

福建百校 11 月联合测评

数学

全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答,写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 选择题用 2B 铅笔在答题卡上把所选答案的标号涂黑;非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答;字体工整,笔迹清楚。
4. 考试结束后,请将试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -1$, $a_4 = 9$, 则公差 $d =$
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
2. 若复数 z 满足 $z(1+i) = |2-i|$, 则 $|z| =$
A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{5}$ D. 5
3. 设向量 $a = (3, 1)$, $b = (m, 2)$, 若 $(b+2a) \perp (b-2a)$, 则负数 $m =$
A. -3 B. -4 C. -5 D. -6
4. 设 $a = 5^{0.3}$, $b = \left(\frac{1}{5}\right)^{-0.4}$, $c = \log_{0.5} 0.6$, 则 a, b, c 的大小关系为
A. $b < a < c$ B. $c < a < b$ C. $b < c < a$ D. $a < b < c$
5. 已知圆锥的高为 $\sqrt{2}$, 它的侧面展开图的圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$, 则此圆锥的侧面积为
A. $\sqrt{3}\pi$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi$ C. $\frac{6\pi}{2}$ D. $\frac{3\pi}{4}$
6. 已知函数 $f(x) = e^{-x^2+mx}$ ($m \in \mathbb{R}$), 则“ $m \leq 2$ ”是“ $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 若 $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=2$, 则 $\tan\theta=$

A. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

8. 若函数 $f(x)=(x-a)(x-1)^2$ 的极大值为 $4a^3$, 则 $a=$

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 $a>0, b>0$, 且 $a+b=1$, 则

A. $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}$

B. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$

C. $a + \sqrt{b} < 1$

D. $a + \frac{b}{a} > 1$

10. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, P 为底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内一动点, 且 $BP \perp B_1D$, 则

A. 点 P 的轨迹的长度为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $BP \parallel$ 平面 ACD_1

C. 恰有一个点 P , 满足 $BP \perp AC$

D. BP 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

11. 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 当 $x>0$ 时, $f(x)<0, f(2)=-4$, 则

A. $f(0)=0$

B. $f(x)+f(-x)=0$

C. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增

D. $f(x^2-2x)-f(2-x)>4$ 的解集为 $(0, 1)$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 若 $A=60^\circ, a=\sqrt{19}, b=5$, 则 $c=$ _____.

13. 若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-ax+b$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是_____.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases} -x^3, & x<0 \\ f(x-1)-1, & x\geq 0 \end{cases}$, $g(x)=f(x)+x+m$, 若 $g(x)$ 在区间 $[0, 2025]$ 上恰有

4 050 个零点, 则实数 m 的取值范围为_____.

四、解答题:本題共 5 小題,共 77 分.解答應寫出必要的文字說明、證明過程及演算步驟.

15. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x - \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .

(1)求 $f(x)$ 的对称轴方程和单调递减区间;

(2) 设函数 $g(x) = 2\sin 2x + f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, 求函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域.

16. (本小题满分 15 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $(\sin A + \sin B + \sin C)(c - a + b) = 3c \sin B$.

(1) 若 $a=2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 外接圆的半径;

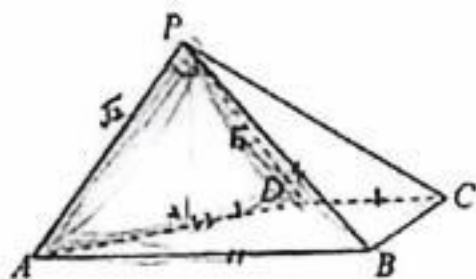
(2) 若 $b=3, c=2$, 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 求线段 AG 的长.

17. (本小題滿分 15 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD \perp PB$, $AB=AD=PB=2CD=2$, $PA=PD=\sqrt{2}$.

(1) 证明: 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$;

(2)求 PA 与平面 PCD 所成的角的余弦值.



18. (本小题满分 17 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, $a_n + a_{n+1} = 4 \times 3^n$.

(1) 求证: $\{a_n - 3^n\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

(3) 令 $b_n = \frac{n^3}{a_n - 2 \times (-1)^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 中的最大项.

19. (本小题满分 17 分)

设函数 $f(x) = a(x+1)\ln(x+1) - x$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = x$, 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a ;

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_{n+1} = 2a_n - 2a_n^2$, 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明: $\sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} > \frac{n - \ln n - 1}{2}$.

福建百校 11 月联合测评 · 数学

参考答案、提示及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6
答案	D	A	D	B	D	C
题号	7	8	9	10	11	
答案	B	A	ABD	BC	ABD	

1. D 【解析】由题知公差 $d = \frac{a_6 - a_1}{6-1} = 2$, 故选: D.

2. A 【解析】因为 $z(1+i) = |2-i| = \sqrt{5}$, 所以 $z = \frac{\sqrt{5}}{1+i} = \frac{\sqrt{5}(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}i}{2}$, 所以 $|z| = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 故选: A.

3. D 【解析】若 $(b+2a) \perp (b-2a)$, 则 $|b| = |2a|$, 所以 $|b| = \sqrt{m^2+4} = 2\sqrt{10}$, 解得 $m = -6$, 故选: D.

4. B 【解析】由 $b = \left(\frac{1}{5}\right)^{0.5} = 5^{0.5} > a = 5^{0.4} > 5^0 = 1 = \log_{0.5} 0.5 > c = \log_{0.5} 0.6$, 即 $c < a < b$, 故选: B.

5. D 【解析】设圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l , 因为侧面展开图的圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$, 所以 $\frac{2\pi l}{3} = 2\pi r$, 得 $l = 3r$, 所以圆锥的高为 $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{(3r)^2 - r^2} = 2\sqrt{2}r = \sqrt{2}$, 所以 $r = \frac{1}{2}$, $l = \frac{3}{2}$, 则 $S_{\text{侧}} = \pi rl = \frac{3\pi}{4}$, 故选: D.

6. C 【解析】 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 则根据复合函数的单调性, 函数 $y = -x^2 + mx$ 需满足在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $\frac{m}{2} \leq 1$, 所以 $m \leq 2$, 故选: C.

7. B 【解析】由 $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} = 2$, 可得 $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$, 所以 $\tan\theta = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$, 故选: B.

8. A 【解析】 $f'(x) = (x-1)^2 + 2(x-1)(x-a) = (x-1)(3x-2a-1)$, 若 $a=1$, 则 $f(x)$ 无极大值, 不符合题意; 若 $a>1$, 则 1 为 $f(x)$ 的极大值点, 不符题意; 若 $a<1$, 则 $\frac{2a+1}{3}$ 为 $f(x)$ 的极大值点, 所以 $f\left(\frac{2a+1}{3}\right) = \left(\frac{2a+1}{3}-a\right)\left(\frac{2a+1}{3}-1\right) = \frac{(1-a)}{3} \times \frac{4(a-1)^2}{9} = 4a^3$, 所以 $(1-a)^3 = 27a^3$, 所以 $1-a=3a$, 解得 $a=\frac{1}{4}$, 故选: A.

9. ABD 【解析】对于 A 选项, 因为 $a+b=1 \geq 2\sqrt{ab}$, 所以 $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}$ (当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号), A 选项正确;

对于 B 选项, 因为 $1=a+b \geq \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{2}$, 所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2}$ (当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号), B 选项正确;

对于 C 选项, 因为 $(a+\sqrt{b})-1 = 1-b+\sqrt{b}-1 = \sqrt{b}-b = \sqrt{b}(1-\sqrt{b}) > 0$, 有 $a+\sqrt{b} > 1$, C 选项错误;

对于 D 选项, 因为 $a+\frac{b}{a} = a+\frac{1-a}{a} = a+\frac{1}{a}-1 > 2-1=1$, D 选项正确, 故选: ABD.

10. BC 【解析】对于 A 选项, 易知 $B_1D \perp$ 平面 BA_1C_1 , 所以点 P 在对角线 A_1C_1 上, 即点 P 的轨迹的长度为 $\sqrt{2}$, A 选项错误;

对于 B 选项, 因为平面 $BA_1C_1 \parallel$ 平面 ACD_1 , 所以 $BP \parallel$ 平面 ACD_1 , B 选项正确;

对于 C 选项, $AC \perp$ 平面 BB_1D_1D , 当且仅当 P 为 A_1C_1 的中点时, 满足 $BP \perp AC$, C 选项正确;

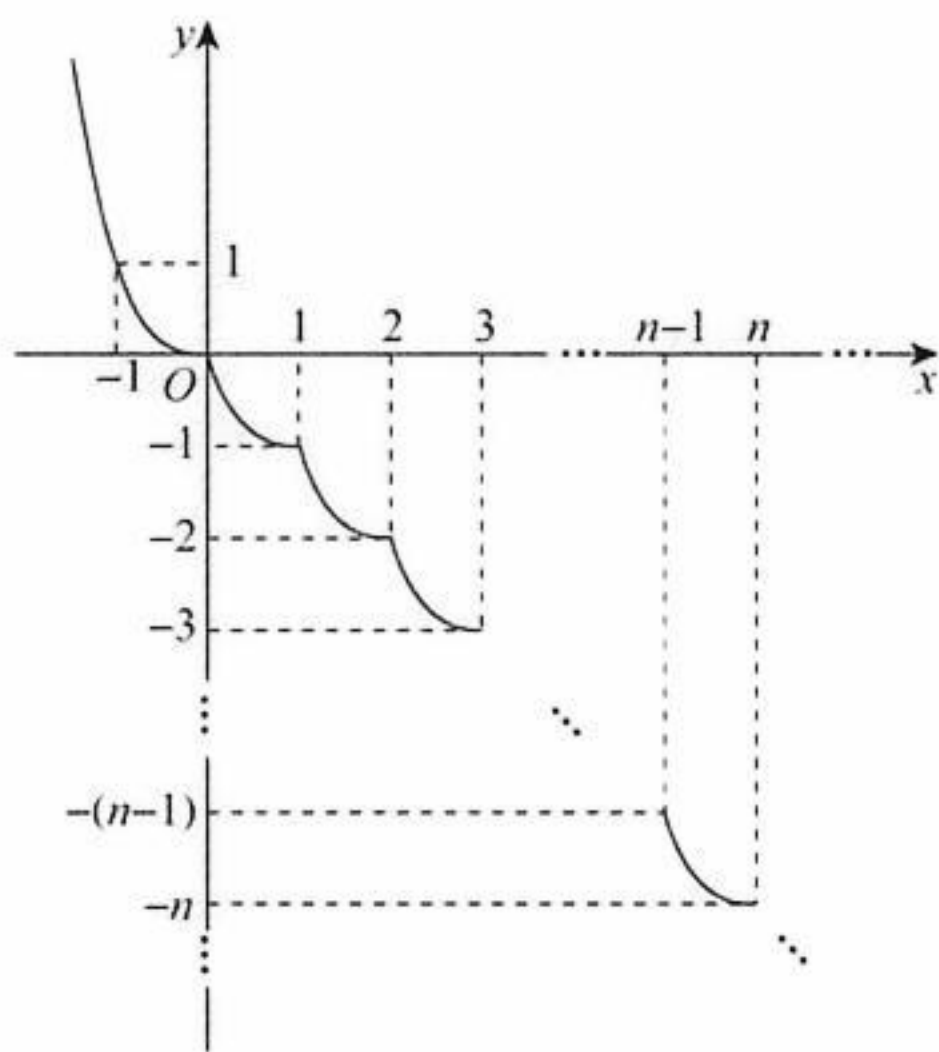
对于 D 选项, BP 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角即为 $\angle BPB_1$, 所以当 P 为 A_1C_1 的中点时, $\angle BPB_1$ 取得最大值, 此时 $\sin \angle BPB_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$, D 选项错误, 故选: BC.

11. ABD 【解析】对于 A 选项, 令 $x=0, y=1$ 可得 $f(0+1)=f(0)+f(1)$ 可得 $f(0)=0$, 因此 A 选项正确;
 对于 B 选项, 令 $x=-y$ 可得 $f(0)=f(x)+f(-x)=0$, 因此 B 选项正确;
 对于 C 选项, 取任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 则可得 $x_2 - x_1 > 0$, 又因为当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, 所以 $f(x_2 - x_1) < 0$,
 所以 $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) - f(x_2 - x_1 + x_1) = f(x_1) - [f(x_2 - x_1) + f(x_1)] = -f(x_2 - x_1) > 0$, 因此
 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 所以 $f(x_1) > f(x_2)$, 可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 因此 C 选项错误;
 对于 D 选项, 由 $f(x-2x) - f(2-x) > 4$ 可得 $f(x-2x) - 4 > f(2-x)$, 也即 $f(x-2x) + f(2) > f(2-x)$,
 因此 $f(x-2x+2) > f(2-x)$, 结合 C 中单调性可知 $x-2x+2 < 2-x$, 即 $x-x < 0$, 解得 $0 < x < 1$. 因此不
 等式 $f(x-2x) - f(2-x) > 4$ 的解集为 $(0, 1)$, 因此 D 选项正确. 故选: ABD.

12. 2 或 3 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$, 又 $A=60^\circ, a=\sqrt{19}, b=5$, 所以 $19=25$
 $+c^2 - 2 \times 5 \times c \times \frac{1}{2}$, 所以 $c^2 - 5c + 6 = 0$, 解得 $c=2$ 或 $c=3$. 经检验, $c=2, c=3$ 均符合题意.

13. $(-\infty, 3]$ 【解析】 $\because f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - ax + b, \therefore f'(x) = x^2 + 2x - a, \therefore$ 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - ax$ 在区
 间 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore f'(x) = x^2 + 2x - a \geq 0$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 由于 $f'(x) = x^2 + 2x - a$ 在区
 间 $[1, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore$ 必须且只需 $f'(1) = 3 - a \geq 0$, 解得 $a \leq 3$.

14. $(0, \frac{2\sqrt{3}}{9})$ 【解析】当 $x \in [n-1, n) (n \in \mathbf{N})$ 时, $f(x) = f(x-1) - 1 = f(x-2) - 2 = \dots = f(x-n) - n$, 显然
 $x-n \in [-1, 0), \therefore f(x-n) = -(x-n)^3, \therefore f(x) = -(x-n)^3 - n, x \in [n-1, n)$, 不难知道, $f(x)$ 的图象如下:



易知 $g(x)$ 在区间 $[0, 2025]$ 上恰有 4050 个零点, 即直线 $y = -x - m$ 与曲线 $y = f(x)$ 在区间 $[0, 2025]$ 上恰
 有 4050 个交点, 由 $f(x)$ 的图象可知, 只需直线 $y = -x - m$ 与曲线 $y = f(x)$ 在区间 $(n-1, n)$ 上恰有 2 个交
 点, 不妨设直线 $y = -x - m$ 与曲线 $y = f(x)$ 相切于 $T_n(x_n, y_n), x_n \in (n-1, n), \therefore$ 当 $x \in (n-1, n)$ 时,

$$f'(x) = -3(x-n)^2, \therefore \begin{cases} -3(x_n-n)^2 = -1 \\ -(x_n-n)^3 - n = -x_n - m \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x_n = n - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ m = \frac{2\sqrt{3}}{9} \end{cases}, \text{显然 } -m < 0, \text{即 } m > 0, \therefore 0 < m < \frac{2\sqrt{3}}{9}, \text{即}$$

实数 m 的取值范围为 $(0, \frac{2\sqrt{3}}{9})$.

15. 解: (1) 由题意 $T = \frac{2\omega}{2} = \pi$, 即 $\omega = 2$, (2 分)

所以 $f(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$. 令 $2x - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

解得 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以函数 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbf{Z}$; (4 分)

由 $2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

解得 $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$ (6 分)

(2) $g(x) = 2\sin 2x + f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin 2x + 2\cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3}\right] = 2\sin 2x + 2\cos 2x = 2\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$,
..... (9 分)

因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$,

所以 $\sin \frac{5\pi}{4} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sin \frac{\pi}{2}$, (11 分)

即 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$, 所以 $-2 \leq 2\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2\sqrt{2}$,

所以函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $[-2, 2\sqrt{2}]$ (13 分)

16. 解: (1) 因为 $(\sin A + \sin B + \sin C)(c - a + b) = 3c \sin B$,

所以由正弦定理得 $3bc = (b + c + a)(b + c - a) = (b + c)^2 - a^2 = b^2 + c^2 - a^2 + 2bc$, (2 分)

所以 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$, (4 分)

则由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$ (6 分)

又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ (7 分)

设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R , 则 $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$ (8 分)

(2) 因为点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,

所以 $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, (11 分)

所以 $|\overrightarrow{AG}| = \frac{1}{3}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + 2|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \frac{\pi}{3}}$
 $= \frac{1}{3}\sqrt{c^2 + b^2 + 2bc \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} \times \sqrt{4 + 9 + 2 \times 3 \times 2 \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{19}}{3}$ (15 分)

17. 解: (1) 取 AD 中点 O , 连接 PO, BO ,

$\therefore AO = \frac{1}{2}AD = 1$, (1 分)

又 $\because PA = PD = \sqrt{2}, \therefore PO \perp AD, PO = \sqrt{PA^2 - AO^2} = 1$, (2 分)

$\because AD \perp PB, PB, PO \subset$ 平面 $POB, PB \cap PO = P, \therefore AD \perp$ 平面 POB , (3 分)

$\because BO \subset$ 平面 $POB, \therefore AD \perp BO$ (4 分)

在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中, $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{3}$,

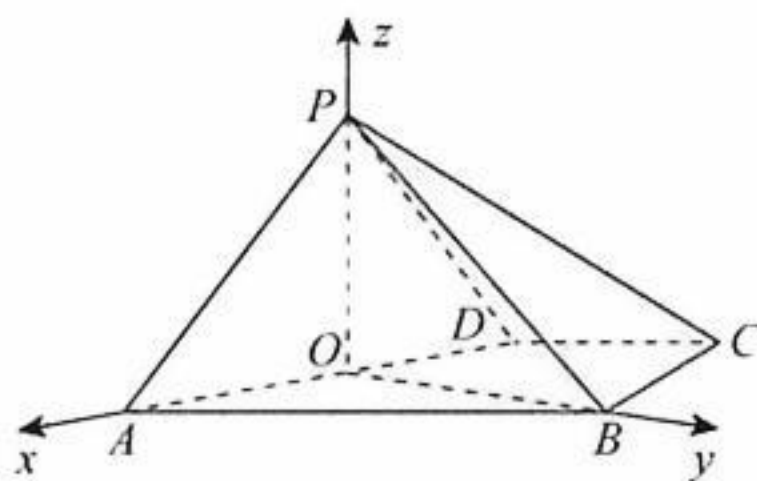
$\because PB^2 = BO^2 + PO^2, \therefore PO \perp BO$, (5 分)

又 $\because PO \perp AD, PO \perp BO, AD, BO \subset$ 平面 $ABCD, AD \cap BO = O$,

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$, (6 分)

$\because PO \subset$ 平面 PAD , $\therefore$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ (7 分)

(2) 由(1)可知 $PO \perp AD$, $PO \perp BO$, $AD \perp BO$, $\therefore$ 以 O 为原点, 以 OA, OB, OP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示空间直角坐标系, (8 分)



$\therefore P(0,0,1), A(1,0,0), C\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), D(-1,0,0)$, (10 分)

$\therefore \overrightarrow{PA} = (1,0,-1), \overrightarrow{DP} = (1,0,1), \overrightarrow{CD} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, (11 分)

设 $n = (x, y, z)$ 是平面 PCD 的一个法向量, 则
$$\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{DP} = x + z = 0 \\ n \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \end{cases}$$

取 $y = 1$, 则 $n = (\sqrt{3}, 1, -\sqrt{3})$, (13 分)

设 PA 与平面 PCD 所成的角为 θ ,

则 $\sin \theta = |\cos \langle n, \overrightarrow{PA} \rangle| = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$, (14 分)

$\therefore \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{7}}{7}$,

$\therefore PA$ 与平面 PCD 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$, (15 分)

18. 解: (1) 因为 $a_n + a_{n+1} = 4 \times 3^n$, 所以 $a_{n+1} - 3^{n+1} = -(a_n - 3^n)$, (2 分)

又 $a_1 = 1$, 所以 $a_1 - 3 = -2$, (3 分)

所以 $\{a_n - 3^n\}$ 是以 -2 为首项, -1 为公比的等比数列, (4 分)

(2) 由(1)可得 $a_n - 3^n = 2 \times (-1)^n$, 所以 $a_n = 3^n + (-1)^n \times 2$, (5 分)

所以 $S_n = 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n + 2 \times [(-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^n]$, (6 分)

$= \frac{3(1-3^n)}{1-3} + 2 \times \frac{(-1)^n - 1}{2} = \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{5}{2} + (-1)^n$, (8 分)

(3) 由(2)可得 $b_n = \frac{n}{a_n - 2 \times (-1)^n} = \frac{n}{3^n}$, (9 分)

则 $b_{n+1} - b_n = \frac{(n+1)^1}{3^{n+1}} - \frac{n^1}{3^n} = \frac{-n(2n^2 - 3n - 3) + 1}{3^{n+1}}$, (11 分)

令 $-n(2n^2 - 3n - 3) + 1 > 0$, 得 $1 \leq n \leq 2$, (12 分)

所以当 $1 \leq n \leq 2$ 时, $b_{n+1} - b_n > 0$, (13 分)

令 $-n(2n^2 - 3n - 3) + 1 < 0$, 得 $n \geq 3$, 所以当 $n \geq 3$ 时, $b_{n+1} - b_n < 0$, (15 分)

即 $b_1 < b_2 < b_3 > b_4 > b_5 > \dots$, (16 分)

所以数列 $\{b_n\}$ 的最大项为 $b_3 = 1$ (17 分)

19. 解: (1) $f'(x) = a[1 + \ln(x+1)] - 1$, $f(0) = 0$, $f'(0) = a - 1$, (1 分)

依题意, $f'(0) = a - 1 = 1$, 解得 $a = 2$, (2 分)

所以 $f'(x) = 2\ln(x+1) + 1$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{\sqrt{e}} - 1$, 列表如下:

x	$\left(-1, \frac{1}{\sqrt{e}} - 1\right)$	$\frac{1}{\sqrt{e}} - 1$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1, +\infty\right)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	$1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$	单调递增

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{e}}$, 无极大值. (4 分)

(2) $f(x) = (x+1)\left[a\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right]$, 设 $g(x) = a\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$,

则 $f(x) \geq 0$ 可转化为 $g(x) = a\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geq 0$, (5 分)

$$g'(x) = \frac{a}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{ax+a-1}{(x+1)^2}.$$

当 $a=0$ 时, $f(x) = -x$, 显然不符题意; (6 分)

当 $a < 0$ 时, $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$, 不符题意; (7 分)

当 $a > 0$ 时, 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1-a}{a}$, 因为 $g(0) = 0$,

若 $a > 1$, 则 $g(x)$ 在区间 $\left(\frac{1-a}{a}, 0\right)$ 单调递增, $g\left(\frac{1-a}{a}\right) < g(0) = 0$, 不符题意;

若 $0 < a < 1$, 则 $g(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{1-a}{a}\right)$ 单调递减, $g\left(\frac{1-a}{a}\right) < g(0) = 0$, 不符题意;

若 $a=1$, 则 0 为 $g(x)$ 的极小值点, 符合题意.

综上, $a=1$ (9 分)

(3) $a_{n+1} = 2a_n - 2a_n^2 = \frac{1}{2} - 2\left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$, $a_{n+1} - a_n = a_n - 2a_n^2 = a_n(1 - 2a_n) > 0$,

所以 $\frac{1}{4} \leq a_n < \frac{1}{2}$, (11 分)

因为 $\frac{1}{2} - a_{n+1} = 2\left(\frac{1}{2} - a_n\right) = (1 - 2a_n)\left(\frac{1}{2} - a_n\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - a_n\right)$, 有 $\frac{1}{2} - a_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - a_{n-1}\right) \leq \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2} - a_{n-2}\right) \leq \dots \leq \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2} - a_1\right) = \frac{1}{2^{n+1}}$,

所以 $\left(\frac{1}{2} - a_1\right) + \left(\frac{1}{2} - a_2\right) + \dots + \left(\frac{1}{2} - a_n\right) \leq \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2}$,

所以 $\frac{n}{2} - S_n < \frac{1}{2}$, (13 分)

由(2)可知, 当 $\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geq 0$ 时,

令 $x = \frac{1}{n}$, 则 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 1} = \frac{1}{n+1}$, (15 分)

所以当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n}{n-1} = \ln n$,

所以 $\sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} > \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) > \frac{n}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\ln n}{2} = \frac{n - \ln n - 1}{2}$, (17 分)