保密★使用前

泉州市2026届高中毕业班质量监测（一）

2025.09

高三数学

本试卷共19题，满分150分，共6页。考试用时120分钟。

★祝考试顺利★

注意事项：

1．答题前，学生务必在练习卷、答题卡规定的地方填写自己的学校、准考证号、姓名。学生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与学生本人准考证号、姓名是否一致。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本练习卷上无效。

3．答题结束后，学生必须将练习卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若$(1+i)z=2$，则在复平面内z对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．已知集合$A=\{x\,|\,2\leqslant x<4\}$，$B=\{x\,|\,3^x\geqslant 27\}$，则$A\cap B=$

A．$[2,3]$　　B．$(3,4)$　　C．$[3,4)$　　D．$[2,+\infty)$

3．已知双曲线$C: x^2-\dfrac{y^2}{m}=1$的一条渐近线的方程为$2x-y=0$，则$m=$

A．4　　B．2　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{1}{4}$

4．已知函数$f(x)=\cos(2x+\varphi)$的图象关于点$(\dfrac{\pi}{3},0)$中心对称，则其图象的一条对称轴方程可以是

A．$x=-\dfrac{\pi}{6}$　　B．$x=-\dfrac{\pi}{12}$　　C．$x=\dfrac{\pi}{12}$　　D．$x=\dfrac{\pi}{6}$

5．定义在R上的奇函数$f(x)$满足$f(x+2)=f(x)$，且当$0<x\leqslant 1$时，$f(x)=-x^2+x$，则$f(\frac{7}{2})=$

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{2}$

6．一条河两岸平行，河的宽度为1.2km，一艘船从河岸边的某地出发，向河对岸航行．已知船在静水的速度大小为13km/h，且船在航行过程中受水流的影响．当船以路程最短的方式航行到对岸时，所需时间为6分钟，则水流速度的大小为

A．1.3km/h　　B．5km/h　　C．10km/h　　D．12km/h

7．若实数x,y,z满足$2^x-2=3^y-3=5^z-5$，则x,y,z的大小关系不可能是

A．$x=y=z$　　B．$x>y>z$　　C．$z>y>x$　　D．$z>x>y$

8．已知直线$x+ay-2\sqrt{2}a+1=0$与圆$O:x^2+y^2=r^2(r>0)$交于不同的两点A,B，若$\angle AOB$存在最小值且最小值不大于$60°$，则r的取值范围为

A．$(\sqrt{3},2]$　　B．$(\sqrt{3},2\sqrt{3}]$　　C．$(3,2\sqrt{3}]$　　D．$(3,6]$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9．在直三棱柱$ABC-A'B'C'$中，$\angle ABC=90°$，$BB'=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}BC$，$M$为$BB'$的中点，则

A．$A'C//C'M$　　B．$A'C'//$平面AMC

C．$AM\perp B'C'$　　D．平面$AMC\perp$平面$A'MC'$

10．在平面直角坐标系xOy中，设F为抛物线$C:y^2=4x$的焦点，M是C上一点，点$N(-1,0)$，若NM的延长线与C交于点A．记$\angle ANF=\alpha,\angle AFN=\beta,\angle MFN=\gamma$，则

A．$\tan\alpha=\sin\beta$　　B．$\tan\alpha=\cos\beta$　　C．$\tan\alpha=\sin\gamma$　　D．$\tan\alpha=\cos\gamma$

11．在$\triangle ABC$中，若$\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin A}=4\cos C$，则

A．$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$　　B．C的最大值为$60°$

C．$\sin A\sin(C-B)=\sin B\sin(A-C)$　　D．$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}=\frac{2}{\tan C}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．若一个等差数列的前 3 项和为 9，前 7 项和为 35，则该数列的第 6 项为_______.

13．若函数 $f(x)=x(x-a)^2$ 在 $x=1$ 处取得极小值，则 $a=$_______.

14．已知：(i) 在一系列独立重复的伯努利试验中，用 X 表示事件 A 第一次发生时已经进行的试验次数，记每次试验中事件 A 发生的概率为 $p\ (0<p<1)$，则 X 的分布列为 $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$，$k=1,2,3,\cdots$．如果随机变量 X 具有上式的形式，则称随机变量 X 服从几何分布，且 $E(X)=\dfrac{1}{p}$；(ii) 若随机变量 X,ξ_i 满足 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$，则 $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}E(\xi_i)$．连续不断地抛掷一枚骰子，记录下它每次落地时朝上的面的点数，直到 2,4,6 点均出现为止，则抛掷总次数的数学期望为_______.

四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13分）

为比较A、B两种AI教学系统在提升教师备课效率方面的差异，研究人员在某地区随机招募了200名教师，并随机分配其中100名使用系统A，其余100名使用系统B．经过一个月的试用后，以“备课时间减少15%以上”作为备课效率显著提升的标准，经整理得到如下列联表：

备课效率 / 使用的教学系统	显著提升	没有显著提升	合计
系统A	75	25	100
系统B	55	45	100
合计	130	70	200

（1）记事件“该地区教师使用系统A后，备课效率显著提升”的概率为P，求P的估计值；

（2）根据小概率值$\alpha=0.005$的独立性检验，分析这两种AI教学系统在显著提升教师备课效率方面是否存在差异．

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

α	0.05	0.005	0.001
x_α	3.841	7.879	10.828

16. （15 分）

已知函数 $f(x)=x^2$，设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_n,f(x_n))$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(x_{n+1},0)$，其中 $x_1=1$.

（1）写出 x_2,x_3，并求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\{nx_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，证明：$S_n<4$.

17. （15分）

矩形 $ABCD$ 的长为4，宽为2，其四边的中点恰为椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的顶点.

（1）求 E 的方程及离心率；

（2）若 P,Q,R 三点在以 AC 为直径的圆上，且直线 PQ,PR 均与 E 有且只有一个公共点，证明：$\triangle PQR$ 是直角三角形.

18. （17分）

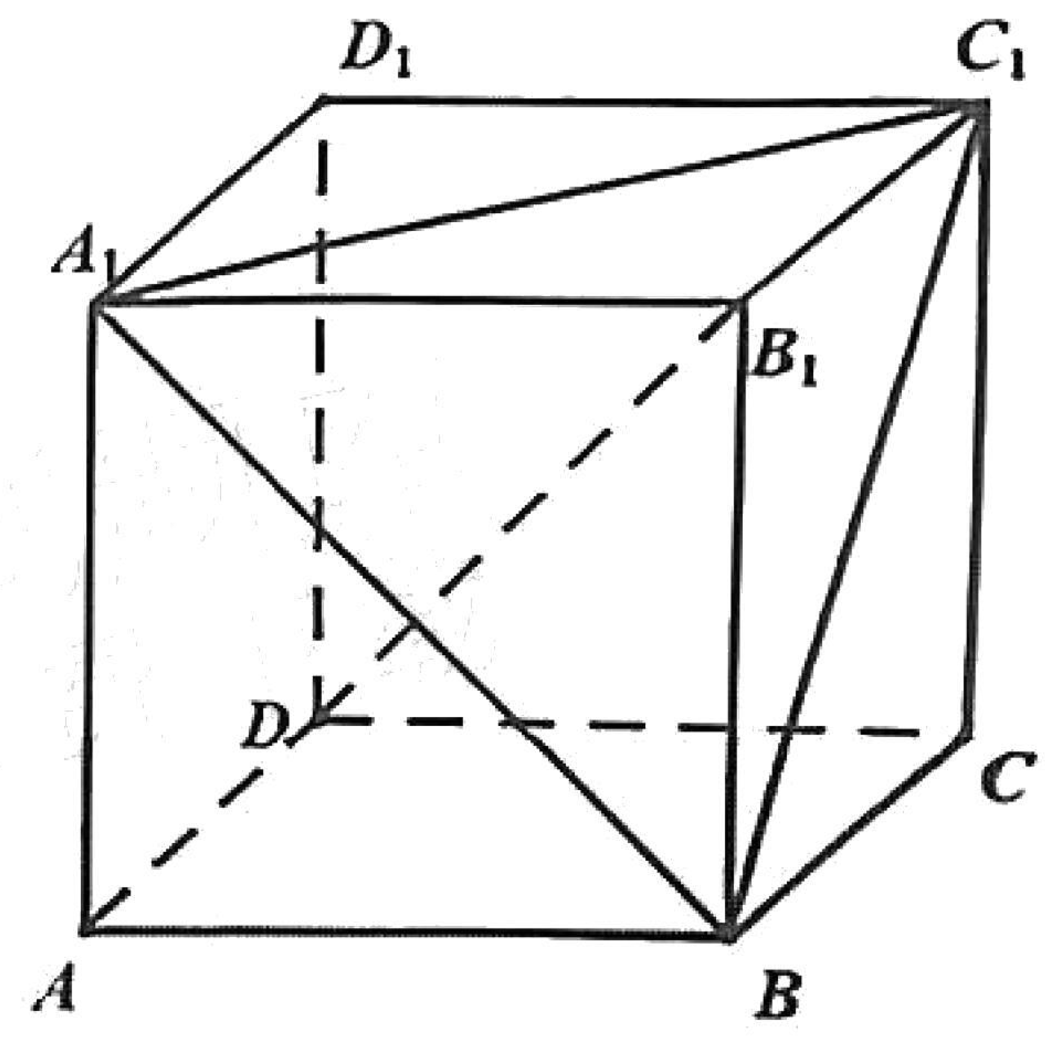
已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2.

（1）证明：$B_1D\perp$平面A_1BC_1；

（2）动点P满足$\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1B}+\lambda\overrightarrow{A_1C_1}$ $(\lambda\in[0,1])$，且点P,A_1,C_1,D_1在同一球面上．设该球面的球心为O，半径为r.

（i）求r的取值范围；

（ii）当r最大时，求二面角A_1-BP-O的余弦值.



（17分）

已知函数 $f(x)=(m+1)\sin x-x\cos x$， $x\in[0,\pi]$.

（1）当 $m=0$ 时，求 $f(x)$ 的值域;

（2）若 $f(x)$ 存在唯一的极值且为极小值，求 m 的取值范围;

（3）设 $n\in\mathbf{R}$，若存在 $m\in(-\infty,0)$ 使得 $m\leqslant\sqrt{2}(f(x)-n)$ 对 $x\in[0,\pi]$ 恒成立，求 n 的最大值.

泉州市2026届高中毕业班质量监测（一）

数学参考答案及评分细则

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D	C	A	C	B	B	D	C	BCD	AC	BCD

12．$\underline{7}$　13．$\underline{1}$　14．$\underline{11}$

15．（13分）

【试题解析】

解法一：（1）$P\approx\dfrac{75}{100}=\dfrac{3}{4}$（或$0.75$）．……3分

故由频率估计概率，P的估计值为$\dfrac{3}{4}$．……4分

（若作答未体现“估计”，或由样本估计总体，或由频率估计概率，扣1分.）

（2）零假设为H_0：这两种AI教学系统在显著提升教师备课效率方面没有差异.……2分

根据表中数据可得，$\chi^2=\dfrac{200\times\left(75\times45-55\times25\right)^2}{130\times70\times100\times100}\approx8.791>7.879=x_{0.005}$．……5分

根据小概率值$\alpha=0.005$的独立性检验，我们推断H_0不成立，……7分

即认为这两种AI教学系统在显著提升教师备课效率方面存在差异，此推断犯错误的概率不超过0.005．……9分

（卡方运算中，列式、运算和“>7.879”各1分．没有进行假设，满分最多为5分.）

解法二：（1）设事件“该地区教师使用系统A”为M，事件“备课效率显著提升”为N．1分

由频率估计概率，得：$P(M)=\dfrac{100}{200}=0.5$，$P(MN)=\dfrac{75}{200}=0.375$，……2分

$P(N\mid M)=\dfrac{P(MN)}{P(M)}=\dfrac{0.375}{0.5}=0.75$．……3分

故由频率估计概率，P的估计值为$\dfrac{3}{4}$．……4分

（写出条件概率公式即给1分）

（2）同解法一.

16．（15分）

【试题解析】

解法一:(1) 由已知$f'(x)=2x$．……1分

曲线$y=f(x)$在点$(x_n,f(x_n))$处的切线方程为$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$，

即 $y-x_n^2=2x_n(x-x_n)$． ……………………………………………………………2 分

令 $y=0$，得 $-x_n^2=2x_n(x-x_n)$． ……………………………………………………3 分

因为 $x_1=1$，所以 $x_2=\frac{1}{2},x_3=\frac{1}{4}$． ……………………………………………………5 分

因为 $x_1=1\neq 0$，所以 $x_n\neq 0$，得 $x_{n+1}=\frac{x_n}{2}$．

所以 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}$．

故数列 $\{x_n\}$ 为等比数列，首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$． ……………………………………………6 分

所以 $x_n=(\frac{1}{2})^{n-1}$． ……………………………………………………………………7 分

（说明：直接写出 $x_2=\frac{1}{2},x_3=\frac{1}{4}$，写对一个各得 1 分，直接写出 $x_n=(\frac{1}{2})^{n-1}$ 再给 1 分；若前面给出求 x_2,x_3 的过程，没有证明 $\{x_n\}$ 通项公式的过程扣 **2** 分）

（2）$nx_n=\frac{n}{2^{n-1}}$．

$S_n=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+\frac{n}{2^{n-1}}$，

$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$， ……………………………………2 分

两式相减可得：$\frac{1}{2}S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$

$$=\frac{1\times[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}$$ ……………………………………4 分

$$=2(1-\frac{1}{2^n})-\frac{n}{2^n}$$

$$=2-\frac{n+2}{2^n}$$ ……………………………………6 分

所以 $S_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$． ……………………………………7 分

因为 $\frac{n+2}{2^{n-1}}>0$，所以 $S_n<4$． ……………………………………8 分

解法二：（1）由已知 $f'(x)=2x$. ……………………………………………………………………1 分

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线方程为 $y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$，

即 $y-x_n^2=2x_n(x-x_n)$. ……………………………………………………………2 分

令 $y=0$，得 $-x_n^2=2x_n(x-x_n)$. ……………………………………………………3 分

因为 $x_1=1$，所以 $x_2=\frac{1}{2},x_3=\frac{1}{4}$. ……………………………………………5 分

因为 $x_1=1\neq 0$，所以 $x_n\neq 0$，得 $x_{n+1}=\frac{x_n}{2}$.

所以 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$x_n=\frac{x_n}{x_{n-1}}\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot x_1=\frac{1}{2^{n-1}}$. ……………………………6 分

所以 $x_n=(\frac{1}{2})^{n-1}$. ………………………………………………………………7 分

（2）$nx_n=\frac{n}{2^{n-1}}$. ………………………………………………………………1 分

令 $c_n=\frac{-n-1}{2^{n-2}}$，则 $nx_n=c_{n+1}-c_n$. ……………………………………………3 分

所以 $S_n=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+\frac{n}{2^{n-1}}$

$=(c_2-c_1)+(c_3-c_2)+\cdots+(c_{n+1}-c_n)$ ……………………………………4 分

$=c_{n+1}-c_1$ ……………………………………………………………………6 分

$=\frac{-n-2}{2^{n-1}}+4$

$=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$. ………………………………………………………………7 分

因为 $\frac{n+2}{2^{n-1}}>0$，所以 $S_n<4$. …………………………………………………8 分

17. （15 分）

【试题解析】

解法一：（1）由已知可得 $2a=4$，$2b=2$，所以 $a=2,b=1,c=\sqrt{3}$. ……………………2 分

所以$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ……………………………………………………………………3 分

$E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$． ……………………………………………………………………4 分

（说明：求对a,b的值各得 1 分，写对离心率和方程各得 1 分）

（2）由已知，圆O的方程为：$x^2+y^2=5$． ……………………………………………1 分

当点P是矩形的顶点时，PQ,PR均与坐标轴垂直，则此时$\angle RPQ=\dfrac{\pi}{2}$． ………………2 分

当点P不是矩形的顶点时，设点P的坐标为(x_0,y_0)，直线PQ的方程为

$y-y_0=k_1(x-x_0)$，即$y=k_1x+(y_0-k_1x_0)$．……………………………………………3 分

联立$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$与$y=k_1x+(y_0-k_1x_0)$，

消去y得：$(1+4k_1^{\ 2})x^2+8k_1(y_0-k_1x_0)x+4(y_0-k_1x_0)^2-4=0$． ……………………5 分

（说明：有联立方程给 1 分，化简正确再给 1 分）

由$\Delta=64k_1^{\ 2}(y_0-k_1x_0)^2-4(1+4k_1^{\ 2})[4(y_0-k_1x_0)^2-4]=0$，化简得

$(4-x_0^2)k_1^{\ 2}+2x_0y_0k_1+1-y_0^2=0$． ……………………………………………………7 分

（说明：写出$\Delta=0$给 1 分，化简正确再给 1 分）

设直线PR的方程为$y-y_0=k_2(x-x_0)$，同理可得：$(4-x_0^2)k_2^2+2x_0y_0k_2+1-y_0^2=0$．

则k_1,k_2是关于k的一元二次方程$(4-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+1-y_0^2=0$的两根，

故$k_1k_2=\dfrac{1-y_0^2}{4-x_0^2}$． ……………………………………………………………………9 分

又$x_0^2+y_0^2=5$，所以$k_1k_2=\dfrac{1-(5-x_0^2)}{4-x_0^2}=-1$.…………………………………… 10 分

所以$PQ\perp PR$．

综上，$\angle RPQ=\dfrac{\pi}{2}$，$\triangle PQR$是直角三角形. ………………………………… 11 分

解法二：（1）同解法一；

（2）设M,N分别为PQ,PR与E的公共点，且$P(x_0,y_0),M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$．

由已知，圆O的方程为：$x^2+y^2=5$． ……………………………………………………1 分

当点 P 是矩形的顶点时，PQ,PR 均与坐标轴垂直，则此时 $\angle RPQ=\dfrac{\pi}{2}$. ……………2 分

当 PM,PN 的斜率都存在时，设 PM：$y-y_1=k_1(x-x_1)$，PN：$y-y_2=k_2(x-x_2)$.

联立 $y-y_1=k_1(x-x_1)$ 及 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，消去 y 得：

$(1+4k_1^2)x^2+8k_1(y_1-k_1x_1)x+4(y_1-k_1x_1)^2-4=0$.

由 $\Delta=64k_1^2(y_1-k_1x_1)^2-4(1+4k_1^2)[4(y_1-k_1x_1)^2-4]=0$，

化简得 $(4-x_1^2)k_1^2+2x_1y_1k_1+1-y_1^2=0$.

又 $\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$，所以 $4y_1^2k_1^2+2x_1y_1k_1+\dfrac{x_1^2}{4}=0$，即 $(2y_1k_1+\dfrac{x_1}{2})^2=0$ 解得 $k_1=-\dfrac{x_1}{4y_1}$.

同理可得：$k_2=-\dfrac{x_2}{4y_2}$. ……………………………………………………3 分

所以 PM：$y-y_1=-\dfrac{x_1}{4y_1}(x-x_1)$，可化为 $x_1x+4y_1y=4$.

同理 PN 方程可化为：$x_2x+4y_2y=4$. ……………………………………………4 分

又 PM,PN 过点 P，则 $x_1x_0+4y_1y_0=4$，$x_2x_0+4y_2y_0=4$.所以 M,N 都在直线

$x_0x+4y_0y=4$ 上，所以 MN 的方程为：$x_0x+4y_0y=4$. ……………………5 分

联立 $x_0x+4y_0y=4$ 及 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，消去 y 得：$(x_0^2+4y_0^2)x^2-8x_0x+16-16y_0^2=0$.

则 $x_1+x_2=\dfrac{8x_0}{x_0^2+4y_0^2},x_1x_2=\dfrac{16-16y_0^2}{x_0^2+4y_0^2}$. ……………………………………7 分

因为 $k_1k_2=\dfrac{x_1x_2}{16y_1y_2}$

$$=\frac{x_1x_2}{16(-\frac{x_0}{4y_0}x_1+\frac{1}{y_0})(-\frac{x_0}{4y_0}x_2+\frac{1}{y_0})}$$

$$=\frac{x_1x_2y_0^2}{x_0^2x_1x_2-4x_0(x_1+x_2)+16}$$

$$=\frac{\dfrac{16y_0^2(1-y_0^2)}{x_0^2+4y_0^2}}{x_0^2\dfrac{16(1-y_0^2)}{x_0^2+4y_0^2}-\dfrac{32x_0^2}{x_0^2+4y_0^2}+16}$$

$=\dfrac{1-y_0^2}{4-x_0^2}$. ……………………………………………………………………9 分

又 $x_0^2+y_0^2=5$，所以 $k_1k_2=\dfrac{1-(5-x_0^2)}{4-x_0^2}=-1$. ……………………………………10 分

所以 $PM\perp PN$，$\angle RPQ=\dfrac{\pi}{2}$.

综上，$\triangle PQR$ 是直角三角形.……………………………………………………………11 分

（说明：直接用二级结论给出 M,N 点处的切线和切点弦 MN 的方程，一处扣 1 分，共扣 2 分）

18. （17 分）

【试题解析】

解法一：（1）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连结 B_1D_1，则 $B_1D_1\perp A_1C_1$，…………………1 分

因为 $DD_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $DD_1\perp A_1C_1$，…………………2 分

（直接写出 $DD_1\perp A_1C_1$ 这步不给分）

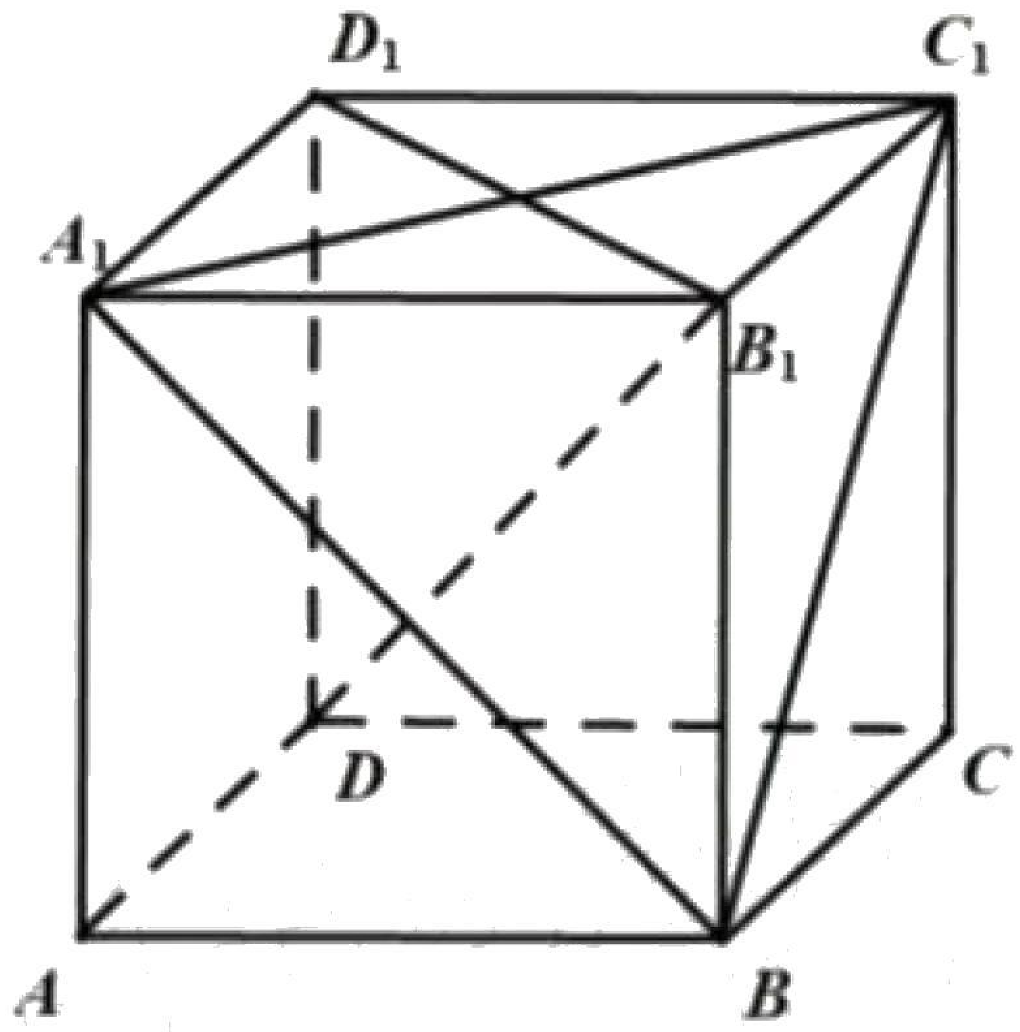
因为 $DD_1\cap B_1D_1=D_1$，DD_1，$B_1D_1\subset$ 平面 BB_1D_1D，所以 $A_1C_1\perp$ 平面 BB_1D_1D，……3 分

（$DD_1,B_1D_1\subset$ 平面 BB_1D_1D 没写不扣分，没写 $A_1C_1\perp$ 平面 BB_1D_1D，直接得到 $B_1D\perp A_1C_1$ 这步不给分）

又因为 $B_1D\subset$ 平面 BB_1D_1D，所以 $B_1D\perp A_1C_1$，……………………………………4 分

同理可得 $B_1D\perp A_1B$，……………………………………………………………………5 分

又因为 $A_1B\cap A_1C_1=A_1$，A_1B，$A_1C_1\subset$ 平面 A_1BC_1，所以 $B_1D\perp$ 平面 A_1BC_1. …………6 分



（2）（i）取 A_1C_1 中点 O_1，取 AC 中点 O_2，依题意得：球心 O 在直线 O_1O_2 上. ………1 分

因为 $\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1B}+\lambda\overrightarrow{A_1C_1}(\lambda\in[0,1])$，所以 $\overrightarrow{A_1P}-\overrightarrow{A_1B}=\lambda\overrightarrow{A_1C_1}(\lambda\in[0,1])$，即

$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{A_1C_1}(\lambda\in[0,1])$.

延长 DC 至 E，使得 $DC=CE$，连结 BE.

因为 $AA_1//CC_1$，$AA_1=CC_1$，所以四边形 AA_1C_1C 是平行四边形，所以 $AC//A_1C_1$，$AC=A_1C_1$.

同理得：$BE//AC$，$BE=AC$，所以 $BE//A_1C_1$，$BE=A_1C_1$，故 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BE}(\lambda\in[0,1])$，

所以点 P 在线段 BE 上. ……………………………………………………………………………2 分

（直接给出点 P 在线段 BE 上不扣分）

设 $|O_1O|=x$，则 $|O_2O|=|2-x|$，

则 $r^2=|OO_1|^2+|O_1D_1|^2=|OO_2|^2+|O_2P|^2$.

易得 $DB\perp AC$，则有 $AC//BE$，所以 $DB\perp BE$，故有 $|O_2P|^2=|O_2B|^2+|BP|^2$. ………3 分

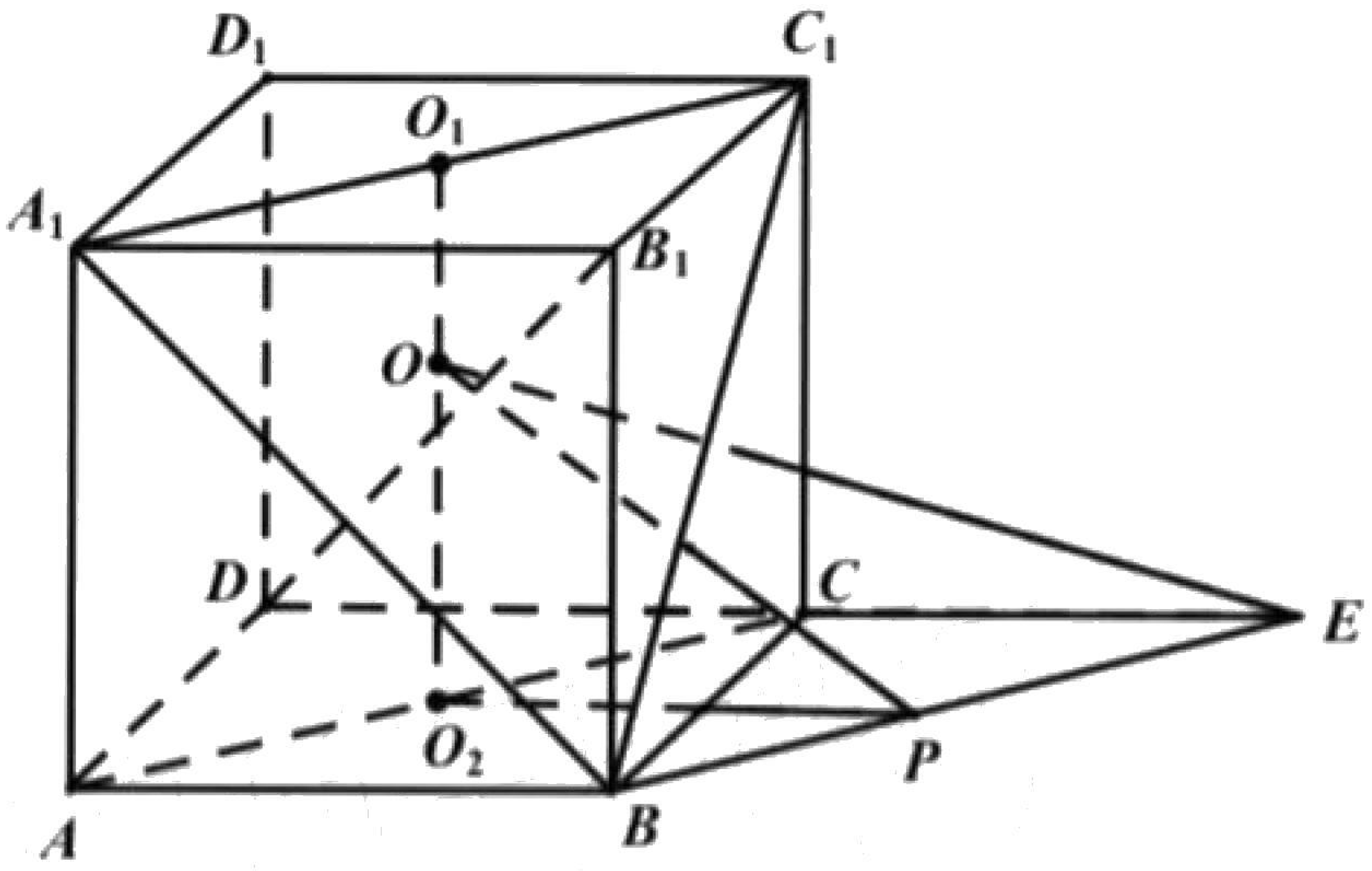
所以 $r^2=x^2+2=|2-x|^2+2+|BP|^2$，整理得：$|BP|=2\sqrt{x-1}$，………………………4 分

（没写 $|O_2P|^2=|O_2B|^2+|BP|^2$，直接给出 $r^2=x^2+2=|2-x|^2+2+|BP|^2$ 不扣分）

由 $0\leqslant|BP|\leqslant2\sqrt{2}$，得：$1\leqslant x\leqslant3$. ……………………………………………………5 分

所以 $r^2=|OO_1|^2+|O_1D_1|^2=x^2+2\in[3,11]$，所以 r 的取值范围是 $[\sqrt{3},\sqrt{11}]$. …………6 分

（没有任何过程直接写出结果只给 1 分；只画图没给严谨的推理过程或只给简单的说明，至多给 3 分）



（ii）当r最大时，$x=3$，$|BP|=2\sqrt{2}$，此时点P与点E重合. ……………………1 分

因为$BP\perp BD$，$BP\perp BB_1$，$BB_1\cap BD=B$，BB_1，$BD\subset$平面BB_1D_1D，

所以$BP\perp$平面BB_1D_1D. ……………………………………………………………3 分

因为$O_1B,OB\subset$平面BB_1D_1D，所以$O_1B\perp BP,OB\perp BP$，

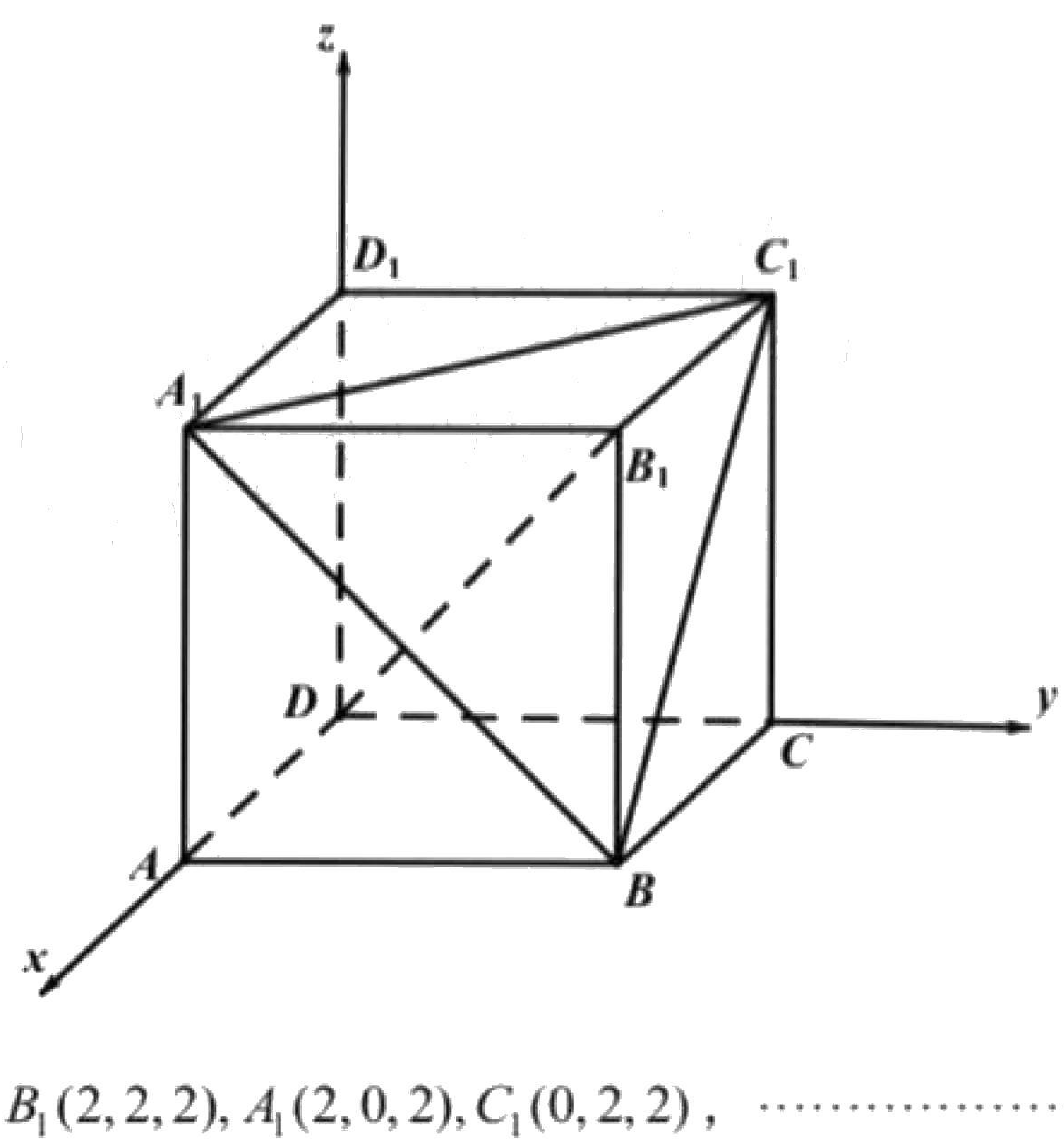
所以$\angle O_1BO$即为二面角A_1-BP-O的平面角. ……………………………………4 分

在$\triangle O_1BO$中，$|O_1B|=\sqrt{6},|OB|=\sqrt{3},|OO_1|=3$，$|O_1B|^2+|OB|^2=|OO_1|^2$，

所以$\angle O_1BO=90^\circ$，所以二面角A_1-BP-O的余弦值为0. ……………………5 分

解法二：(1)以D为原点，$\overrightarrow{DA}$的正方向为x轴正方向，建立如图所示空间直角坐标系$D-xyz$：

（建系 1 分，左手系则这 1 分不给）



则$D(0,0,0),B(2,2,0),B_1(2,2,2),A_1(2,0,2),C_1(0,2,2)$，……………………2 分

$\overrightarrow{DB_1}=(2,2,2),\overrightarrow{A_1B}=(0,2,-2),\overrightarrow{A_1C_1}=(-2,2,0)$.

因为$\begin{cases}\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0+4-4=0\\\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=-4+4+0=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}DB_1\perp A_1B\\DB_1\perp A_1C_1\end{cases}$. ……………………………………4分

又因为$A_1B\cap A_1C_1=A_1, A_1B\subset$平面$A_1BC_1$， $A_1C_1\subset$平面A_1BC_1，

所以$B_1D\perp$平面A_1BC_1. ……………………………………………………………………6分

（2）（i）取A_1C_1中点O_1， AC中点O_2，依题意得：球心O在直线O_1O_2上. …………1分

设$O(1,1,a)$，

因为$\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1B}+\lambda\overrightarrow{A_1C_1}=(-2\lambda,2\lambda+2,-2)$， ……………………………………………2分

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1P}=(1-2\lambda,2\lambda+1,-a)$，

则$r^2=|OA_1|^2=|OP|^2$，即$1+1+(2-a)^2=(1-2\lambda)^2+(2\lambda+1)^2+a^2$，

化简得：$\lambda^2=\frac{1}{2}(1-a)$. ……………………………………………………………………3分

（式子$1+1+(2-a)^2=(1-2\lambda)^2+(2\lambda+1)^2+a^2$或$\lambda^2=\frac{1}{2}(1-a)$只要写对一个就给分）

因为$0\leqslant\lambda\leqslant1$，所以$-1\leqslant a\leqslant1$. ……………………………………………………………4分

所以$r^2=|OA_1|^2=2+(2-a)^2\in[3,11]$，

故该球半径的取值范围是$[\sqrt{3},\sqrt{11}]$. ……………………………………………………6分

（ii）当r最大时，点P坐标为$(0,4,0)$. $O(1,1,-1)$. ……………………………………1分

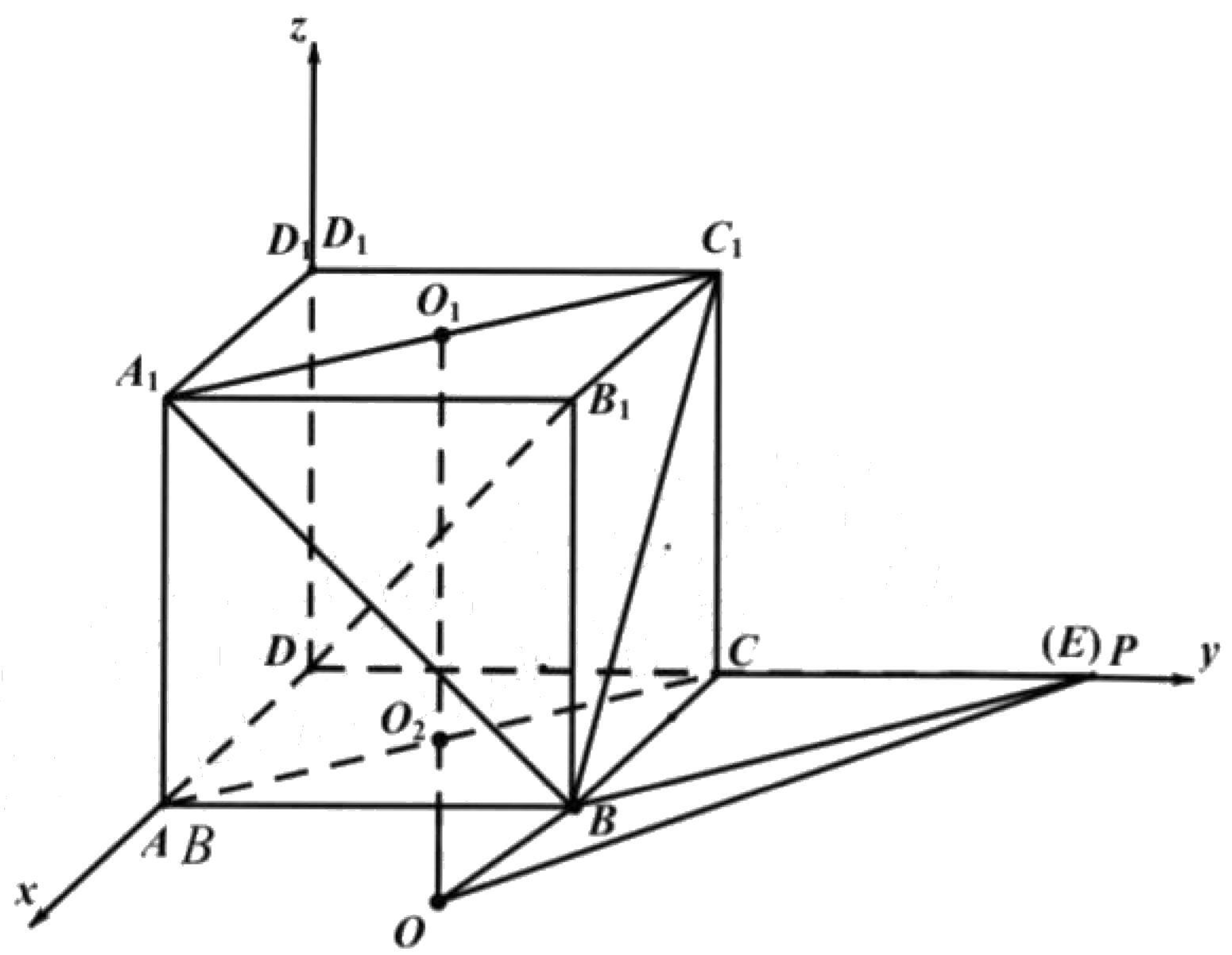
由（1）得平面A_1BC_1的一个法向量是$\overrightarrow{DB_1}=(2,2,2)$. ……………………………………2分

设平面OBP的一个法向量是$\vec{n}=(x,y,z)$， $\overrightarrow{OB}=(1,1,1),\overrightarrow{BP}=(-2,2,0)$， ………………3分

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{OB}=x+y+z=0=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-x+y=0\end{cases}$，取$x=y=1$得：$\vec{n}=(1,1,-2)$ ……………………………4分

因为$\cos<\overrightarrow{DB_1},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{DB_1}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{DB_1}||\vec{n}|}=\frac{2+2-4}{2\sqrt{3}\times\sqrt{6}}=0$，

所以二面角A_1-BP-O的余弦值为0. ……………………………………………………………5分



19. （17 分）

【试题解析】

解法一：（1）当 $m=0$ 时，由 $f(x)=\sin x-x\cos x$，

得 $f'(x)=\cos x-[\cos x+x(-\sin x)]=x\sin x$，…………………………………………… 1 分

又 $x\in[0,\pi]$，$x\geqslant 0,\sin x\geqslant 0$，所以 $f'(x)\geqslant 0$，

故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 单调递增.…………………………………………………………………… 2 分

又 $f(0)=\sin 0-0=0$，$f(\pi)=\sin\pi-\pi\times\cos\pi=\pi$，

故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的值域为 $[0,\pi]$.………………………………………………………… 3 分

（2）由（1）可知 $m\neq 0$；

依题意得：$f'(x)=(1+m)\cos x-[\cos x+x(-\sin x)]=x\sin x+m\cos x$；

（i）若 $m<0$，

①$x\in(\frac{\pi}{2},\pi]$ 时，$x\sin x\geqslant 0$，$m\cos x>0$，此时 $f'(x)>0$，

故 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi]$ 无极值.………………………………………………………………………1 分

②当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，令 $\phi(x)=f'(x)=x\sin x+m\cos x$，得 $\phi'(x)=(1-m)\sin x+x\cos x$.

由 $1-m>0,\sin x\geqslant 0,x\cos x\geqslant 0$，则 $\phi'(x)\geqslant 0$，从而 $\phi(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 单调递增.

又 $\phi(0)=0+m<0,\phi(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}>0$，

由零点存在性定理可知，存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $\phi(x_0)=0$.…………………………………2 分

从而当 $x\in[0,x_0)$，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2}]$，$f'(x)>0$.

$f(x)$ 在 $[0,x_0)$ 单调递减，在 $(x_0,\frac{\pi}{2}]$ 单调递增；……………………………………………………3 分

所以 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上唯一的极值且为极小值；故 $m<0$ 符合题意.………………4 分

（ii）若 $m>0$， $x\in(\frac{\pi}{2},\pi]$，$f'(x)=m\cos x+x\sin x=\cos x(m+x\tan x)$

令 $\phi(x)=x\tan x, x\in(\frac{\pi}{2},\pi]$， $\phi(\pi)=0$，

则 $\phi'(x)=(\frac{x\sin x}{\cos x})'=\frac{\sin x\cos x+x\cos^2 x+x\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x\cos x+x}{\cos^2 x}$.……………………………5 分

令 $\varphi(x)=\sin x\cos x+x=\frac{1}{2}\sin 2x+x$， 则 $\varphi'(x)=\cos 2x+1\geqslant 0$， 故 $\varphi(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi]$ 递增， 所以

$\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$，即 $\phi'(x)\geqslant 0$，所以 $\phi(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi]$ 递增. 因为 $\phi(\pi)=0$，$x\to\frac{\pi}{2}$ 时，$\phi(x)\to-\infty$，

所以 $\phi(x)$ 的值域为 $(-\infty,0]$.……………………………… 6 分

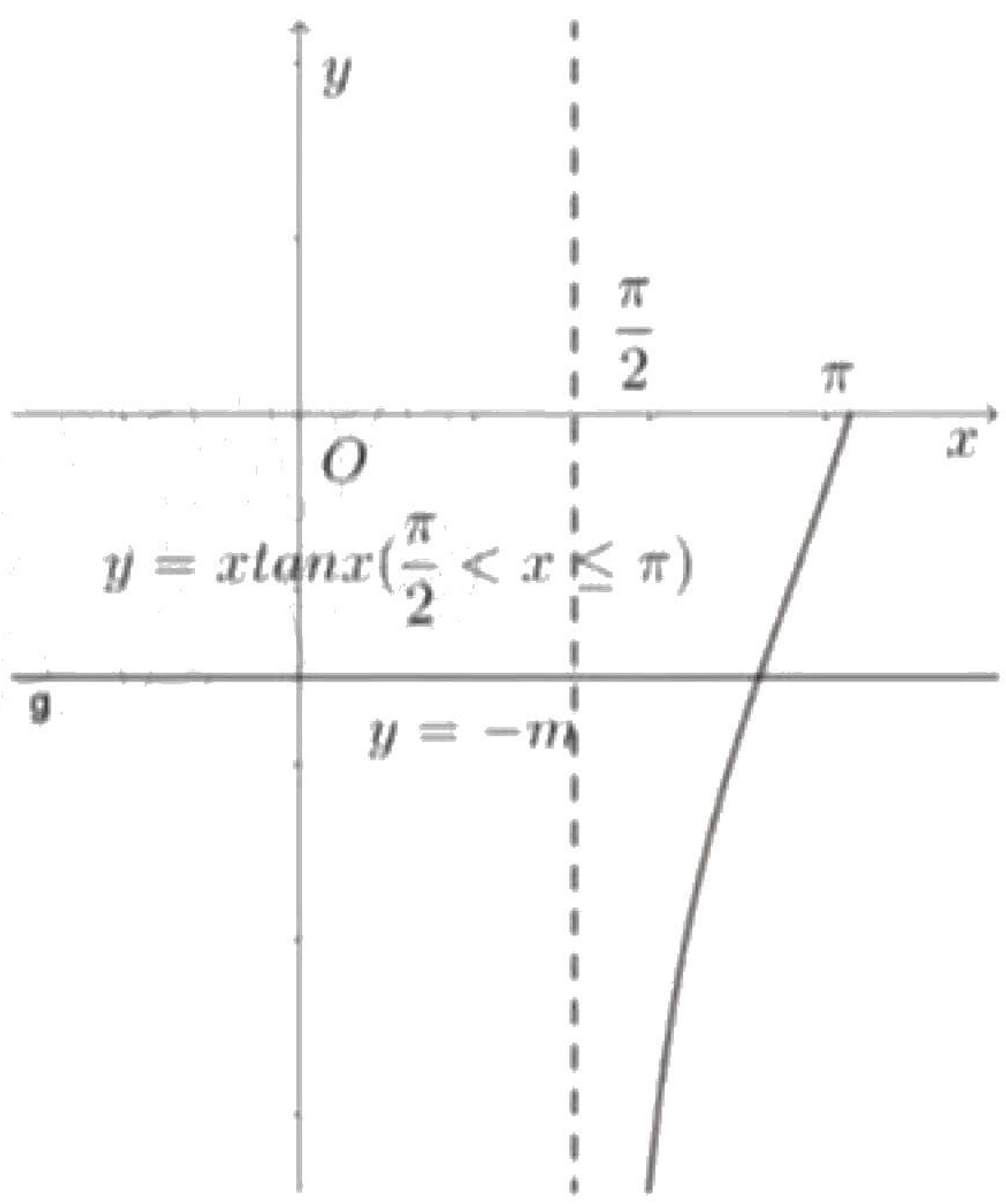
故当 $m>0$ 时，$-m=x\tan x$ 有唯一解 x_0，且当 $x\in(\frac{\pi}{2},x_0)$ 时，

$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$

单调递减；此时 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi]$ 有唯一极大值点 x_0， 不合题

意，故 $m>0$ 舍去.

综上， $m<0$.……………………………………………… 7 分



（3）由（2）可知， $f(x)$ 有且仅有一个极小值点 x_0，

故 $f(x)_{\min}=f(x_0)=(m+1)\sin x_0-x_0\cos x_0$.

因为 $f'(x_0)=m\cos x_0+x_0\sin x_0=0$， 所以 $m=\frac{-x_0\sin x_0}{\cos x_0}$， ……………………………………1 分

由题意知， $f(x)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}m+n$， 可得 $f(x)_{\min}=f(x_0)=(m+1)\sin x_0-x_0\cos x_0\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}m+n$，

即 $(1-\frac{x_0\sin x_0}{\cos x_0})\sin x_0-x_0\cos x_0\geqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x_0\sin x_0}{\cos x_0}+n$， ……………………………………2 分

化简得 $n\leqslant\sin x_0-\frac{x_0-\frac{\sqrt{2}}{2}x_0\sin x_0}{\cos x_0}$， $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，

设 $g(x)=\sin x-\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}x\sin x}{\cos x}$， $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.…………………………………………3 分

又 $g'(x)=\cos x-\dfrac{\left[1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+x\cos x)\right]\cos x+(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x)\sin x}{\cos^2 x}$ ……………………4 分

$=\dfrac{\cos^3 x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x\cos x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\cos^2 x-\cos x-x\sin x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\cos x(\cos^2 x-1)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x\cos x-x\sin x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x(\cos^2 x+\sin^2 x)}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{-\cos x\sin^2 x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x\cos x-x\sin x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\cos x\sin x(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sin x)-x(\sin x-\dfrac{\sqrt{2}}{2})}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{(\cos x\sin x+x)(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sin x)}{\cos^2 x}$.……………………………………………………5 分

因为 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\sin x\cos x+x>0$，

当 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sin x>0$，$g'(x)>0$；

当 $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\sin x<0$，$g'(x)<0$；

故 $g(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 上单调递增，在 $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减. ……………………………6 分

所以 $g(x)_{\max}=g(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\dfrac{\pi}{4})$，此时 $m=-\dfrac{\pi}{4}$，依题意，$n\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\dfrac{\pi}{4})$，

故 n 的最大值是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\dfrac{\pi}{4})$.……………………………………………………7 分

解法二：（1）同解法一；

（2）同解法一；

（3） 由 $m\leqslant\sqrt{2}(f(x)-n)$ 得 $n\leqslant f(x)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}m$.

令 $g(x)=f(x)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}m=(m+1)\sin x-x\cos x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}m$，

则 $g(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\dfrac{\pi}{4})$. ……………………………………………1 分

因为 $g'(x)=f'(x)$，

由（2）知，$g(x)$ 有且仅有一个极小值点 x_0，且 $g_{\min}(x)=g(x_0)$. ……………………2 分

①当 $m=-\frac{\pi}{4}$ 时，$g'(x)=-\frac{\pi}{4}\cos x+x\sin x$.因为 $g'(\frac{\pi}{4})=0$，所以 $x_0=\frac{\pi}{4}$.

又 $g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上递减，在 $[\frac{\pi}{4},\pi]$ 上递增.所以 $g_{\min}(x)=g(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\frac{\pi}{4})$.

所以 $n\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\frac{\pi}{4})$. ……………………………………………………………………3 分

②当 $m<-\frac{\pi}{4}$ 时,因为 $g'(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}m+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\pi}{4}<0$，所以 $x_0\in(\frac{\pi}{4},\pi)$.

又 $g(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上递减，所以 $g_{\min}(x)=g(x_0)<g(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\frac{\pi}{4})$.

此时 $n\leqslant g(x_0)<\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\frac{\pi}{4})$. ……………………………………………………………5 分

③当 $-\frac{\pi}{4}<m<0$ 时,因为 $g'(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}m+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\pi}{4}>0$，所以 $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$.

又 $g(x)$ 在 $[x_0,\pi]$ 上递增.所以 $g_{\min}(x)=g(x_0)<g(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\frac{\pi}{4})$.

此时 $n\leqslant g(x_0)<\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\frac{\pi}{4})$. ……………………………………………………………6 分

综上，当 $m=-\frac{\pi}{4}$ 时，n 取得最大值，

依题意 n 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\frac{\pi}{4})$. ………………………………………………………7 分