外接球，即对T_n上的任一点P_n，都有$P_n\in M_n(n\geqslant 1)$，

所以$P_n\in M_0$，即$O_0P_n\leqslant R_0=3\sqrt{3}$，

故R的最小值即为正四面体$ABCD$的外接球半径为$3\sqrt{3}$． ……………………………… 5 分