学校________班级________姓名________座号________考号________

密……封……线

南平市2026届高三年级第二次适应性练习卷

数　　学

时间：120 分钟　　满分：150 分

注意事项：

1. 答卷前，考生务必在练习卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的"准考证号、姓名"与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本练习卷上无效。
3. 考试结束后，将本练习卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\,\middle|\,|x-3|<3\right\}$，$B=\left\{2,4,6,7\right\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{2,4\}$　　B. $\{0,2,4\}$　　C. $\{2,4,6\}$　　D. $\{1,2,4,5,6,8\}$

2. 若复数 z 满足 $\mathrm{i}-\mathrm{i}z=1$，则复数 z 的虚部为

A. -1　　B. 1　　C. $-\mathrm{i}$　　D. i

3. 某智能助手回答问题数据统计如下：理学类占总提问的 40%，回答正确率为 90%；文史类占总提问的 60%，回答正确率为 80%，用频率估计概率，则该助手回答问题正确的概率为

A. 0.72　　B. 0.8　　C. 0.84　　D. 0.9

4. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 4 的奇函数，当 $-2<x<0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{x}$，则 $f(2)+f(\ln2)=$

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

5．已知二项式$\left(ax+\dfrac{b}{x}\right)^5$的展开式中所有项的系数和为32，若$X\sim N(1,4)$，

且$P(X<a)=0.2$，则$P(X<b)=$

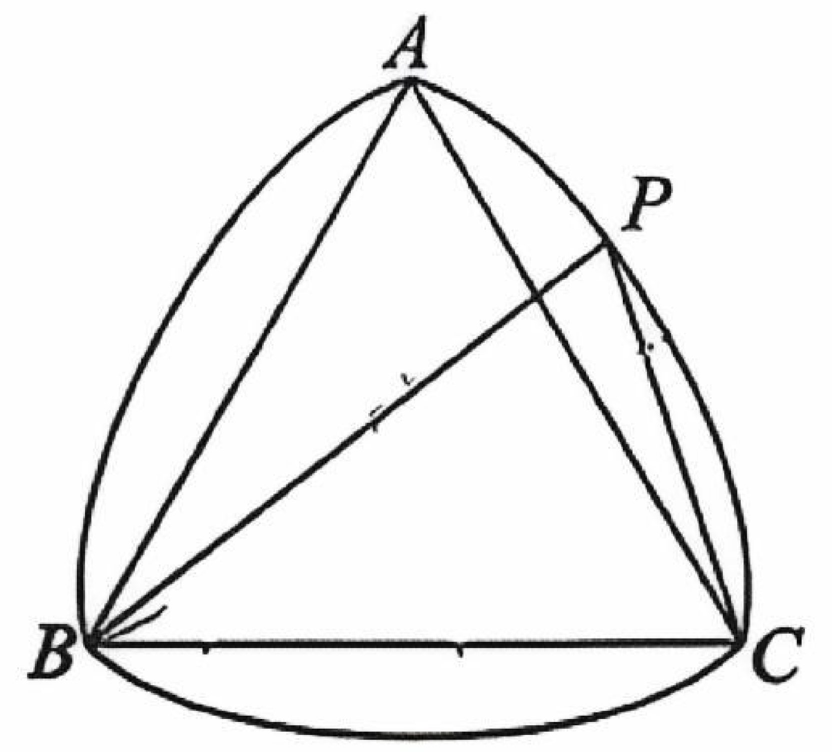
A．0.2　　　B．0.4　　　C．0.6　　　D．0.8

6．已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1$，将函数$f(x)$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长度可得到函数$g(x)$的图象，则下列结论正确的是

A．函数$f(x)$的最小正周期为2π　　　B．函数$f(x)$的最大值为$\sqrt{3}$

C．函数$g(x)$是奇函数　　　D．函数$g(x)$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$上单调递减

7．勒洛三角形是一种特殊的曲边三角形，指分别以正三角形的顶点为圆心，以其边长为半径作圆弧，由这三段圆弧组成的曲边三角形称为勒洛三角形．在如图所示的勒洛三角形中，已知$\triangle ABC$的边长为1，P为弧AC上任意一点，则$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的范围为



（第 7 题图）

A．$[0,\dfrac{1}{2}]$　　　B．$[0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$　　　C．$[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}]$　　　D．$[\dfrac{1}{2},1]$

8．已知P为双曲线$C:\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{4-m^2}=1$上一动点，若存在点$P$到$x$轴、$y$轴的距离之比为$\sqrt{3}$，则双曲线$C$的离心率范围为

A．$(1,2)$　　　B．$(1,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$　　　C．$(2,+\infty)$　　　D．$(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},+\infty)$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9．已知各项均为正数的数列：$1, 2, x_1, x_2, x_3, x_4$，其中奇数项成公差为d的等差数列且和为9，偶数项成公比为q的等比数列且和为14，则下列选项中正确的是

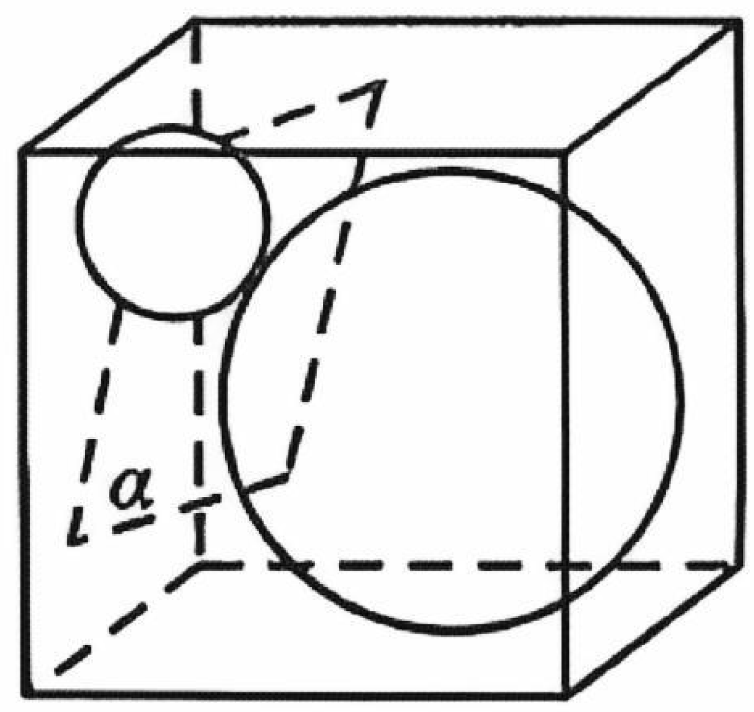
A．$d=1$　　B．$q=2$　　C．上四分位数为5　　D．下四分位数为5

10．已知函数$f(x)$是定义域为$\mathbf{R}$的可导函数，若$f(x+y)=f(x)+f(y)+6xy(x+y)$，且$f'(0)=-6$，则

A．$f(0)=0$　　B．$f(x)$是偶函数

C．$f'(x+1)-f'(x)=12x+6$　　D．$f(x)$在$(-1,1)$上是减函数

11．如图，在棱长为1的封闭正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内放置两个小球，两球相切，且各自与对角的三个面均相切，设过两球公切点的公切平面为α，则下列结论正确的是



（第11题图）

A．平面α截正方体所得截面不可能为五边形

B．平面α截正方体所得截面面积的最大值是$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

C．两球半径之和为定值$\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

D．两球体积之和的最大值是$\dfrac{\left(9-5\sqrt{3}\right)\pi}{2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 用函数 $\hat{y}=2^{2x+3}$ 拟合一组数据，则观测数据 $(2,126)$ 的残差为__▲__.

13 若 $a>0$，$b>0$，且 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1$，则 $\dfrac{2a}{b}+b$ 的最小值为__▲__.

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d\,(d\neq 0)$，若对任意 $i,j\in\mathbf{N}^*(i\neq j)$，总存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_i+a_j=a_n$，则 $\dfrac{a_1}{d}$ 的最小值为__▲__.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

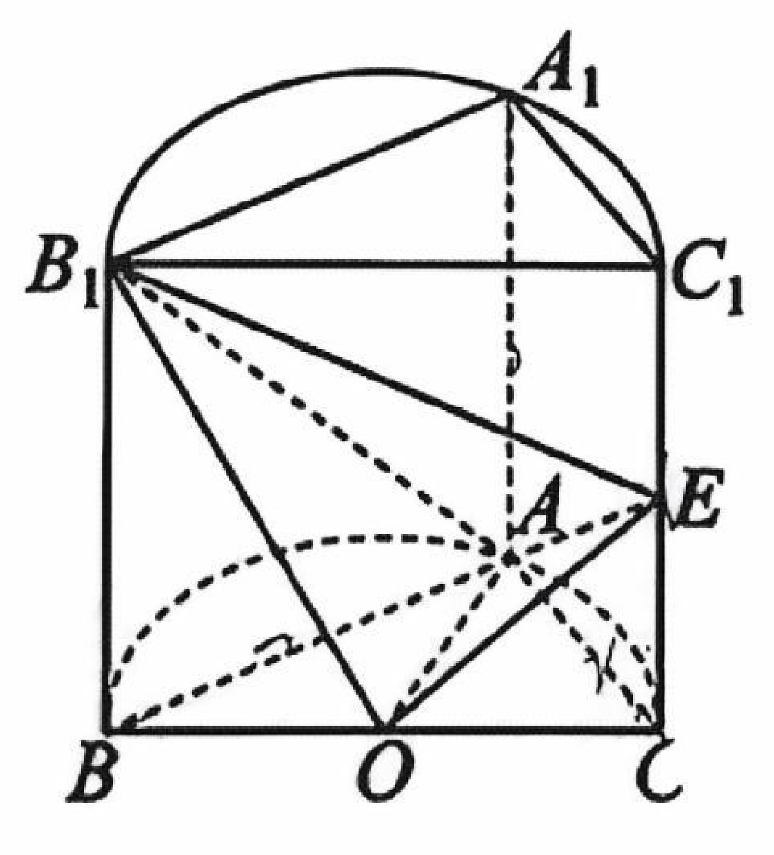
在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a，b，c，$a=b-1$，$c=b+1$.

（1）若 $\sin B=\cos C+\cos A\sin C$，求 $\triangle ABC$ 的周长；

（2）是否存在正整数 b，使得 $\triangle ABC$ 为钝角三角形?若存在，求出 b 的值；若不存在，说明理由.

16.（15 分）

如图所示，圆柱的一个轴截面为矩形 BCC_1B_1，BC 是圆柱底面的直径，O 为底面圆心，AA_1 为圆柱的一条母线，E 为 CC_1 的中点，且 $AB=AC=AA_1=2$.



（第 16 题图）

（1）求证：平面 $AOE\perp$ 平面 AOB_1；

（2）求平面 AB_1E 与平面 B_1OE 夹角的大小.

17.（15 分）

已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$，离心率为 $\frac{1}{2}$．平行于 x 轴的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，且与直线 $x=-4$ 交于 P 点，直线 PF_1 与 y 轴交于 Q 点.

（1）求 $\triangle ABF_2$ 面积的最大值；

（2）求 $\frac{|QA|}{|QF_1|}$ 的值.

18.（17 分）

定义：函数 $y=f(x)$ 图象上不同的三点 A, B, C，若它们的横坐标依次成等比数列，且该函数在点 B 处的切线的斜率恒小于直线 AC 的斜率，则称该函数在点 B 处“等比偏移”；若函数 $y=f(x)$ 图象上任意一点 B 都满足“等比偏移”，则称该函数是其定义域上的“等比偏移”函数.设 $f(x)=b\ln x+x^2$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的极值；

（2）当 $b=1$ 时，判断函数 $f(x)$ 在点 $B\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ 处是否“等比偏移”？请说明理由；

（3）若 $b\leqslant 0$，试证明：函数 $f(x)$ 是其定义域上的“等比偏移”函数.

参考数据：$\ln 2\approx 0.69$, $\ln 3\approx 1.10$

19.（17 分）

在棱长为 1 个单位的正四面体 $A-BCD$ 中，一个质点从顶点 A 出发，每次等可能地沿着棱移动 1 个单位，移动的方向是随机的.

（1）若质点移动了 3 次，记其经过点 B 的次数为 X，求 X 的分布列及数学期望；

（2）若质点移动了 n 次，质点回到 A 点的概率为 a_n.

（i）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（ii）设 $b_n=|4a_n-1|$，证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(\dfrac{1+b_n}{1+b_{n+1}}\right)^{b_n-b_{n+1}}<\dfrac{1}{2}$.

南平市 2026 届高三年级第二次适应性练习卷

数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. A　2. B　3. C　4. B　5. D　6. D　7. A　8. C

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. BC　10. ACD　11. ACD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. -2　13. 5　14. -1

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

【参考答案】（1）12；（2）存在，且 $b=3$.

【详解】（1）$\because \sin B=\cos C+\cos A\sin C, A+B+C=\pi$， --1 分

$\therefore \sin B=\sin\left(A+C\right)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\cos C+\cos A\sin C$， ----------------------2 分

$\therefore \sin A\cos C=\cos C$，即 $\cos C\left(\sin A-1\right)=0$， --3 分

$\therefore \cos C=0$ 或 $\sin A=1$，

$\because A,C\in\left(0,\pi\right)$，$\therefore C=\frac{\pi}{2}$ 或 $A=\frac{\pi}{2}$， ---4 分

当 $A=\frac{\pi}{2}$ 时，a 边最长，与条件 $a=b-1<b$ 矛盾，故舍去； --5 分

当 $C=\frac{\pi}{2}$ 时，则 $c^2=a^2+b^2$，又 $a=b-1, c=b+1$，

$\therefore (b+1)^2=(b-1)^2+b^2$，解得：$b=4$． --6 分

$\therefore a=3,b=4,c=5$，$\therefore \triangle ABC$ 的周长$=12$； --7 分

（2）显然$c>b>a$，若$\triangle ABC$为钝角三角形，则C为钝角， ---------------------------------------8 分

由余弦定理可得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{(b-1)^2+b^2-(b+1)^2}{2b(b-1)}=\dfrac{b^2-4b}{2b(b-1)}<0$， ------------10 分

解得$1<b<4$， --11 分

由三角形三边关系可得$b+b-1>b+1$，可得$b>2$， --12 分

$\because b\in Z$，故$b=3$． ---13 分

16．（15 分）

【参考答案】(1)证明见解析；(2)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【详解】（1）思路一：

由BC是直径可知$AB\perp AC$，则$\triangle ABC$是等腰直角三角形，故$AO\perp BC$， ---------------------1 分

由圆柱的特征可知$BB_1\perp$平面ABC，又$AO\subset$平面ABC，所以$BB_1\perp AO$， --------------------2 分

因为$BB_1\cap BC=B$，$BB_1,BC\subset$平面BCC_1B_1，则$AO\perp$平面BCC_1B_1， ----------------------------3 分

而$OE\subset$平面BCC_1B_1，则$AO\perp OE$， --4 分

因为$AB=AC=AA_1=2$，则$BC=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$，所以$B_1O^2=B_1B^2+BO^2=6$，

$OE^2=OC^2+CE^2=3$，$B_1E^2=B_1C_1^{\,2}+C_1E^2=9$，

所以$B_1E^2=B_1O^2+OE^2=9$，

所以$\angle B_1OE=90°$，即$B_1O\perp OE$， --5 分

因为$B_1O\perp OE$，$AO\perp OE$，$AO\cap B_1O=O$，$AO,B_1O\subset$平面AB_1O，

所以$OE\perp$平面AB_1O， ---6 分

又$OE\subset$平面AOE，故平面$AOE\perp$平面AOB_1． ---7 分

思路二：因为 $AB=AC=AA_1=2$，则 $OA=\sqrt{2}$， $OB_1=\sqrt{6}$， $AB_1=2\sqrt{2}$， --------------------2 分

所以 $AB_1^{\ 2}=OA^2+OB_1^{\ 2}=8$，

所以 $\angle AOB_1=90^\circ$，即 $B_1O\perp OA$， --4 分

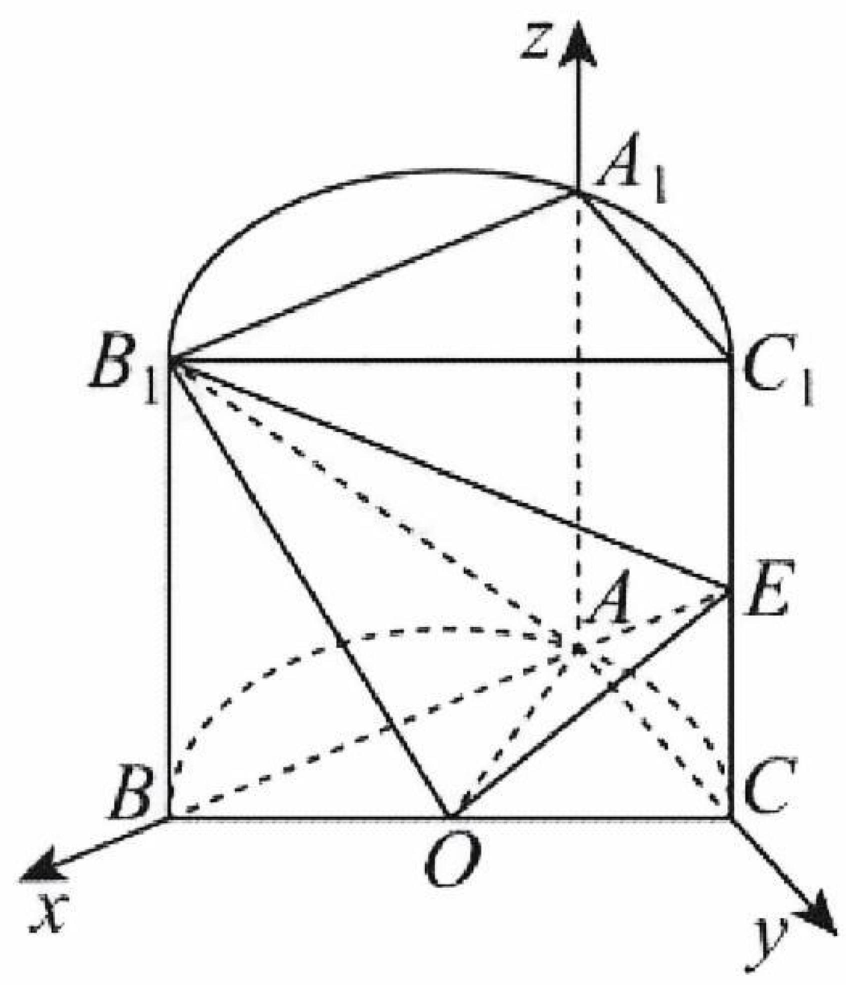
同理可证 $OE\perp OA$， ---5 分

在二面角 B_1-OA-E 中 $B_1O\perp OA$ 且 $OE\perp OA$，

所以 $\angle B_1OE$ 为二面角 B_1-OA-E 的平面角， --6 分

由思路一知 $\angle B_1OE=90^\circ$，所以二面角 B_1-OA-E 为直二面角，即平面 $AOE\perp$ 平面 AOB_1. --7 分

（2）由题意及（1）易知 AA_1,AB,AC 两两垂直，如图所示建立空间直角坐标系， -------------8 分



则 $B_1(2,0,2)$， $E(0,2,1)$， $O(1,1,0)$， ---9 分

所以 $\overrightarrow{AB_1}=(2,0,2)$， $\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$， $\overrightarrow{AO}=(1,1,0)$， ---10 分

由（1）知 $AO\perp$ 平面 B_1OE，故平面 B_1OE 的一个法向量是 $\overrightarrow{AO}=(1,1,0)$， ----------------------11 分

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 AB_1E 的一个法向量，

则有 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+2z=0\\ 2y+z=0\end{cases}$，取 $z=-2$，可得 $\vec{n}=(2,1,-2)$ ------------------------------------13 分

设平面 AB_1E 与平面 B_1OE 夹角为 θ，

所以$\cos\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AO}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AO}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AO}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\times3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

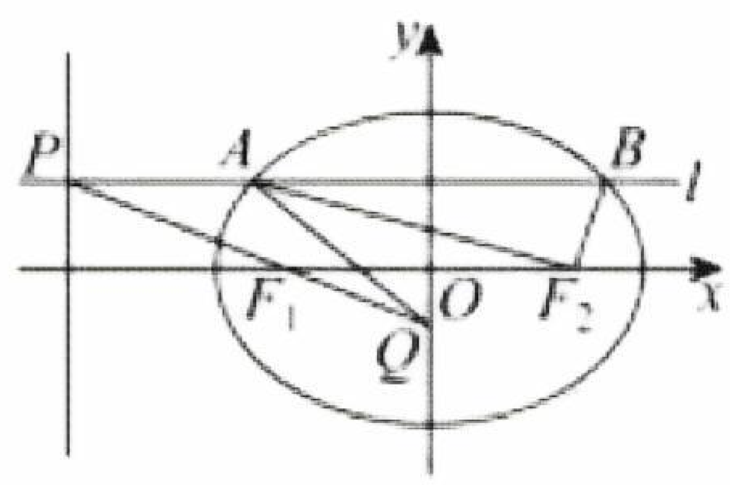
则平面AB_1E与平面B_1OE夹角的大小为$\dfrac{\pi}{4}$. --15 分

17. （15 分）

【参考答案】(1) $\sqrt{3}$；(2) 2 .

【详解】（1）因为椭圆C的离心率为$\dfrac{1}{2}$，故$a=2c=2,b^2=a^2-1=3$， ----------------------------2 分

所以椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，如图，



设$A\left(-x_0,y_0\right),B\left(x_0,y_0\right)$，其中$0<\left|x_0\right|<2$，$0<\left|y_0\right|<\sqrt{3}$，

因为A,B在C上，所以$\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，由基本不等式，

$1=\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}\geq2\sqrt{\dfrac{x_0^2}{4}\cdot\dfrac{y_0^2}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}|x_0y_0|$， --4 分

故$|x_0y_0|\leq\sqrt{3}$，当且仅当$\dfrac{x_0^2}{4}=\dfrac{y_0^2}{3}=\dfrac{1}{2}$时，等号成立， --5 分

而$\triangle ABF_2$面积$S=|x_0y_0|\leq\sqrt{3}$，所以$\triangle ABF_2$面积的最大值为$\sqrt{3}$. ----------------------------7 分

（2）设$P\left(-4,y_0\right)$，$Q\left(0,m\right)$，则P,F_1,Q三点共线，

所以$\overrightarrow{F_1P}=\lambda\overrightarrow{F_1Q}$，即$\left(-3,y_0\right)=\lambda\left(1,m\right)$，解得$m=-\dfrac{y_0}{3}$， --10 分

则$\left|QF_1\right|=\sqrt{1+\left(\dfrac{y_0}{3}\right)^2}$， --11 分

$\left|QA\right|=\sqrt{\left(-x_0\right)^2+\left(y_0+\dfrac{y_0}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(4-\dfrac{4}{3}y_0^2\right)+\left(\dfrac{4y_0}{3}\right)^2}=\sqrt{4+\dfrac{4}{9}y_0^2}$， ----------------------14 分

所以$\dfrac{\left|QA\right|}{\left|QF_1\right|}=2$. --15 分

18. （17 分）

【参考答案】（1）当$b\geqslant 0$时，$f\left(x\right)$无极值；当$b\leqslant 0$时，$f\left(x\right)$有极小值为$\dfrac{b}{2}\ln\left(-\dfrac{b}{2}\right)-\dfrac{b}{2}$，无极大值；（2）当$b=1$时，$f\left(x\right)$在$B\left(\dfrac{1}{4},f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right)$处不“等比偏移”；（3）证明见详解.

【详解】（1）首先$f\left(x\right)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)=\dfrac{b}{x}+2x$．----------------------------------1 分

当$b\geq 0$时，$f'\left(x\right)>0, f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，$f\left(x\right)$无极值；--------------------------------2 分

当$b<0$时，$f'\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，令$f'\left(x\right)=0\Rightarrow x=\sqrt{-\dfrac{b}{2}}$，易知$f\left(x\right)$在$\left(0,\sqrt{-\dfrac{b}{2}}\right)$上单调递减，在$\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2}},+\infty\right)$上单调递增，--4 分

$\therefore f(x)_{极小值}=f\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2}}\right)=\dfrac{b}{2}\ln\left(-\dfrac{b}{2}\right)-\dfrac{b}{2}, f\left(x\right)$无极大值．-------------------------------------5 分

（2）结论：当$b=1$时，$f\left(x\right)$在$B\left(\dfrac{1}{4},f(\dfrac{1}{4})\right)$处不“等比偏移”，理由如下：--------------------6 分

当$b=1$时，$f\left(x\right)=\ln x+x^2$．$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+2x$，

$f\left(x\right)$在B处的切线斜率为$f'\left(\dfrac{1}{4}\right)=4+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$，---7 分

取$x_A=\dfrac{1}{2}, x_C=\dfrac{1}{8}$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}$，$f\left(\dfrac{1}{8}\right)=\ln\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{64}$，--------------------------------8 分

$$k_{AC}=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{8}\right)}{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}=\frac{\left(\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\left(\ln\frac{1}{8}+\frac{1}{64}\right)}{\frac{3}{8}}=\frac{16}{3}\ln 2+\frac{5}{8}\approx\frac{16}{3}\times 0.69+\frac{5}{8}\approx 4.32<\frac{9}{2}$$

所以当$b=1$时，$f\left(x\right)$在$B\left(\dfrac{1}{4},f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right)$处不“等比偏移”．---10 分

一般的，取 A, B, C 三点的横坐标成等比数列，设 $x_A=\dfrac{1}{4q},\ x_C=\dfrac{q}{4}(q>0,\ q\neq 1),\ x_B=\dfrac{1}{4}$,

直线 AC 的斜率为 $k_{AC}=\dfrac{f(x_C)-f(x_A)}{x_C-x_A}=\dfrac{8q\ln q}{q^2-1}+\dfrac{1}{4}\left(q+\dfrac{1}{q}\right)$,

取 $q=2$ 就是上面的特例;若取 $q=4$，则有

$$k_{AC}=\frac{8q\ln q}{q^2-1}+\frac{1}{4}\left(q+\frac{1}{q}\right)=\frac{8\times 4\ln 4}{4^2-1}+\frac{1}{4}\left(4+\frac{1}{4}\right)=\frac{64\ln 2}{15}+\frac{17}{16}\approx\frac{64\times 0.69}{15}+\frac{17}{16}\approx 4.02<\frac{9}{2}$$

所以当 b=1 时，$f(x)$ 在 $B\left(\dfrac{1}{4},f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right)$ 处不“等比偏移”.

经检验，取 $q=2,3,4,\cdots,10$ 或 $\dfrac{1}{q}=2,3,4,\cdots,10$ 都成立;

（3）**思路一**：设 $x_A=x_1,x_C=x_2$，不妨设 $0<x_1<x_2$,则 $x_B=\sqrt{x_1x_2}$，

要证 $f(x)$ 是其定义域上的“等比偏移”函数，只要证 $f'\left(\sqrt{x_1x_2}\right)<k_{AC}$.

因为 $A\left(x_1,b\ln x_1+x_1{}^2\right),C\left(x_2,b\ln x_2+x_2{}^2\right),f'(x)=\dfrac{b}{x}+2x,f'\left(\sqrt{x_1x_2}\right)=\dfrac{b}{\sqrt{x_1x_2}}+2\sqrt{x_1x_2}$，

$$k_{AC}=\frac{(b\ln x_2+x_2{}^2)-(b\ln x_1+x_1{}^2)}{x_2-x_1}=b\cdot\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}+x_2+x_1,$$

故只要证 $\dfrac{b}{\sqrt{x_1x_2}}+2\sqrt{x_1x_2}<b\cdot\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}+x_2+x_1$，…（*） --12 分

由均值不等式知：$2\sqrt{x_1x_2}<x_2+x_1$，--13 分

当 $b=0$ 时，（*）式显然成立；--14 分

当 $b<0$ 时，要证（*）式，只要证 $\dfrac{b}{\sqrt{x_1x_2}}<b\cdot\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，

只要证$\dfrac{1}{\sqrt{x_1x_2}}>\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，即证$\ln\dfrac{x_2}{x_1}-\dfrac{\dfrac{x_2}{x_1}-1}{\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}}<0$． --15 分

设$\dfrac{x_2}{x_1}=t^2$，$t>1$，则只需证：当$t>1$时，$2\ln t-t+\dfrac{1}{t}<0$恒成立.

令$g(\mathrm{t})=2\ln t-t+\dfrac{1}{t}$，当$t>1$时，因为$g'(\mathrm{t})=\dfrac{2}{t}-1-\dfrac{1}{t^2}=-\dfrac{(t-1)^2}{t^2}<0$，所以$g(t)$在$(1,+\infty)$

上单调递减，从而$g(t)<g(1)=0$，命题获证． --17 分

（3）**思路二：**以上证法同思路一． --15 分

若设$\dfrac{x_2}{x_1}=t$，$t>1$，则只需证：当$t>1$时，$\ln t-\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}<0$恒成立.

令$g(\mathrm{t})=\ln t-\dfrac{t-1}{\sqrt{t}}$，因为$g'(\mathrm{t})=-\dfrac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}<0$，所以$g(t)$在$(1,+\infty)$上单调递减，从而

$g(t)<g(1)=0$，命题获证． --17 分

（3）**思路三：**要证$f\left(x\right)$是其定义域上的“等比偏移”函数，同思路一，只需证：

$\dfrac{b}{\sqrt{x_1x_2}}+2\sqrt{x_1x_2}<b\cdot\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}+x_2+x_1$， --12 分

整理得：

$$b\left(\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}-\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}\right)>-\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2\Leftrightarrow b\left(\ln x_2-\ln x_1-\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1x_2}}\right)>-\left(x_2-x_1\right)\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2$$

故只要证$b\left(\ln\dfrac{x_2}{x_1}-\dfrac{\dfrac{x_2}{x_1}-1}{\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}}\right)>-\left(x_2-x_1\right)\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2$.

因为$b\le 0$，且上式右边恒小于0，所以只要证：$\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{\frac{x_2}{x_1}-1}{\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}}<0$成立，剩余证法同思路一. --15分

19.（17分）

【参考答案】（1）分布列见详解，$E(X)=\frac{22}{27}$；（2）（i）$a_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$；（ii）证明见详解.

【详解】（1）依题意可得，X的所有可能取值为0，1，2，

$P(X=0)=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$， --1分

$P(X=1)=\frac{1\times C_3^1\times C_2^1+C_2^1\times 1\times C_3^1+C_2^1\times C_2^1\times 1}{3^3}=\frac{16}{27}$， --2分

$P(X=2)=\frac{1\times C_3^1\times 1}{3^3}=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$， --3分

则X的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{1}{9}$

所以$E(X)=0\times\frac{8}{27}+1\times\frac{16}{27}+2\times\frac{1}{9}=\frac{22}{27}$； --5分

（2）（i）由质点每次等可能地随机沿棱移动1个单位可知，若质点移动了n次，n次后质点到B，C，D三点的概率相同，记为b_n，易知，$a_1=0$，

若质点移动了n次，$a_n+3b_n=1$， --6分

若质点移动了 $n+1$ 次，由 B，C，D 三点等可能地向点 A 移动，故 $a_{n+1}=\frac{1}{3}C_3^1b_n=b_n$， ---7 分

则 $a_n+3a_{n+1}=1$，即 $a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{3}$，所以 $a_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{1}{4}\right)$，$a_1-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$，

数列 $\left\{a_n-\frac{1}{4}\right\}$ 是首项为 $-\frac{1}{4}$，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列，--9 分

所以 $a_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，即 $a_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$； --10 分

（ii）$b_n=|4a_n-1|=\frac{1}{3^{n-1}}\in(0,1]$，

$b_n-b_{n+1}=\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{1}{3^n}=\frac{2}{3^n}>0$，所以 $0<b_{n+1}<b_n\le 1$，$\{b_n\}$ 是递减数列， --------------------11 分

设 $f(x)=x-\ln(x+1)$，$0<x\le 1$，$f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，

所以由 $0<b_{n+1}<b_n\le 1$ 得 $b_n-\ln(b_n+1)>b_{n+1}-\ln(b_{n+1}+1)$， -------------------------------------13 分

即 $b_n-b_{n+1}>\ln(b_n+1)-\ln(b_{n+1}+1)>0$，

所以 $\ln\left(\frac{1+b_n}{1+b_{n+1}}\right)^{b_n-b_{n+1}}=(b_n-b_{n+1})\left[\ln(1+b_n)-\ln(1+b_{n+1})\right]<(b_n-b_{n+1})^2=\frac{4}{9^n}$， -----15 分

则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{1+b_i}{1+b_{i+1}}\right)^{b_i-b_{i+1}}<4\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\cdots+\frac{1}{9^n}\right)=4\times\frac{\frac{1}{9}\left[1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)<\frac{1}{2}$． -----17 分