

泉州市 2026 届高中毕业班质量监测（二）

2026.01

高三数学

本试卷共 19 题，满分 150 分，共 4 页。考试用时 120 分钟。

★祝马到成功★

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $U = \{x | x < 5\}$, $A = \{x | x^2 < 5x\}$, 则 $\complement_U A =$

- A. $\emptyset$ B. $(0, 5)$ C. $(-\infty, 0]$ D. $(-\infty, 5)$

2. 已知 α 为第二象限角，且 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) =$

- A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

3. 已知正数 a, b 满足 $a + \frac{2}{b} = 1$, 则 $\frac{a}{b}$ 的最大值为

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

4. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = 2e^x - 1$, 则 $f(x)$ 的值域为

- A. $\mathbb{R}$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ C. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ D. $(-1, 1)$

5. 已知正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 的高为 $\sqrt{3}$, $AB = 3A_1B_1 = 3\sqrt{3}$, 则该棱台的侧面积为

- A. $24\sqrt{3}$ B. $12\sqrt{3}$ C. 18 D. $4\sqrt{3}$

6. 在复平面内, O 是原点, 复数 z_1, z_2 对应的向量分别为 $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$. 若 $z_1 = 1 - i$, $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按

逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 所得的向量与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 绕点 O 按顺时针方向旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 所得的向量相等, 则

- A. $|z_2| = 2$ B. $z_1 = \bar{z}_2$ C. $z_1 z_2 = 2i$ D. $\frac{\bar{z}_1}{z_2} = 1$

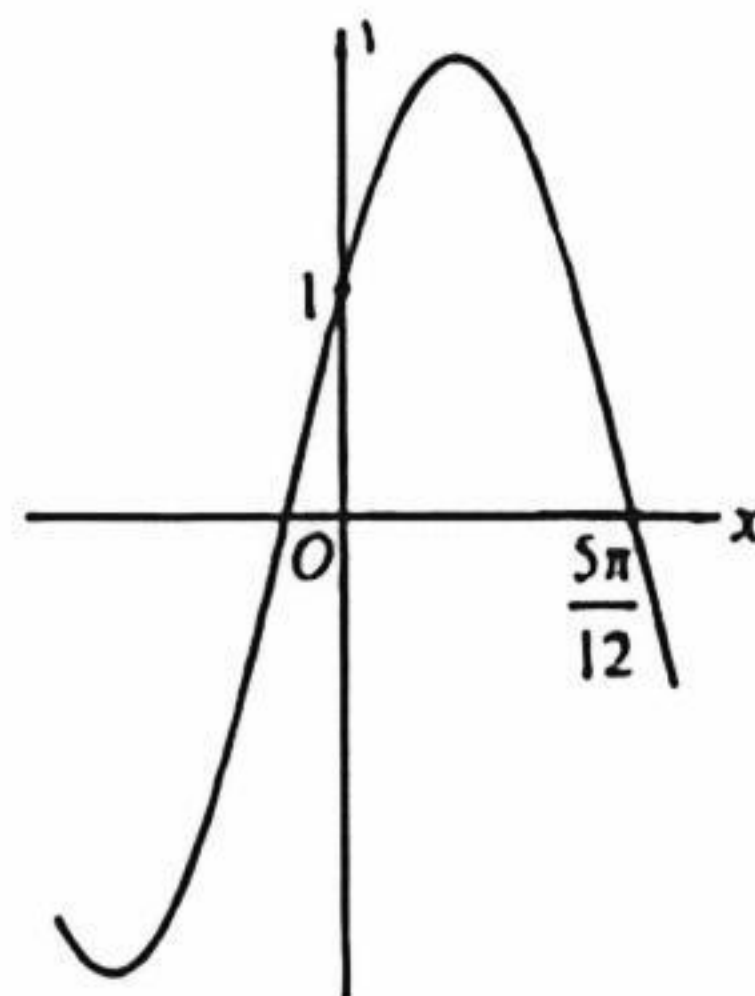
7. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则

A. $f(x)$ 在区间 $[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$ 上单调递减

B. $f(x)$ 在区间 $[\frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}]$ 上单调递增

C. $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到的图象关于 y 轴对称

D. $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{11\pi}{12}$ 个单位长度后得到的图象关于原点中心对称



8. 双曲线 C 的对称中心为 O , 焦点为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线 l 与 C 的一条渐近线平行. 若 l 与以 O 为圆心, $|F_1F_2|$ 为半径的圆相交于 P, Q 两点, 且 $4|PQ| = 7|F_1F_2|$, 则 C 的离心率为

A. $\frac{4}{7}$

B. $\frac{4\sqrt{15}}{15}$

C. $\frac{7}{4}$

D. 4

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得部分分。

9. 某市环保部门连续 10 天监测甲、乙两个区域的空气质量指数 (简称 AQI), 记日期编号为 x , 甲、乙两个区域的 AQI 分别为 y_1, y_2 , 将数据整理如下:

日期编号 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲区域 AQI y_1	27	44	43	45	34	35	33	34	40	35
乙区域 AQI y_2	34	34	30	31	36	33	32	34	33	33

根据数据进行分析, 以下说法正确的是

A. 甲区域 AQI 的极差为 18

B. 乙区域 AQI 的第 65 百分位数为 33.5

C. 甲区域 AQI 的方差大于乙区域 AQI 的方差

D. 根据最小二乘法求得 y_2 关于 x 的经验回归方程对应的直线必过点 $(5.5, 33)$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n, & a_n < 4, \\ a_n - 4, & a_n \geq 4, \end{cases}$ 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则

A. 当 $a_1 = 3$ 时, $a_{2026} = a_6$

B. $\exists a_1 \in \mathbb{N}^*$, 使得 $S_{2026} = S_6$

C. $\{a_n\}$ 为等比数列的充要条件是 $a_1 < 0$

D. $\forall a_1 \geq 0$ 且 $a_1 \neq 4k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), $\exists T \in \mathbb{N}^*$, 使得 $a_{n+T} = a_n$

11. 已知函数 $f(x) = e^x - bx - 2$ 有两个零点 x_1, x_2 , 则

A. 当 $b = e$ 时, $f(x) \geq -2$

B. $f(\frac{x_1 + x_2}{2}) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

C. 当 $b > e$ 时, $e^{x_1} + e^{x_2} > 2e$

D. 函数 $g(b) = |x_1 - x_2|$ 取最小值时, $b = 2$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知 $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, 则实数 λ 的值为_____.

13. 已知点 $A(1,3)$, $F(0, \frac{1}{2})$, 若 P 为抛物线 $y = x^2 + \frac{1}{4}$ 上的动点, 则 $|PA| + |PF|$ 的最小值为_____.

14. 现有一个半径为 6 的球状容器 (不考虑容器厚度), 在容器内放置 8 个半径相同的实心小球, 若这 8 个小球的球心恰为某个正方体的 8 个顶点, 则小球半径的最大值为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

已知锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{a}{b+c} = \frac{b-c}{a-c}$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $\cos 3C + \cos C = 0$, $c + \sqrt{2}b = 4$, 求 a 的值.

16. (15 分)

已知函数 $f(x) = x - a \ln(x+1)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的极值;

(2) 证明: 当 $x \in [0, 1]$ 时, $x \leq \frac{3}{2} \ln(x+1)$;

(3) 证明: $\sum_{i=1}^{2025} \frac{1}{i} < \frac{3}{2} \ln 2026$.

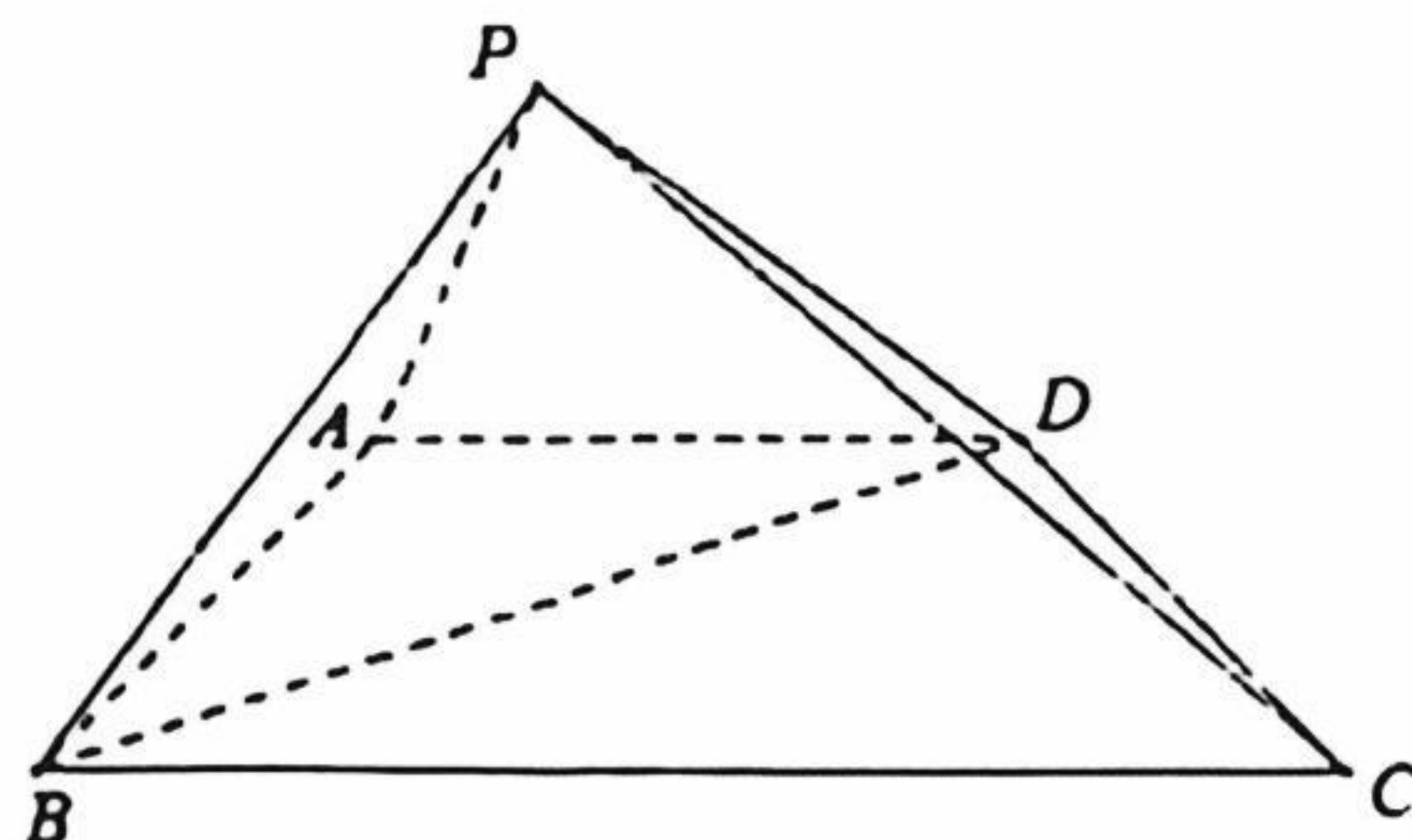
17. (15 分)

如图, 已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB \perp BC$, $BC = 2\sqrt{2}$, $AD = AB = PB = PD = \sqrt{2}$.

(1) 证明: $AD \parallel$ 平面 PBC ;

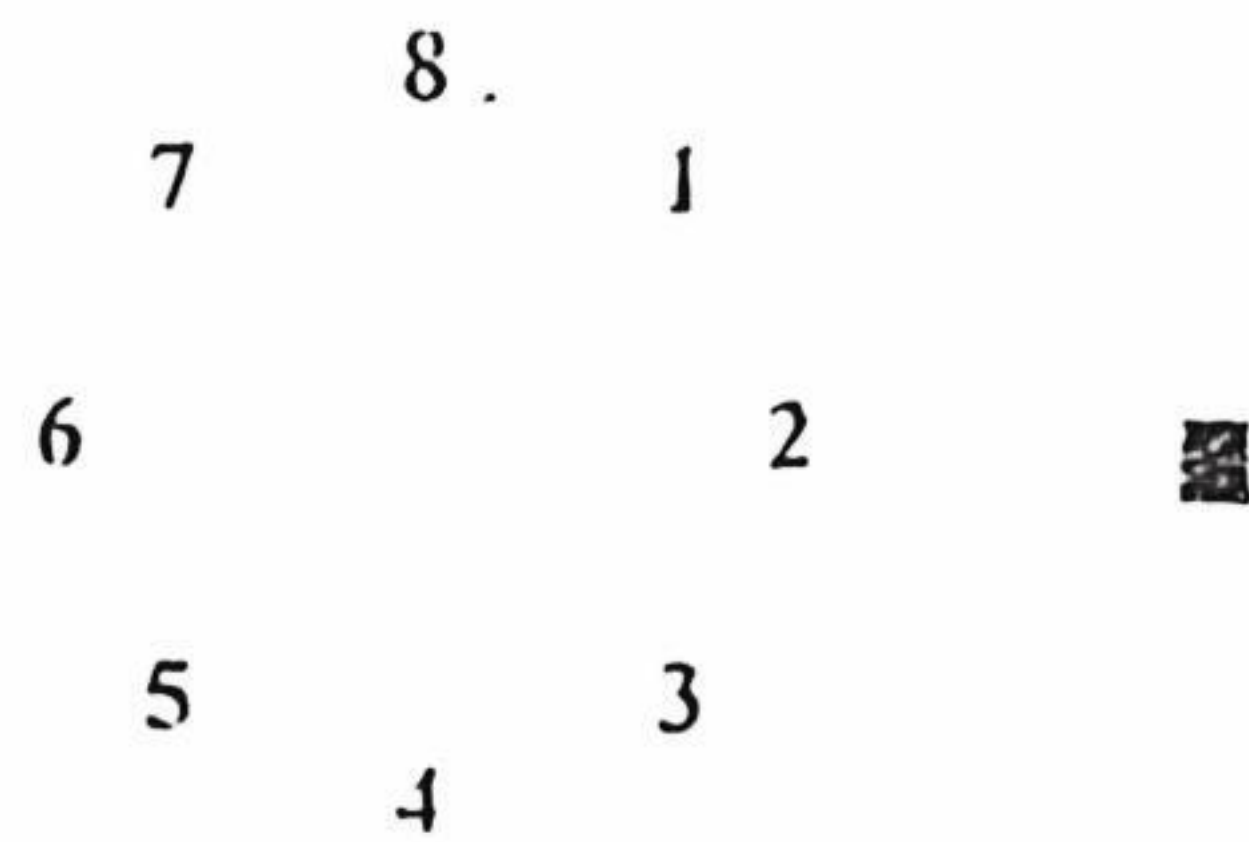
(2) 证明: $BD \perp PA$;

(3) 若直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成角为 45° , 点 D 在平面 PAB 内的正投影是点 Q , 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



18. (17 分)

如图, 数字 1 至 8 按顺时针方向排成一圈, 将一棋子放在数字 8 处, 按如下规则移动棋子: 抛掷一枚质地均匀的硬币 1 次, 若正面朝上, 棋子按顺时针方向连续移动 3 个相邻位置; 若反面朝上, 则按逆时针方向连续移动 3 个相邻位置. 若连续投掷硬币 n 次, 并按上述规则移动棋子, 记最终棋子所处的数字为随机变量 X_n . 例如: 若连续 3 次抛掷硬币均为正面朝上, 则棋子移动 3 次, 第 1 次从数字 8 处移动到数字 3 处, 第 2 次移动到数字 6 处, 第 3 次移动到数字 1 处, 即 $X_3 = 1$.



(1) 求 $P(X_2 = 2)$, $P(X_3 = 3)$;

(2) 证明: $P(X_5 = 1) = P(X_5 = 7)$;

(3) 现设计一项游戏: 游戏包含若干轮, 每轮开始时将棋子放在数字 8 处, 玩家连续投掷 6 次硬币并按上述规则移动棋子, 当 $X_6 < 4$ 时玩家获胜, 游戏结束, 否则进行下一轮, 游戏最多进行 10 轮. 记游戏结束时的轮数为随机变量 Y , 求 Y 的分布列, 并证明 $E(Y) < 4$.

19. (17 分)

在直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 上顶点为 B , 且 $|A_1A_2| = 6$, $|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OB}|$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) (y_1 > 0, y_2 > 0, y_1 \neq y_2)$ 是 C 上两个动点, 点 S 在直线 A_2P 上, 设直线 A_2P, A_2Q, OS 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 且 $\frac{2}{k_3} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.

(i) 设 Q 关于 O 的对称点为 Q' , 试判断 A_1, Q', S 是否共线? 并说明理由;

(ii) 在① $\triangle TBA_1$ 的面积为定值, ② $\triangle TA_1O$ 的面积为定值, ③ $\triangle TBO$ 的面积为定值, 这三个结论中选择一个结论补充在下面命题中, 使该命题为真命题, 并证明.

命题: 若直线 OS 与直线 PQ 相交于点 T , 则_____.

高三数学

本试卷共 19 题，满分 150 分，共 4 页。考试用时 120 分钟。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
C	A	A	D	B	C	D	D

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，有选错的得 0 分，部分选对的得部分分。

9	10	11
ACD	ABC	ACD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12	13	14
$-\frac{1}{3}$	3	$3\sqrt{3}-3$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

【试题解析】解法一：（1）由 $\frac{a}{b+c} = \frac{b-c}{a-c}$ ，可得 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$ ，…………… 1 分

根据余弦公式 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ ，…………… 2 分

可得 $\cos B = \frac{1}{2}$ 。…………… 3 分

因为 $B \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，（若写 $B \in (0, \pi)$ 不扣分）…………… 4 分

故 $B = \frac{\pi}{3}$ 。…………… 5 分

（2）由 $\cos 3C + \cos C = 0$ ，可得 $\cos(2C + C) + \cos(2C - C) = 0$ ，…………… 6 分

即 $2\cos 2C \cos C = 0$ ，…………… 7 分

所以 $\cos 2C = 0$, 或 $\cos C = 0$, 即 $C = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{4}$ 或 $C = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$),

在锐角三角形 ABC 中, $C \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$ 8 分

由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$, 9 分

可得 $\frac{b}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{c}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{a}{\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} = \frac{4a}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$, 10 分

得 $c = \frac{4a}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{4a}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, 11 分

代入 $c + \sqrt{2}b = 4$, 可得 $\frac{4a}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \times \frac{4a}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$, 12 分

得 $2a = 4$, 即 $a = 2$ 13 分

解法二: (1) 同解法一. 5 分

(2) 由 $\cos 3C + \cos C = 0$, 可得 $\cos 3C = -\cos C$,

则 $3C = 2k\pi + \pi - C$ 或 $3C = 2k\pi + \pi + C$ ($k \in \mathbf{Z}$), 6 分

即 $C = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{4}$ 或 $C = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$). 7 分

在锐角三角形 ABC 中, $C \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$ 8 分

由余弦定理可得 $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$, 10 分

又 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$, 两式相加, 可得 $2a^2 = ac + \sqrt{2}ab$, 11 分

即 $2a = c + \sqrt{2}b = 4$, 12 分

得 $a = 2$ 13 分

解法三: (1) 同解法一. 5 分

(2) 由 $\cos 3C + \cos C = 0$, 可得 $\cos(2C + C) + \cos C = 0$.

得 $\cos 2C \cos C - \sin 2C \sin C + \cos C = 0$, 即 $(\cos 2C + 1)\cos C = \sin 2C \sin C$ 6 分

得 $(\cos 2C + 1)\cos C = 2\sin C \cos C \sin C$,

在锐角三角形中, $\cos C \neq 0$,

故 $\cos 2C + 1 = 2\sin^2 C$, 即 $2\cos^2 C - 1 + 1 = 2\sin^2 C$, 即 $\cos^2 C = \sin^2 C$ 7 分

因为 $C \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$ 8 分

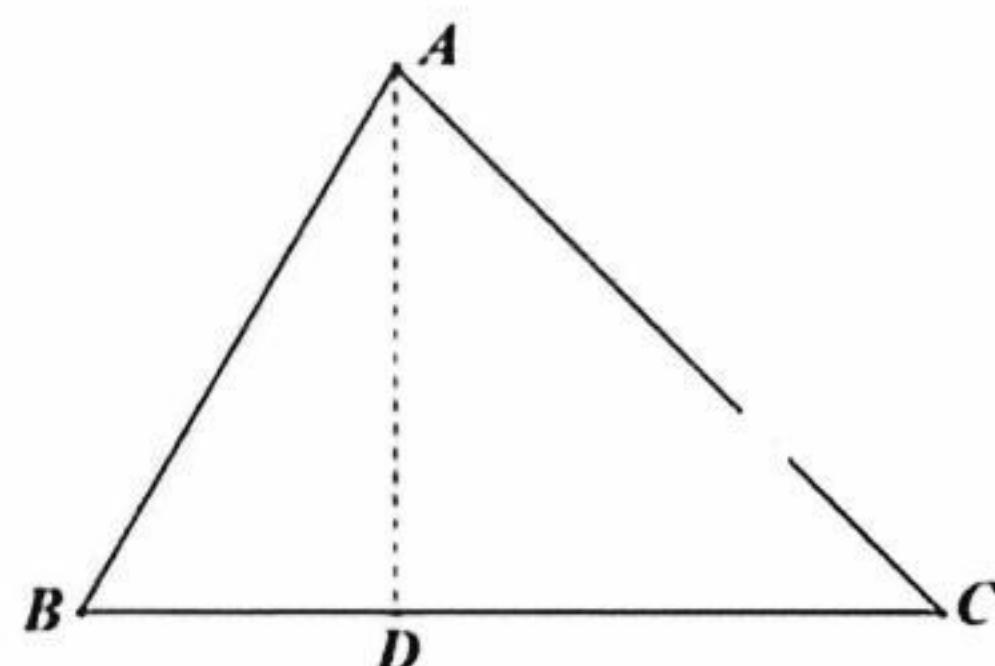
如图, 过 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为 D 9 分

可得 $BD = c \cos B, CD = b \cos C$, 10 分

故 $a = BD + CD = c \cos B + b \cos C$, 11 分

所以 $a = \frac{1}{2}c + \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{1}{2}(c + \sqrt{2}b)$ 12 分

得 $a = 2$ 13 分



(另外, 若没有作图, 9-11 分按以下方式得到, 同样给分)

因为 $\sin A = \sin(\pi - A) = \sin(B + C)$, 9 分

所以 $\sin A = \sin B \cos C + \cos B \sin C$, 10 分

根据正弦定理, 可得 $a = b \cos C + c \cos B$ 11 分

16. (15 分)

【试题解析】解法一: (1) $f'(x) = \frac{x+1-a}{x+1} (x > -1)$, 1 分

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 函数 $f(x)$ 无极值; 2 分

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = a - 1$, 3 分

当 $x \in (-1, a - 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-1, a - 1)$ 上单调递减; 4 分

当 $x \in (a - 1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(a - 1, +\infty)$ 上单调递增. 5 分

所以当 $x = a - 1$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $a - 1 - a \ln a$, 无极大值. 6 分

(备注: 没有讨论 a , 但有注意定义域, 给 4 分; 没有讨论 a , 也没注意定义域, 给 3 分; 若过程全对, 只忽视定义域得 5 分)

(2) 令 $g(x) = x - \frac{3}{2} \ln(x+1), x \in [0, 1]$,

由 (1) 知, 取 $a = \frac{3}{2}$ 时, $f(x) = g(x)$, 7 分

所以 $g(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递增, 8 分

因为 $g(0) = 0$, 所以 $x \in [0, \frac{1}{2})$ 时, $g(x) \leq 0$; 9 分

又因为 $g(1) = 1 - \frac{3}{2} \ln 2 < 0$, 所以 $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ 时, $g(x) \leq 0$; 10 分

综上当 $x \in [0, 1]$ 时, $g(x) \leq 0$, 即 $x \leq \frac{3}{2} \ln(x+1)$; 11 分

(3) 令 $x = \frac{1}{n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则由(2)得 $\frac{1}{n} < \frac{3}{2} \ln(1 + \frac{1}{n})$, 12 分

即 $\frac{1}{n} < \frac{3}{2} (\ln(n+1) - \ln n)$, 13 分

因此 $\sum_{i=1}^{2025} \frac{1}{i} < \frac{3}{2} [(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln 2026 - \ln 2025)]$, 14 分

所以 $\sum_{i=1}^{2025} \frac{1}{i} < \frac{3}{2} \ln 2026$ 15 分

解法二: (1) 同解法一; 6 分

(2) 令 $g(x) = x - \frac{3}{2} \ln(x+1), x \in [0, 1]$

则 $g'(x) = 1 - \frac{3}{2(x+1)} = \frac{2x-1}{2(x+1)}$ 7 分

所以当 $x \in [0, \frac{1}{2})$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ 时, $g'(x) > 0$,

因此, $g(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递增, 8 分

下同解法一.

(3) 同解法一. 15 分

17. (15 分)

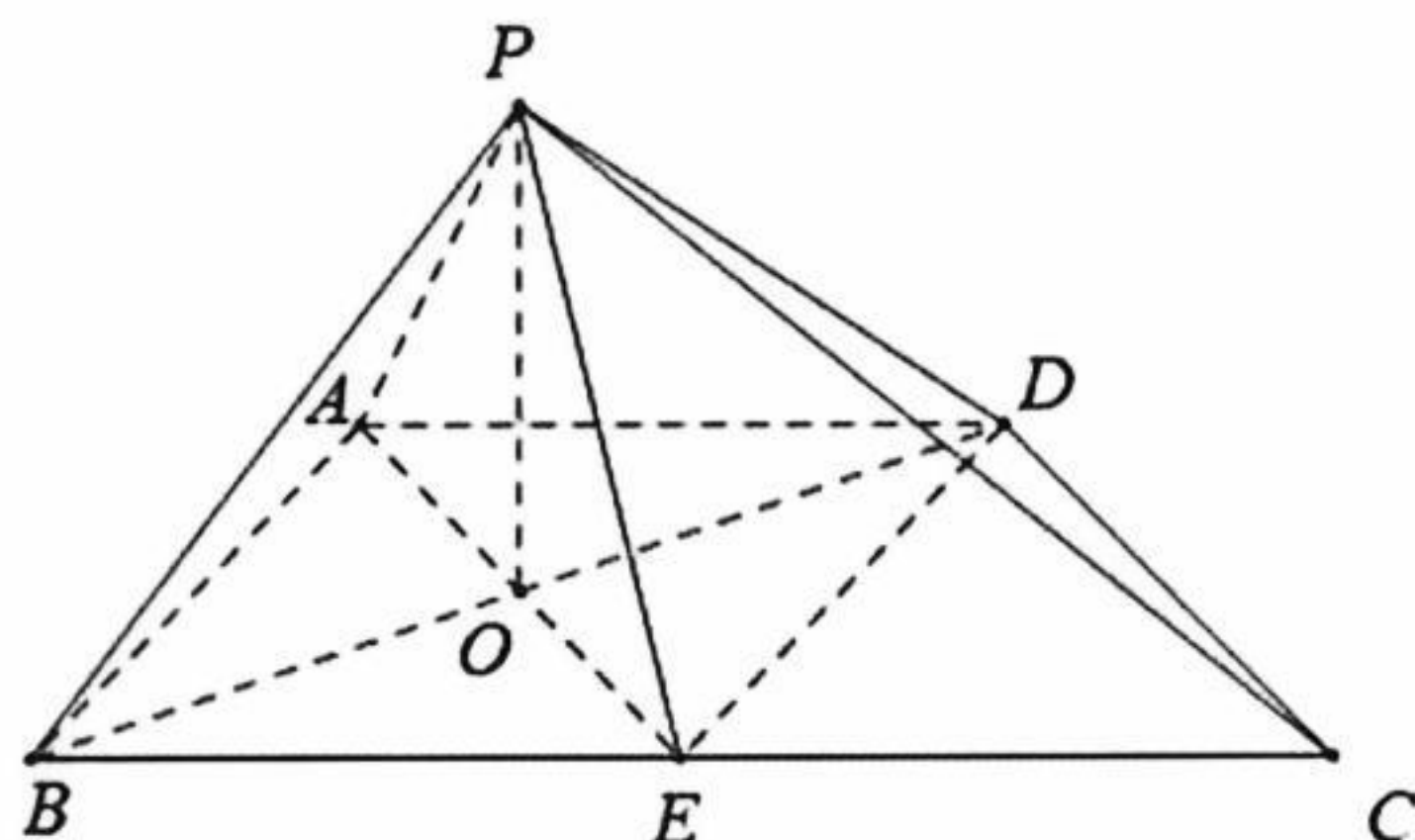
【试题解析】解法一: (1) 因为 $AD \parallel BC$, 1 分

$BC \subset$ 平面 PBC , 2 分

$AD \not\subset$ 平面 PBC , 3 分

所以 $AD \parallel$ 平面 PBC 4 分

(2)



取 BC 中点 E , 连接 PE, AE , 设 $AE \cap BD = O$, 5 分

因为 $AD \parallel BC$, $BC = 2\sqrt{2}$, $AD = AB = \sqrt{2}$, $AB \perp BC$,

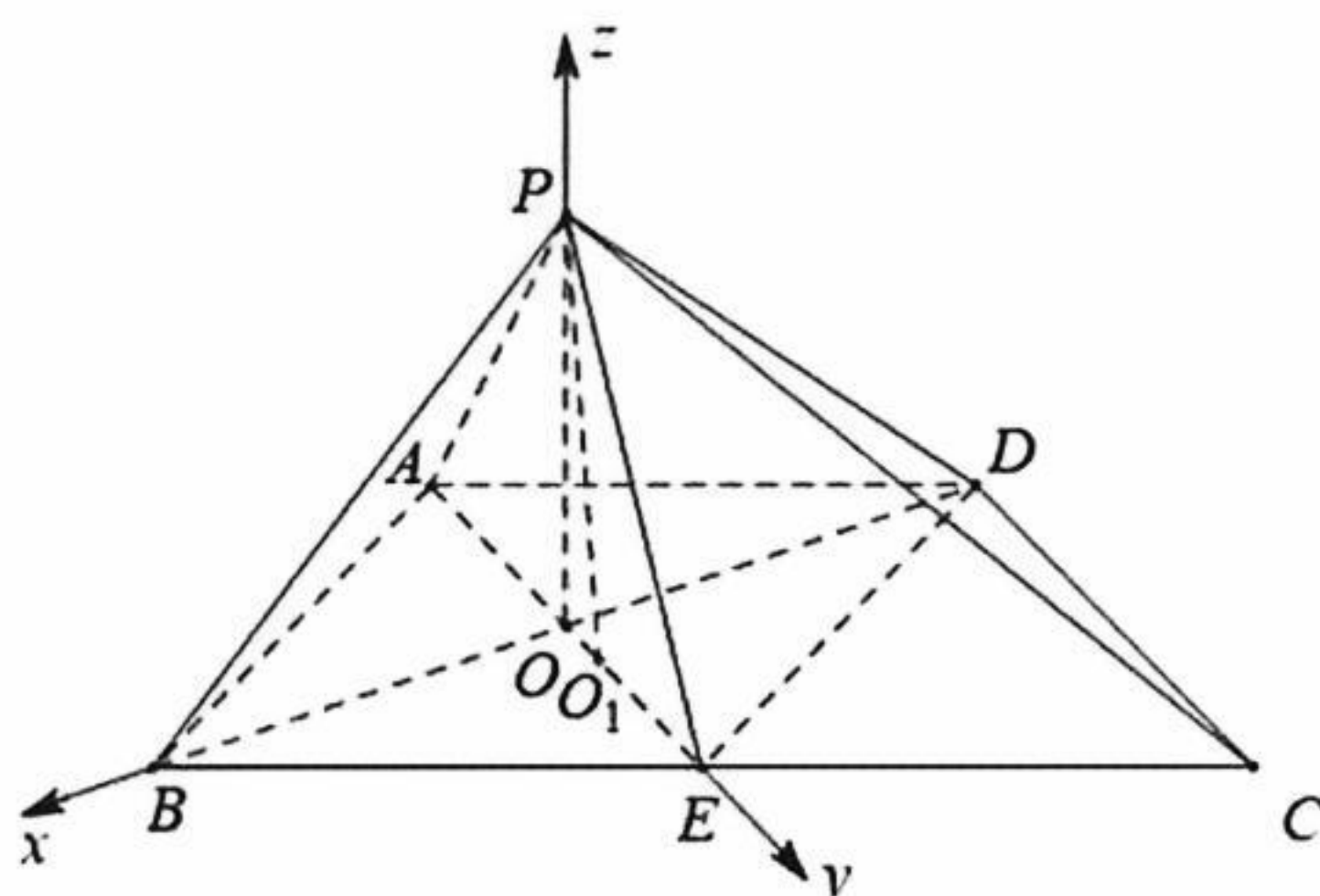
所以四边形 $ABCD$ 是正方形, 所以 $BD \perp AE$ 6 分

连接 PO , 因为 $PB = PD$, O 为 BD 的中点, 所以 $BD \perp PO$, 7 分

因为 $PO \cap AE = O$, $PO, AE \subset$ 平面 PAE , 所以 $BD \perp$ 平面 PAE , (相交没写扣 1 分) 8 分

又 $PA \subset$ 平面 PAE , 所以 $BD \perp PA$ 9 分

(3)



由 (2) 可知 $BD \perp$ 平面 PAE , $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以平面 $ABCD \perp$ 平面 PAE 10 分

过 P 作 $PO_1 \perp AE$, 垂足为 O_1 , 又因为平面 $ABCD \cap$ 平面 $PAE = AE$, $PO_1 \subset$ 平面 PAE ,

所以 $PO_1 \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 PA 在底面 $ABCD$ 的射影在直线 AE 上,

所以直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成角是 $\angle PAE$, 所以 $\angle PAE = 45^\circ$, 11 分

因为正方形 $ABCD$ 中 $AB = \sqrt{2}$, 所以 $BD = 2$, $AO = 1$,

又因为 $PB = PD = \sqrt{2}$, 所以 $PO = 1$,

所以 $\angle PAO = \angle APO = 45^\circ$, 所以 $PO \perp AE$.

所以点 O 与 O_1 重合, 即 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ 12 分

以点 O 为原点, OB 为 x 轴, OE 为 y 轴, OP 为 z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$, 则

$O(0,0,0)$, $A(0,-1,0)$, $B(1,0,0)$, $P(0,0,1)$, $E(0,1,0)$, $D(-1,0,0)$, $\overrightarrow{PA} = (0,-1,-1)$, $\overrightarrow{PB} = (1,0,-1)$,

$\overrightarrow{DP} = (1,0,1)$, 13 分

因为点 D 在平面 PAB 内的正投影是 Q , 所以 $DQ \perp$ 平面 PAB .

设 $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{PA} + \mu \overrightarrow{PB} = (\mu, -\lambda, -\lambda - \mu)$, $\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PQ} = (\mu + 1, -\lambda, 1 - \lambda - \mu)$,

$$\text{因为 } \begin{cases} \overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \\ \overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} 2\lambda + \mu - 1 = 0 \\ 2\mu + \lambda = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3} \\ \mu = -\frac{1}{3} \end{cases},$$

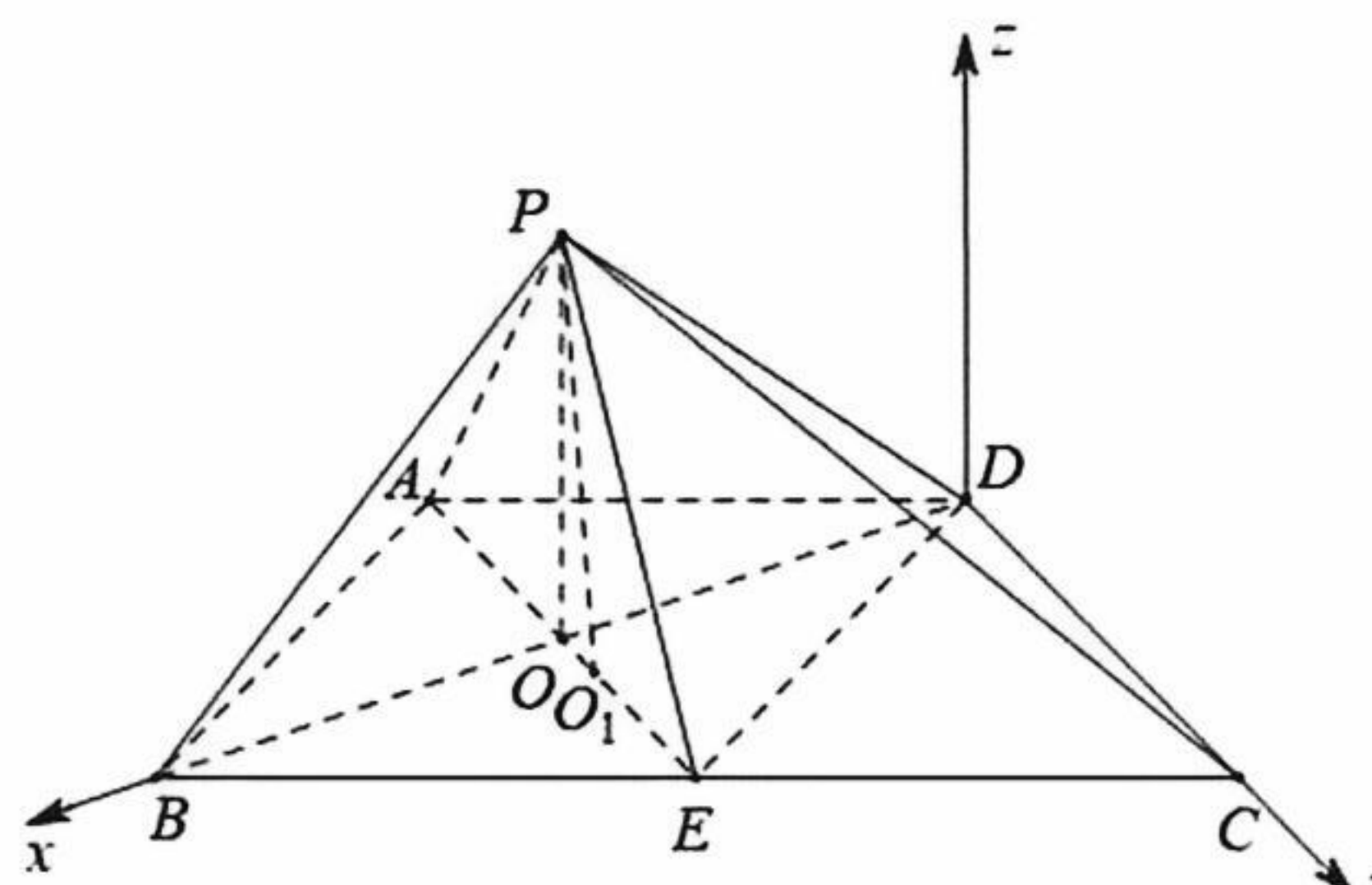
所以 $\overrightarrow{DQ} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, 所以 $Q(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$,

所以点 Q 到平面 $ABCD$ 距离为 $\frac{2}{3}$, 14 分

$$V_{Q-ABCD} = \frac{1}{3} S_{\text{梯形}ABCD} h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} (\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \times \sqrt{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

解法二: (1) (2) 同解法一.

(3)



(不同建系方法) 以点 D 为原点, DB 为 x 轴, DC 为 y 轴, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 则 $D(0,0,0)$, $A(1,-1,0)$, $B(2,0,0)$, $P(1,0,1)$, $E(1,1,0)$, $\overrightarrow{PA} = (0,-1,-1)$, $\overrightarrow{PB} = (1,0,-1)$, $\overrightarrow{DP} = (1,0,1)$.

..... 13 分

因为点 D 在平面 PAB 内的正投影是 Q , 所以 $DQ \perp$ 平面 PAB .

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{PA} + \mu \overrightarrow{PB} = (\mu, -\lambda, -\lambda - \mu), \quad \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PQ} = (\mu + 1, -\lambda, 1 - \lambda - \mu),$$

$$\text{因为 } \begin{cases} \overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \\ \overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} 2\lambda + \mu - 1 = 0 \\ 2\mu + \lambda = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3} \\ \mu = -\frac{1}{3} \end{cases},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{DQ} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), \text{ 所以 } Q(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}),$$

所以点 Q 到平面 $ABCD$ 距离为 $\frac{2}{3}$, 14 分

$$V_{Q-ABCD} = \frac{1}{3} S_{\text{梯形}ABCD} h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} (\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \times \sqrt{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

解法三: (1) (2) 同解法一.

(3) 由 (2) 可知 $BD \perp$ 平面 PAE , $BD \subset$ 平面 $ABCD$,

所以平面 $ABCD \perp$ 平面 PAE 10 分

过 P 作 $PO_1 \perp AE$, 垂足为 O_1 , 因为平面 $ABCD \cap$ 平面 $PAE = AE$, 且 $PO_1 \subset$ 平面 PAE ,

所以 $PO_1 \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 PA 在底面 $ABCD$ 的射影在直线 AE 上,

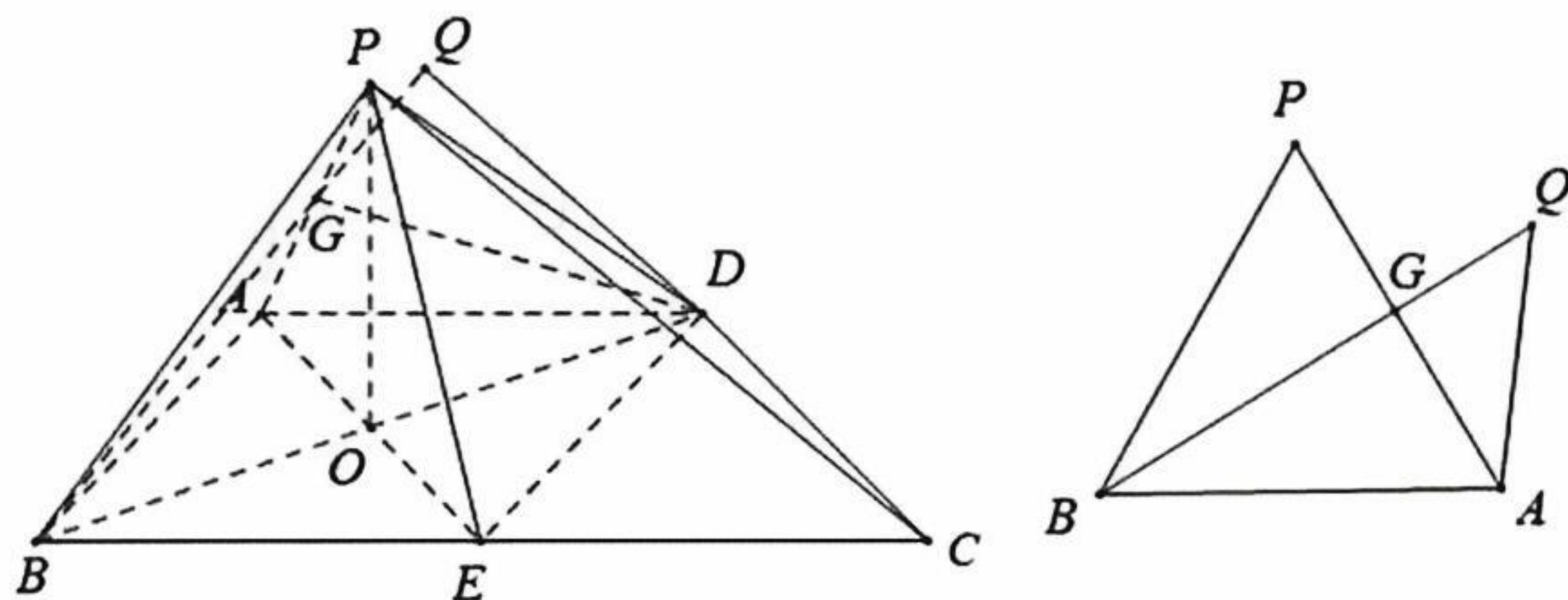
所以直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成角是 $\angle PAE$ ，所以 $\angle PAE=45^\circ$ ，.....11 分

因为正方形 $ABCD$ 中 $AB=\sqrt{2}$ ，所以 $BD=2$ ， $AO=1$ ，

又因为 $PB=PD=\sqrt{2}$ ，所以 $PO=1$ ，

所以 $\angle PAO=\angle APO=45^\circ$ ，所以 $PO\perp AE$ 。

所以点 O 与 O_1 重合，即 $PO\perp$ 平面 $ABCD$ 。.....12 分



取 PA 中点 G ，连接 BG, DG ，

由题意知 $AB=PB$ ，则 $PA\perp BG$ ；同理题意知 $AD=PD$ ， $PA\perp DG$

又 $DG\cap BG=G$ ，所以 $PA\perp$ 平面 BGD ，

因为 $PA\subset$ 平面 PAB ，所以平面 $PAB\perp$ 平面 BGD 。

注意到平面 $PAB\cap$ 平面 $BGD=BG$ ，

故点 D 在平面 PAB 内的正投影 Q 必在直线 BG 上，

过点 D 作 $DQ\perp BG$ ，垂足为 Q ，则点 D 到平面 PAB 的距离 DQ ，

因为 $V_{D-PAB}=V_{P-ABD}$ ，所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle PAB}\cdot DQ=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\cdot PO$ ，

即 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2\times DQ=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1$ ，所以 $DQ=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 。.....13 分

$BQ=\sqrt{BD^2-DQ^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ，设点 Q 到平面 ABD 的距离 h_Q ，

因为 $V_{Q-ABD}=V_{D-ABQ}$ ，所以 $\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABQ}\cdot DQ=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}h_Q$ ，

即 $\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2})\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}h_Q$ ，解得 $h_Q=\frac{2}{3}$ 。.....14 分

$V_{Q-ABCD}=\frac{1}{3}S_{\text{梯形}ABCD}h_Q=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\sqrt{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ 。.....15 分

(若通过体积比转化，可以不用求出点 Q 或者点 Q 到平面 ABD 的距离 h_Q ，也同样给分)

比如： $V_{Q-ABCD}=\frac{1}{3}S_{\text{梯形}ABCD}h=\frac{1}{3}(3\times S_{\triangle ABD})h=3\cdot V_{Q-ABD}$ ，.....14 分

$$\text{又 } V_{Q-ABD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABQ} \cdot DQ = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{9}$$

$$\text{所以 } V_{Q-ABCD} = 3 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{3} \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

18. (17 分)

【试题解析】

(1) 记 S_n 为棋子顺时针移动 n 次, N_n 为棋子逆时针移动 n 次,

则 $S_i N_j (i+j=t, i, j \in \mathbf{N})$ 与 $S_e N_f (e+f=t, e, f \in \mathbf{N})$ 互斥. 1 分

(类似的设法酌情给分)

$$P(X_2 = 2) = P(N_2) = C_2^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}; \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$P(X_3 = 3) = P(S_2 N_1) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \quad P(X_5 = 1) = P(S_4 N_1 + N_5) = C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{16}; \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$P(X_5 = 7) = P(S_1 N_4 + S_5) = C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{16}.$$

$$\text{故 } P(X_5 = 1) = P(X_5 = 7). \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

(3) 先分析连续移动 6 次后 X_6 的取值情况: 6 次均为顺时针, 则 $X_6 = 2$;

5 次顺时针 1 次逆时针, 则 $X_6 = 4$; 4 次顺时针 2 次逆时针, 则 $X_6 = 6$;

3 次顺时针 3 次逆时针, 则 $X_6 = 8$; 2 次顺时针 4 次逆时针, 则 $X_6 = 2$;

1 次顺时针 5 次逆时针, 则 $X_6 = 4$; 6 次逆时针, 则 $X_6 = 6$ 10 分

$$\text{故 } P(X_6 < 4) = P(X_6 = 2) = P(S_6 + S_2 N_4) = C_6^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{4}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

随机变量 Y 的分布列如下:

Y	1	2	3		i		9	10
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4}$		$\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} \times \frac{1}{4}$		$\left(\frac{3}{4}\right)^8 \times \frac{1}{4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^9 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^9$

..... 14 分

$$\text{由 } E(Y) = \frac{1}{4} \left[1 + 2 \times \frac{3}{4} + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + 9 \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \right] + 10 \times \left(\frac{3}{4}\right)^9. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

$$\text{令 } S = \frac{1}{4} \left[1 + 2 \times \frac{3}{4} + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + 9 \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \right],$$

$$\text{则 } \frac{3}{4}S = \frac{1}{4}[1 \times \frac{3}{4} + 2 \times (\frac{3}{4})^2 + 3 \times (\frac{3}{4})^3 + \cdots + 9 \times (\frac{3}{4})^9].$$

$$\text{两式相减, 得 } \frac{1}{4}S = \frac{1}{4}[1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + (\frac{3}{4})^3 + \cdots + (\frac{3}{4})^8 - 9 \times (\frac{3}{4})^9],$$

$$\text{即 } S = 1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + (\frac{3}{4})^3 + \cdots + (\frac{3}{4})^8 - 9 \times (\frac{3}{4})^9 = 4 - 13 \times (\frac{3}{4})^9, \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

$$\text{故 } E(X) = 4 - 3 \times (\frac{3}{4})^9, \text{ 又因为 } n \in \mathbf{N}^*, \text{ 所以 } E(Y) < 4. \dots\dots\dots 17 \text{ 分}$$

19. (17 分)

【试题解析】解法一: (1) 由 $|A_1A_2| = 6$, 可得 $a = 3$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

又 $B(0, b)$, 可得 $\overrightarrow{OA_1} = (-3, 0), \overrightarrow{OB} = (0, b)$,

所以 $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB} = (-3, b)$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

所以 $|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB}| = \sqrt{9 + b^2}$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

又 $|\overrightarrow{OB}| = b$, 根据题意得 $\sqrt{9 + b^2} = 2b$,

解得 $b^2 = 3$, 从而求得椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 是, A_1, Q', S 三点共线, $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(判断是, 即得 1 分)

证明: 设直线 A_1Q' 与 A_2P 的交点为 $S'(x_{S'}, y_{S'})$, 要证明 A_1, Q', S 三点共线,

只需要证明 S' 与 S 重合,

即证明直线 OS' 的斜率 k_3' 与 OS 的斜率 k_3 相等.

$$\text{由题意得 } \frac{1}{k_1} = \frac{x_1 - 3}{y_1}, \frac{1}{k_2} = \frac{x_2 - 3}{y_2},$$

因为 A_1, A_2 关于原点对称, Q, Q' 关于原点对称,

故直线 A_1Q', A_2Q 相互平行, 所以 A_1Q' 的斜率 $k_{A_1Q'} = k_2$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$\text{所以 } A_1Q': x = \frac{x_2 - 3}{y_2}y - 3 \dots\dots\dots \textcircled{1}, \quad A_2P: x = \frac{x_1 - 3}{y_1}y + 3 \dots\dots\dots \textcircled{2},$$

$$\text{由 } \textcircled{1}\textcircled{2}, \text{ 得 } 2x = (\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})y, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{即 } 2x_{S'} = (\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})y_{S'}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

即 $2\frac{x_{S'}}{y_{S'}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$, 即 $\frac{2}{k_3'} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$,

又由题意知 $\frac{2}{k_3} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$, 所以 $k_3' = k_3$, 得证. 9 分

(3) 选③..... 10 分

根据题意 PQ 直线的斜率存在且不为零, 设直线 $PQ: x = my + n (n \neq \pm 3, m \neq 0)$,

与椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ 联立, 得 $(m^2 + 3)y^2 + 2mny + n^2 - 9 = 0$, 11 分

其判别式 $\Delta = (2mn)^2 - 4(m^2 + 3)(n^2 - 9) > 0$, 即 $3m^2 - n^2 + 9 > 0$,

且 $y_1 + y_2 = \frac{-2mn}{m^2 + 3}; y_1 y_2 = \frac{n^2 - 9}{m^2 + 3}$, 12 分

由 (2) 知 $OT: y = k_3 x$, 其中 $\frac{2}{k_3} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{x_1 - 3}{y_1} + \frac{x_2 - 3}{y_2}$,

可得 $\frac{2}{k_3} = \frac{my_1 + n - 3}{y_1} + \frac{my_2 + n - 3}{y_2} = 2m + (n - 3)\frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2}$, 13 分

化简得 $\frac{2}{k_3} = 2m + (n - 3)\frac{-2mn}{n^2 - 9} = 2m(1 + \frac{-n}{n + 3}) = \frac{6m}{n + 3}$,

所以直线 $OT: y = \frac{n + 3}{3m}x$, 14 分

将直线 OT 与直线 $PQ: x = my + n$ 联立,

设 $T(x_T, y_T)$, 可得 $x_T = m\frac{n + 3}{3m}x_T + n$, 即 $nx_T = -3n$,

注意到当 $n = 0$ 时, 直线 $PQ: x = my$,

此时 P, Q 关于原点对称, 这与 $y_1 > 0, y_2 > 0$ 矛盾, 15 分

故 $n \neq 0$, 从而可得 $x_T = -3$, 即点 T 在直线 $x = -3$ 上, 16 分

故可得 $\triangle TBO$ 的面积 $S = \frac{1}{2}|\overline{OB}| \cdot |x_T| = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, 所以 $\triangle TBO$ 的面积为定值. 17 分

解法二: (1) 依题意 $|A_1 A_2| = 2a = 6$, 故 $a = 3$, 1 分

由 $|\overline{OA_1} + \overline{OB}| = 2|\overline{OB}|$, 可知 $\overline{OA_1} + \overline{OB}$ 与 $\overline{OB}$ 夹角为 60° , 2 分

所以 $\frac{a}{b} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 3 分

解得 $b^2 = 3$, 从而求得椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2) 是, A_1, Q', S 三点共线, 5 分

(判断是, 即得 1 分)

证明: 设 $S(x, y)$, $\overrightarrow{PA_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{A_2S}$, $\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0$, 可得 $(3 - x_1, -y_1) = \lambda(x - 3, y)$,

$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{3 - x_1 + 3\lambda}{\lambda}, \\ y = \frac{-y_1}{\lambda}, \end{cases} \text{即 } S\left(\frac{3 - x_1 + 3\lambda}{\lambda}, \frac{-y_1}{\lambda}\right), \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

故可得直线 OS 的斜率 $k_3 = \frac{-y_1}{3 - x_1 + 3\lambda}$,

$$\text{又求得直线 } A_1S \text{ 的斜率 } k_{A_1S} = \frac{\frac{-y_1}{\lambda}}{\frac{3 - x_1 + 3\lambda}{\lambda} + 3} = \frac{y_1}{x_1 - 6\lambda - 3}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{根据题意 } \frac{2}{k_3} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \text{ 又 } k_1 = \frac{y_1}{x_1 - 3},$$

$$\text{所 } \frac{1}{k_2} = \frac{2}{k_3} - \frac{1}{k_1} = \frac{2(3 - x_1 + 3\lambda)}{-y_1} - \frac{x_1 - 3}{y_1} = \frac{x_1 - 6\lambda - 3}{y_1},$$

$$\text{从而得 } k_2 = \frac{y_1}{x_1 - 6\lambda - 3}, \text{ 故 } k_{A_1S} = k_2. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

因为 A_1, A_2 关于原点对称, Q, Q' 关于原点对称,

故直线 A_1Q', A_2Q 相互平行, 所以 A_1Q' 的斜率 $k_{A_1Q'} = k_2$,

因此可得 $k_{A_1S} = k_{A_1Q'}$, 所以 A_1, Q', S 三点共线. 9 分

(3) 选③, 10 分

证明: 设 $PQ: m(x - 3) + ny = 1$ ($m \neq 0, n \neq 0$),

将椭圆方程整理为 $[(x - 3) + 3]^2 + 3y^2 = 9$, 即 $(x - 3)^2 + 6(x - 3) + 3y^2 = 0$

将直线 PQ 与椭圆联立得: $(x - 3)^2 + 6(x - 3)[m(x - 3) + ny] + 3y^2 = 0$,

整理可得, $(1 + 6m)(x - 3)^2 + 6n(x - 3)y + 3y^2 = 0$, 11 分

注意到 $y_1, y_2 \neq 0$, 故上式等价于 $(1 + 6m)\left(\frac{x - 3}{y}\right)^2 + 6n\left(\frac{x - 3}{y}\right) + 3 = 0$,

$$\text{设 } t_1 = \frac{x_1 - 3}{y_1}, t_2 = \frac{x_2 - 3}{y_2}, \text{ 注意到 } t_1 = \frac{1}{k_1}, t_2 = \frac{1}{k_2},$$

故可得 t_1, t_2 是关于 t 的二次方程 $(1 + 6m)t^2 + 6nt + 3 = 0$ 的两根, 12 分

其中 $1 + 6m \neq 0, \Delta = 36n^2 - 12(1 + 6m) > 0$,

根据韦达定理, 可得 $t_1 + t_2 = \frac{-6n}{1+6m}$, 即 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{-6n}{1+6m}$,

又因为 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{k_3}$, 故得 $k_3 = -\frac{1+6m}{3n}$, 13 分

即 $OS: y = -\frac{1+6m}{3n}x$,

设 $T(x_T, y_T)$, 因为点 T 为两直线 OS, PQ 的公共点, 故联立两直线 $\begin{cases} ny = 1 - m(x-3), \\ ny = -\frac{1+6m}{3}x, \end{cases}$

得 $x_T(\frac{1+6m}{3} - m) = -(1+3m)$, 即 $\frac{1+3m}{3}x_T = -(1+3m)$, 14 分

注意到当 $m = -\frac{1}{3}$ 时, 直线 $PQ: y = \frac{1}{3}x$,

此时 P, Q 关于原点对称, 这与 $y_1 > 0, y_2 > 0$ 矛盾, 15 分

故 $m \neq -\frac{1}{3}$, 从而可得 $x_T = -3$, 即点 T 在直线 $x = -3$ 上, 16 分

故可得 $\triangle TBO$ 的面积 $S = \frac{1}{2}|OB| \cdot |x_T| = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, 所以 $\triangle TBO$ 的面积为定值. 17 分

解法三: (1) 同解法一或解法二 4 分

(2) 判断是: A_1, Q', S 三点共线, 5 分

理由如下: 依题意, A_2P, A_2Q, OS, A_1S 斜率均不为零.

设 $A_2P: x-3=t_1y$, $A_2Q: x-3=t_2y$, 由 $t_1 = \frac{1}{k_1}, t_2 = \frac{1}{k_2}, \frac{2}{k_3} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, t_1 \neq t_2$,

可得直线 $OS: x = \frac{t_1+t_2}{2}y$, 6 分

联立 $OS: x = \frac{t_1+t_2}{2}y$ 与 $A_2P: x-3=t_1y$, 得 $S(\frac{3(t_1+t_2)}{t_2-t_1}, \frac{6}{t_2-t_1})$, 7 分

$k_{A_1S} = \frac{\frac{6}{t_2-t_1} - 0}{\frac{3(t_1+t_2)}{t_2-t_1} - (-3)} = \frac{1}{t_2} = k_2$ 8 分

又因为 A_1, A_2 关于原点对称, Q, Q' 关于原点对称,

故直线 A_1Q', A_2Q 相互平行, 所以 A_1Q' 的斜率 $k_{A_1Q'} = k_2$,

因此可得 $k_{A_1S} = k_{A_1Q'}$, 所以 A_1, Q', S 三点共线. 9 分

(3) 选③,10 分

证明: 联立 $A_2P: x-3=t_1y$ 与 $C: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$, 得 $(t_1^2+3)y^2+6t_1y=0$,

故解得 $y_1=\frac{-6t_1}{3+t_1^2}$,11 分

从而求得 $P(\frac{3(3-t_1^2)}{3+t_1^2}, \frac{-6t_1}{3+t_1^2})$,12 分

同理可得 $Q(\frac{3(3-t_2^2)}{3+t_2^2}, \frac{-6t_2}{3+t_2^2})$, 则 $k_{PQ}=\frac{3-t_1t_2}{3(t_1+t_2)}$ 13 分

$PQ: y+\frac{6t_1}{3+t_1^2}=\frac{3-t_1t_2}{3(t_1+t_2)}[x-\frac{3(3-t_1^2)}{3+t_1^2}]$,14 分

联立直线 PQ 与 $OS: x=\frac{t_1+t_2}{2}y$, 消去 y 得 $\frac{-(3+t_1t_2)}{3(t_1+t_2)}x=\frac{3+t_1t_2}{t_1+t_2}$,15 分

得点 T 的横坐标 $x_T=-3$. 即点 T 在直线 $x=-3$ 上,16 分

故可得 $\triangle TBO$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|OB|\cdot|x_T|=\frac{3}{2}\sqrt{3}$, 所以 $\triangle TBO$ 的面积为定值.17 分