准考证号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿＿

（在此试卷上答题无效）

漳州市2025届高三毕业班第二次教学质量检测

数学试题

本试题卷共4页，19题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

考生注意：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，用0.5 mm黑色签字笔将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

D

1. 命题“$\forall x>0, x+1\leqslant e^x$”的否定是

A. $\exists x\leqslant 0, x+1\leqslant e^x$　　B. $\exists x\leqslant 0, x+1>e^x$

C. $\exists x>0, x+1\leqslant e^x$　　D. $\exists x>0, x+1>e^x$

2. 已知集合$A=\{x\mid \log_2 x<2\}$，$B=\{x\mid 1+a<x<2a-1\}$，若$A\cap B=\varnothing$，则实数a的取值范围是

A. $[3,+\infty)$　$\log_a N = x$　　B. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

D

C. $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$　　D. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[3,+\infty)$

3. 已知$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，若$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=0$，则$\alpha=$

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\cancel{\frac{5\pi}{12}}$　　D. $\cancel{\frac{\pi}{3}}$

B

$2\sqrt{2}$

4. 已知圆台的上、下底面半径分别为2，4，母线与底面所成角为$\frac{\pi}{4}$，则该圆台的体积为

A. 56π　　B. $\frac{56\pi}{3}$　　C. 28π　　D. $\frac{28\pi}{3}$

C

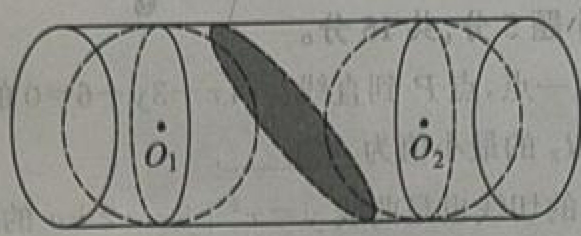
5. 某学习小组共5名同学，某次模拟考试的数学成绩平均分数为112，已知其中4名同学的成绩分别为96，109，120，126，则这5名同学成绩的第75百分位数是

-16 -3 8 14 109

A. 112　　B. 119　　C. 120　　D. 121

C

6. 如图，在筒高为16的圆柱型筒中，放置两个半径均为3的小球，两个小球均与筒壁相切，且分别与两底面相切，已知平面α与两个小球也相切，平面α被圆筒所截得到的截面为椭圆，则该椭圆的离心率为



A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，记以 OA，OB 为邻边的平行四边形的面积 $S(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|x_1y_2-x_2y_1|$. 已知 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{n}$，$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{m}+\mu\boldsymbol{n}(\lambda,\mu\in\mathbf{R},\lambda^2+\mu^2\neq0)$，则 $\frac{S(\boldsymbol{m},\boldsymbol{p})+S(\boldsymbol{n},\boldsymbol{p})}{S(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})}=$

A. $|\lambda+\mu|$　　B. $|\lambda\mu|$

C. $|\lambda|+|\mu|$　　D. $\frac{|\lambda\mu|}{|\lambda|+|\mu|}$

8. 在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 a^2，b^2，$2c^2$ 成等差数列，则 $\tan(C-B)$ 的最小值为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{2}{3}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知 a，b，c 是三条不同的直线，α，β，γ 是三个不同的平面，则下列命题中不正确的是

A. 若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\perp\gamma$，$\beta\cap\gamma=c$，则 $c\perp\alpha$

B. 若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\perp\gamma$，$a\subset\alpha$，$a\perp\beta$，$c\subset\gamma$，则 $a\perp c$

C. 若 $\alpha//\beta//\gamma$，$c//\gamma$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，则 $a//b//c$

D. 若 $a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，$c\perp\gamma$，$a//b//c$，则 $\alpha//\beta//\gamma$

10. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，则

A. $f(x)$的图象可以由 $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度得到

B. $f(x)$的图象关于 $x=-\frac{\pi}{12}$对称

C. $f(x)$在$\left[\frac{5\pi}{3},\frac{13\pi}{6}\right]$上单调递增

D. $\forall x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$，$f(x)\in\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right]$

11. 已知复数 z_1，z_2 在复平面内对应的点分别为 Z_1，Z_2，O 为坐标原点，则

A. 若 $z=z_1+z_2$，则 $\overline{z}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

B. 若 z_1，z_2 均不为 0，则 $|z_1z_2|=|\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}|$

C. 若 $z=\overline{z_2}$，则 $|z_1z_2|=|z_1z|$

D. 若 $|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}|=|\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}|$，则 $z_1\cdot z_2=0$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知 P 为抛物线 $y^2=4x$ 上一点，点 P 到直线 $l_1:4x-3y+6=0$ 的距离为 d_1，点 P 到直线 $l_2:x+4=0$ 的距离为 d_2，则 d_1+d_2 的最小值为________.

13. 若曲线 $y=\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线也是曲线 $y=x^2+3x-2+a$ 的切线，则实数 $a=$ 2 .

14. 已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足：$a_n-b_{n+1}+3b_n+n=0$，$b_n-a_{n+1}+3a_n+2n-1=0$，若 $a_1=2$，$b_1=1$，则 $b_n=$________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_5=9$，$a_3+a_6+a_9=33$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $b_n+a_n=19$，求数列 $\{|b_n|\}$ 的前 n 项和 S_n.

16.（15 分）

已知函数 $f(x)=xe^x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值.

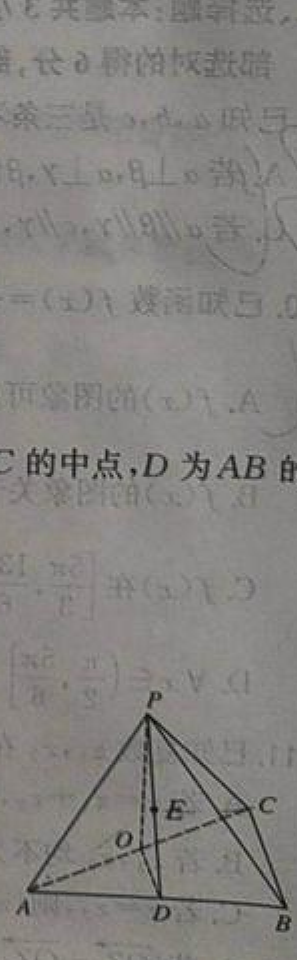
(2) 若 $f(x)-\ln x+ax\geqslant 1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

17.（15 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，侧面 PAC 为等腰三角形，$\angle APC=\frac{2\pi}{3}$，$O$ 为 AC 的中点，D 为 AB 的中点，$OP=OD=1$，$AB=4$，点 E 在 PD 上.

(1) 若 $2\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{PD}$，证明：平面 $ACE\perp$ 平面 PAB.

(2) 若 $PB=2\sqrt{2}$，求平面 PAB 与平面 PBC 夹角的余弦值.



18.（17分）

某校开展“强国知识”挑战赛，比赛分为两轮，规则如下：

①第一轮为“时事政治”试题，共3道试题，至少正确回答2道，才能进入第二轮，否则挑战失败；第二轮为“科普知识”试题，共3道试题，也要至少正确回答2道才能算挑战成功，否则挑战失败（进入比赛轮次后，该轮次中所有题目均需要作答）；两轮都挑战成功，可以获得“强国小能手”称号；

②每个参赛组由两人组成，作答方案有两个：第一种方案是在第一轮和第二轮中，两人依次轮流答题（例如：甲先回答第一轮第一题，则乙回答第一轮第二题，甲再回答第一轮第三题；若进入第二轮，则由乙回答第二轮第一题，甲回答第二轮第二题，乙再回答第二轮第三题）；第二种方案是由参赛两人分别回答第一轮所有试题和第二轮所有试题（如甲回答第一轮所有试题，则乙回答第二轮的所有试题）.

已知某小组由甲、乙两名同学组成，甲同学正确回答第一轮、第二轮中的每道试题的概率分别为$\frac{4}{5}$，$\frac{2}{3}$；乙同学正确回答第一轮、第二轮中的每道试题的概率分别为$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$.

16

(1)若该小组采用第一种方案答题，且甲先回答第一轮中的第一题.

$\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{48}{100}$

（ⅰ）求该小组在第一轮中就挑战失败的概率.

（ⅱ）已知该小组获得“强国小能手”称号，求甲正确回答了3道试题的概率.

(2)无论采用哪一种作答方案，第一轮第一题均由甲作答，以该小组获得“强国小能手”称号的概率大小为决策依据，应该选择哪一种作答方案？并说明理由.

$\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$

19.（17分）

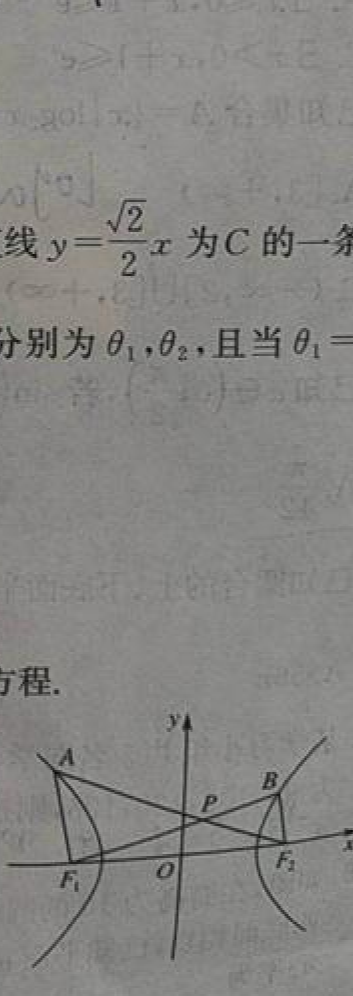
如图，已知F_1，F_2为双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，直线$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$为$C$的一条渐近线，$A$，$B$分别为$C$上位于第二、一象限内的点，$AF_1$，$BF_2$的倾斜角分别为$\theta_1$，$\theta_2$，且当$\theta_1=\frac{\pi}{2}$时，$|AF_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求双曲线C的标准方程.

(2)若$\theta_1=\theta_2$，连接AF_2，BF_1相交于P.

（ⅰ）若$|AF_1|-2=|BF_2|$，求直线BF_2的方程.

（ⅱ）证明：点P在以F_1，F_2为焦点的椭圆上，并求出该椭圆的标准方程.



漳州市2025届高三毕业班第二次教学质量检测

数学　答案详解

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D	C	A	B	C	D	C	D	BC	ACD	AC

1. D 【命题意图】本题考查全称量词命题的否定，考查推理论证能力，落实逻辑推理核心素养.

【解题思路】因为命题的否定为"改量词，否结论"，所以命题"$\forall x>0, x+1\leqslant e^x$"的否定是"$\exists x>0, x+1>e^x$"，故选 D.

2. C 【命题意图】本题考查集合的基本运算、对数不等式，考查运算求解能力，落实数学运算核心素养.

【解题思路】因为 $\log_2 x<2$，解得 $0<x<4$，所以 $A=(0,4)$. 当 $B=\varnothing$ 时，即 $1+a\geqslant 2a-1$，解得 $a\leqslant 2$，满足 $A\cap B=\varnothing$，符合题意；当 $B\neq\varnothing$ 时，则① $\begin{cases}1+a<2a-1,\\2a-1\leqslant 0,\end{cases}$ 该不等式组无解；② $\begin{cases}1+a<2a-1,\\1+a\geqslant 4,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 3$，所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$，故选 C.

3. A 【命题意图】本题考查诱导公式、二倍角公式，考查运算求解能力、化归与转化的思想，落实逻辑推理、数学运算核心素养.

【解题思路】因为 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)=-\cos 2\alpha$，所以 $-\cos 2\alpha+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=0$，即 $\cos 2\alpha=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$，即 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)$. 又因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\alpha+\sin\alpha>0$，所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$. 又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{12}$，故选 A.

4. B 【命题意图】本题考查圆台的体积，考查运算求解能力、空间想象能力，落实数学运算、直观想象核心素养.

【解题思路】因为母线与底面所成角为 $\frac{\pi}{4}$，所以圆台的高 $h=4-2=2$，所以该圆台的体积为 $\frac{1}{3}\times(4\pi+16\pi+\sqrt{4\pi\times16\pi})\times 2=\frac{56\pi}{3}$，故选 B.

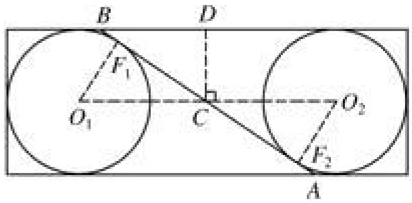
5. C 【命题意图】本题考查平均数、百分位数，考查运算求解能力、数据处理能力，落实数据分析、数学运算核心素养.

【解题思路】依题意设另外一名同学的成绩为 x，则 $112=\frac{96+109+120+126+x}{5}$，解得 $x=109$. 将这 5 名同学的成绩按从小到大的顺序排列为 96，109，109，120，126，则成绩的第 75 百分位数为 $5\times0.75=3.75$，即排序后的第 4 个数据，所以这 5 名同学成绩的第 75 百分位数是 120，故选 C.

6. D 【命题意图】本题考查椭圆的离心率，考查运算求解能力、空间想象能力，落实数学建模、数学运算核心素养.

【解题思路】设平面 α 被圆筒所截得到的截面为椭圆 Γ. 如图，作出圆柱过椭圆 Γ 的长轴的截面图，设长轴 A,B 与两圆的切点是 F_1,F_2. 连接 O_1O_2，记椭圆长轴与 O_1O_2 交于点 C，过 C 作 $CD\perp O_1O_2$，且 CD 交圆柱的母线于点 D，连接 O_1F_1,O_2F_2，则 $O_1F_1\perp AB$，$O_2F_2\perp AB$. 因为圆柱的高为 16，球的半径是 3，所以圆柱的底面半径为 3，$O_1O_2=16-2\times3=10$，$O_1F_1=3$，$CD=3$. 根据对称性可知 C 是 O_1O_2，AB 的中点，故 $CO_1=5$，则 $CF_1=CF_2=4$. 易得 $\mathrm{Rt}\triangle F_1CO_1\cong\mathrm{Rt}\triangle DBC$，故 $BC=CO_1=5$，则椭圆的长半轴长 $a=5$.

由题意得椭圆的短半轴长 $b=3$，所以半焦距长 $c=4$，则椭圆的离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$，故选 D.



7. C 【命题意图】本题考查以平面向量为背景的新定义问题，考查推理论证能力、运算求解能力和创新意识，落实数学建模、数学运算核心素养.

【解题思路】依题意设 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{m}=(x_3,y_3)$，$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{n}=(x_4,y_4)$，则 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{m}+\mu\boldsymbol{n}=(\lambda x_3+\mu x_4,\lambda y_3+\mu y_4)$，$S(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})=|x_3y_4-x_4y_3|$，$S(\boldsymbol{m},\boldsymbol{p})=|x_3(\lambda y_3+\mu y_4)-(\lambda x_3+\mu x_4)y_3|=|\mu||x_3y_4-x_4y_3|$，$S(\boldsymbol{n},\boldsymbol{p})=|x_4(\lambda y_3+\mu y_4)-(\lambda x_3+\mu x_4)y_4|=|\lambda||x_3y_4-x_4y_3|$，则 $\frac{S(\boldsymbol{m},\boldsymbol{p})+S(\boldsymbol{n},\boldsymbol{p})}{S(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})}=|\lambda|+|\mu|$，故选 C.

8. D 【命题意图】本题考查解三角形、等差数列的性质、基本不等式，考查运算求解能力、化归与转化的思想，落实逻辑推理、数学运算核心素养.

【解题思路】因为 $a^2,b^2,2c^2$ 成等差数列，即 $a^2+2c^2=2b^2$，则 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{b^2-c^2}{2ac}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3(b^2-c^2)}{2ab}$，所以 $\frac{\cos C}{\cos B}=\frac{\frac{3(b^2-c^2)}{2ab}}{\frac{b^2-c^2}{2ac}}=\frac{3c}{b}=\frac{3\sin C}{\sin B}$，即 $\tan B=3\tan C$，且 $\tan C>0$，所以 $\tan(C-B)=\frac{\tan C-\tan B}{1+\tan B\tan C}=-\frac{2\tan C}{1+3\tan^2 C}=-\frac{2}{\frac{1}{\tan C}+3\tan C}\geqslant-\frac{2}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $\tan C=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立，故选 D.

9. BC 【命题意图】本题考查空间直线、平面的位置关系，考查推理论证能力、空间想象能力，落实逻辑推理、直观想象核心素养.

【解题思路】对于 A，在平面 α 内取点 A，过 A 分别作 $l_1\perp\gamma$，$l_2\perp\beta$，因为 $\beta\cap\gamma=c$，所以 $l_1\perp c$，$l_2\perp c$，所以 $c\perp\alpha$，所以 A 选项正确；对于 B，若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\perp\gamma$，$a\subset\alpha$，$a\perp\beta$，$c\subset\gamma$，直线 a 与直线 c 的关系不确定，所以 B 选项不正确；对于 C，若 $\alpha/\!/\beta/\!/\gamma$，$c/\!/\gamma$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，直线 c 与直线 a，b 可能异面，可能平行也可能相交，所以 C 选项不正确；对于 D，因为 $a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，$c\perp\gamma$，$a/\!/b/\!/c$，可以得出 $\alpha/\!/\beta/\!/\gamma$，所以 D 选项正确，故选 BC.

10. ACD 【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质、函数图象的平移变换，考查推理论证能力、运算求解能力，落实逻辑推理和直观想象核心素养.

【解题思路】对于 A，将 $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得 $y=\frac{1}{2}\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，所以 A 选项正确；对于 B，$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0\neq\pm\frac{1}{2}$，所以 B 选项不正确；对于 C，因为 $x\in\left[\frac{5\pi}{3},\frac{13\pi}{6}\right]$，则 $2x\in\left[\frac{10\pi}{3},\frac{13\pi}{3}\right]$，$2x-\frac{\pi}{3}\in[3\pi,4\pi]$，所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{5\pi}{3},\frac{13\pi}{6}\right]$ 上单调递增，所以 C 选项正确；对于 D，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$ 时，$2x\in\left(\pi,\frac{5\pi}{3}\right]$，则 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$，所以 $f(x)\in\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$，所以 D 选项正确，故选 ACD.

11. AC 【命题意图】本题考查复数的运算、复数的几何意义，考查运算求解能力，落实逻辑推理和数学运算核心素养.

【解题思路】设 $z_1=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，$z_2=c+d\mathrm{i}(c,d\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z_1}=a-b\mathrm{i}$，$\overline{z_2}=c-d\mathrm{i}$，对于 A，$z=z_1+z_2=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$，$\overline{z_1}+\overline{z_2}=(a+c)-(b+d)\mathrm{i}$，则 $\overline{z}=\overline{z_1+z_2}=(a+c)-(b+d)\mathrm{i}$，即 $\overline{z}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$，所以

A 选项正确；对于 B，$z_1z_2=(ac-bd)+(bc+ad)i$，$\overrightarrow{OZ_1}=(a,b)$，$\overrightarrow{OZ_2}=(c,d)$，则 $\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=ac+bd$，则 $|z_1z_2|=|\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}|$ 不一定恒成立，所以 B 选项不正确；对于 C，$|z_1z_2|^2-|z_1z|^2=(z_1z_2)(\overline{z_1z_2})-(z_1z)(\overline{z_1z})=(z_1z_2)(\overline{z_1z_2})-(z_1\overline{z_2})(\overline{z_1}z_2)=0$，即 $|z_1z_2|^2-|z_1z|^2=0$，即 $|z_1z_2|=|z_1z|$，所以 C 选项正确；对于 D，若 $|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}|=|\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}|$，即 $\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=0$，$z_1\cdot z_2$ 不一定为 0，所以 D 选项不正确，故选 AC.

12. 5 **【命题意图】**本题考查抛物线的定义、点到直线的距离公式，考查运算求解能力、化归与转化的思想，落实逻辑推理、数学运算核心素养.

【解题思路】依题意知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 $F(1,0)$，连接 PF，则点 P 到直线 l_2 的距离 $d_2=|PF|+3$，所以 $d_1+d_2=d_1+|PF|+3\geqslant 2+3=5$ $\Big($**提示**：$d_1+|PF|$ 的最小值，即点 F 到直线 l_1 的距离，即 $\dfrac{|4+6|}{5}=2\Big)$，当且仅当点 P 在 F 到直线 l_1 的垂线上且 P 在 F 和 l_1 之间时，等号成立，即 d_1+d_2 的最小值为 5.

13. 2 **【命题意图】**本题考查导数的几何意义，考查运算求解能力，落实逻辑推理、数学运算核心素养.

【解题思路】易知曲线 $y=\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=x-1$，将直线 $y=x-1$ 与 $y=x^2+3x-2+a$ 联立，可得 $x^2+2x-1+a=0$，则 $\Delta=4-4(a-1)=0$，解得 $a=2$.

14. $2^{2n-1}-2^{n-1}$ **【命题意图】**本题考查等比数列的定义与通项公式，考查推理论证能力、运算求解能力，落实逻辑推理、数学运算核心素养.

【解题思路】由题意可得 $a_n+3b_n+n=b_{n+1}$，$b_n+3a_n+2n-1=a_{n+1}$，则 $a_{n+1}+b_{n+1}+n+1=4(a_n+b_n+n)$，$a_{n+1}-b_{n+1}+n+1=2(a_n-b_n+n)$，又 $a_1+b_1+1=4$，$a_1-b_1+1=2$，则数列 $\{a_n+b_n+n\}$ 是以 4 为首项，公比为 4 的等比数列，数列 $\{a_n-b_n+n\}$ 是以 2 为首项，公比为 2 的等比数列，所以 $a_n+b_n+n=4^n$ ①，$a_n-b_n+n=2^n$ ②，①②联立得 $2b_n=4^n-2^n$，所以 $b_n=2^{2n-1}-2^{n-1}$.

15. **【命题意图】**本题考查等差数列的性质、数列的和，考查运算求解能力，落实数学运算核心素养.

【名师指导】(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d\to a_6\xrightarrow{a_5}d\to$ 通项公式；(2)结合(1)$\to b_n=20-2n\to$ 分 $n\leqslant 10$ 和 $n\geqslant 11$ 两种情况讨论 $\to S_n$.

解：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

因为 $a_3+a_6+a_9=3a_6=33$，所以 $a_6=11$. (2分)

又因为 $a_5=9$，则 $a_6-a_5=d=2$， (4分)

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=a_5+2(n-5)=2n-1$. (5分)

(2)由(1)知，$b_n=19-a_n=20-2n$. (6分)

当 $n\leqslant 10$ 时，$|b_n|=b_n=20-2n$，

$S_n=\dfrac{n(b_1+b_n)}{2}=\dfrac{n(38-2n)}{2}=19n-n^2$； (8分)

当 $n\geqslant 11$ 时，$|b_n|=-b_n=2n-20$，

$S_n=S_{10}+(n-10)(2\times 11-20)+\dfrac{(n-10)(n-11)}{2}\times 2=19\times 10-10^2+2(n-10)+n^2-21n+110=n^2-19n+180$. (11分)

综上，$S_n=\begin{cases}19n-n^2, & n\leqslant 10,\\ n^2-19n+180, & n\geqslant 11.\end{cases}$ (13分)

16. **【命题意图】**本题考查函数的极值、导数的应用、不等式恒成立问题，考查推理论证能力、运算求解能力，落实逻辑推理、数学运算核心素养.

【名师指导】(1)已知条件 $\to f'(x)\to$ 分别令 $f'(x)>0$，$f'(x)<0\to$ 确定函数的单调性 $\to$ 判断函数的极值；(2)分离参数可得 $a\geqslant -e^x+\dfrac{1+\ln x}{x}\to$ 构造函数 $g(x)=-e^x+\dfrac{1+\ln x}{x}$，$x\in(0,+\infty)\to$ 函数 $g(x)$ 的最大值 $\to a$ 的取值范围.

解：(1)$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$， (1分)

令 $f'(x)>0$，解得 $x>-1$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增. (2分)

令 $f'(x)<0$,解得 $x<-1$,所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减. (3分)

所以函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值 $f(-1)=-\frac{1}{e}$,无极大值. (5分)

(2)不等式 $f(x)-\ln x+ax\geqslant 1$ 恒成立,

即 $xe^x-\ln x+ax-1\geqslant 0$,$x\in(0,+\infty)$ 恒成立,

不等式等价于 $a\geqslant -e^x+\frac{1+\ln x}{x}$,$x\in(0,+\infty)$ 恒成立, (7分)

令 $g(x)=-e^x+\frac{1+\ln x}{x}$,$x\in(0,+\infty)$, (8分)

$g'(x)=-e^x+\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln x)}{x^2}=-e^x+\frac{-\ln x}{x^2}=-\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$, (9分)

令 $h(x)=x^2e^x+\ln x$,$x\in(0,+\infty)$. (10分)

易知 $h'(x)=(2x+x^2)e^x+\frac{1}{x}>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,

所以函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $h\left(\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}-2}-1<0$,$h(1)=e>0$,

所以存在唯一 $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$,使得 $h(x_0)=x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$. (11分)

即 $x_0e^{x_0}=\frac{1}{x_0}\cdot\ln\frac{1}{x_0}$,

即 $x_0e^{x_0}=\ln\frac{1}{x_0}\cdot e^{\ln\frac{1}{x_0}}$,

即 $f(x_0)=f\left(\ln\frac{1}{x_0}\right)$,

由(1)知,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $x_0=\ln\frac{1}{x_0}=-\ln x_0$. (12分)

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时,$h(x)<0$,

则 $g'(x)>0$,则函数 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增;

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$h(x)>0$,

则 $g'(x)<0$,则函数 $g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减.

所以函数 $g(x)$ 在 x_0 处取得最大值 $g(x_0)=-e^{x_0}+\frac{1+\ln x_0}{x_0}=-1$. (14分)

所以 $a\geqslant -1$.

所以实数 a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$. (15分)

17.**【命题意图】**本题考查面面垂直的判定定理、平面与平面夹角的余弦值,考查推理论证能力、空间想象能力、运算求解能力,落实逻辑推理、直观想象、数学运算核心素养.

【名师指导】(1)已知条件→$OE\perp PD$→$AE\perp PD$→$PD\perp$平面 ACE→平面 $ACE\perp$平面 PAB;(2)已知条件→以 O 为坐标原点,$\overrightarrow{OD}$,$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向,建立空间直角坐标系→平面 PAB 和平面 PBC 的一个法向量→结合空间向量的夹角公式得解.

解:(1)证明:因为侧面 PAC 为等腰三角形,$\angle APC=\frac{2\pi}{3}$,$O$ 为 AC 的中点,

所以 $OP\perp AC$,$\angle APO=\frac{\pi}{3}$.

又 $OP=1$,所以 $AO=\sqrt{3}$,$AP=PC=2$. (2分)

若 $2\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{PD}$,则 E 为 PD 的中点.

连接 OE,因为 $OP=OD=1$,

所以 $OE\perp PD$. (3分)

因为 D 为 AB 的中点,$AB=4$,

所以 $AD=2$.所以 $PA=AD=2$.

连接 AE,所以 $AE\perp PD$. (4分)

又 $AE\cap OE=E$,AE,$OE\subset$平面 AOE,

所以 $PD\perp$平面 AOE.

即 $PD\perp$平面 ACE. (5分)

又 $PD\subset$平面 PAB,

所以平面 $ACE\perp$平面 PAB. (6分)

(2)因为 $AO^2+OD^2=(\sqrt{3})^2+1^2=2^2=AD^2$,

所以 $OD\perp AC$.

又 O 为 AC 的中点,D 为 AB 的中点,$OD=1$,

所以 $OD/\!/BC$,$BC=2$,$AC\perp BC$. (7分)

在$\triangle PAB$中，$PA=2$，$PB=2\sqrt{2}$，$AB=4$，

则$\cos\angle PAB=\dfrac{PA^2+AB^2-PB^2}{2PA\cdot AB}=\dfrac{4+16-8}{2\times2\times4}=\dfrac{3}{4}$.

在$\triangle PAD$中，由余弦定理易求$PD=\sqrt{2}$，

则$OD^2+OP^2=1^2+1^2=2=PD^2$，

则有$OP\perp OD$.

结合（Ⅰ）知$OP\perp AC$.

又因为$OD\cap AC=O$，AC，$OD\subset$平面ACD，

所以$OP\perp$平面ACD. （8分）

故以O为坐标原点，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OP}$的方向分别为x，y，z轴的正方向，建立空间直角坐标系，

则$D(1,0,0)$，$B(2,\sqrt{3},0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,1)$，

则$\overrightarrow{PB}=(2,\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{PC}=(0,\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{PD}=(1,0,-1)$， （9分）

设平面PAB的法向量为$\boldsymbol{u}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{u}=2x+\sqrt{3}y-z=0,\\ \overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{u}=x-z=0.\end{cases}$

令$z=\sqrt{3}$，则$x=\sqrt{3}$，$y=-1$，

即$\boldsymbol{u}=(\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$. （11分）

设平面PBC的法向量为$\boldsymbol{v}=(m,n,t)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{v}=2m+\sqrt{3}n-t=0,\\ \overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{v}=\sqrt{3}n-t=0.\end{cases}$

令$n=1$，则$t=\sqrt{3}$，$m=0$.

即$\boldsymbol{v}=(0,1,\sqrt{3})$， （13分）

则$\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}=\dfrac{2}{\sqrt{7}\times2}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. （14分）

易知平面PAB与平面PBC的夹角为锐角，

所以平面PAB与平面PBC夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

（15分）

18.**【命题意图】**本题考查独立事件的概率、条件概率，考查数据处理、运算求解能力，落实数据分析、数学运算核心素养.

【名师指导】(1)记事件→(ⅰ)该小组第一轮挑战成功的概率$\xrightarrow{\text{对立事件}}$第一轮挑战失败的概率；(ⅱ)结合(ⅰ)得$P_2\xrightarrow{\text{记事件}M,N}P(M)$，$P(N)$，$P(M|N)\xrightarrow{\text{条件概率公式}}$得解；(2)计算第二种作答方案下，两轮都挑战成功的概率→结合(1)(ⅱ)中采用第一种方案作答两轮都挑战成功的概率，两者进行比较→概率值大的即为选择的作答方案.

解：(1)记“甲在第i轮正确回答第j道题”为A_{ij}，“乙在第i轮正确回答第j道题”为B_{ij}，

采用第一种方案答题且甲先答题时该小组第一轮比赛至少正确作答2道题的概率为P_1，该小组在第二轮中至少正确作答2道题的概率为P_2， （2分）

(ⅰ)依题意，$P_1=P(A_{11}B_{12}A_{13})+P(\overline{A_{11}}B_{12}A_{13})+P(A_{11}\overline{B_{12}}A_{13})+P(A_{11}B_{12}\overline{A_{13}})$

$=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{5}$

$=\dfrac{12}{25}+\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}+\dfrac{3}{25}$

$=\dfrac{22}{25}$， （4分）

则采用第一种方案答题且甲先答题时，该小组在第一轮中就挑战失败的概率为$1-P_1=1-\dfrac{22}{25}=\dfrac{3}{25}$. （5分）

(ⅱ)结合(ⅰ)得

$P_2=P(B_{21}A_{22}B_{23})+P(\overline{B_{21}}A_{22}B_{23})+P(B_{21}\overline{A_{22}}B_{23})+P(B_{21}A_{22}\overline{B_{23}})$

$=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{5}$

$=\dfrac{32}{75}+\dfrac{8}{75}+\dfrac{16}{75}+\dfrac{8}{75}$

$=\dfrac{64}{75}$. （7分）

记“采用第一种方案答题且甲先答题时，该小组两轮都挑战成功”为事件M，

则 $P(M)=P_1\times P_2=\frac{22}{25}\times\frac{64}{75}$，（8 分）

记“采用第一种方案答题且甲先答题时，甲正确回答了 3 道试题”为事件 N，

$P(N)=P(A_{11})\times P(A_{13})\times P(A_{22})=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$

$=\frac{32}{75}$.（9 分）

又 $P(M|N)=(P(A_{11}B_{12}A_{13})+P(A_{11}\overline{B_{12}}A_{13}))\times(P(B_{21}A_{22}B_{23})+P(\overline{B_{21}}A_{22}B_{23})+P(B_{21}A_{22}\overline{B_{23}}))$

$=\left(\frac{12}{25}+\frac{4}{25}\right)\times\left(\frac{32}{75}+\frac{8}{75}+\frac{8}{75}\right)$

$=\frac{16}{25}\times\frac{48}{75}$，（11 分）

则 $P(N|M)=\frac{P(MN)}{P(M)}$

$=\frac{P(M|N)P(N)}{P(M)}$

$=\frac{\frac{16}{25}\times\frac{48}{75}\times\frac{32}{75}}{\frac{22}{25}\times\frac{64}{75}}$

$=\frac{64}{275}$.（12 分）

(2)选择第二种作答方案，甲在第一轮中至少正确作答 2 道题的概率 $P_甲=C_3^2\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{48}{125}+\frac{64}{125}=\frac{112}{125}$，（13 分）

乙在第二轮中至少正确作答 2 道题的概率 $P_乙=C_3^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{48}{125}+\frac{64}{125}=\frac{112}{125}$.

（14 分）

采用第二种作答方案，两轮都挑战成功的概率 $P=P_甲\times P_乙=\left(\frac{112}{125}\right)^2$.（15 分）

结合(1)(ⅱ)知 $P(M)=P_1\times P_2=\frac{22}{25}\times\frac{64}{75}$，

则 $\frac{P(M)}{P}=\frac{\frac{22}{25}\times\frac{64}{75}}{\left(\frac{112}{125}\right)^2}=\frac{275}{294}<1$，

所以选择第二种作答方案该小组获得“强国小能手”称号的可能性更大.（17 分）

19.【命题意图】本题考查圆锥曲线的综合，考查推理论证能力、运算求解能力，落实逻辑推理、数学运算核心素养.

【名师指导】(1)当 $\theta_1=\frac{\pi}{2}$ 时，$|AF_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，渐近线方程→$a^2$，$b^2$→双曲线的标准方程；(2)(ⅰ)设 $A(x_1,y_1)$，$B(-x_2,-y_2)$→根据对称性，找到点 B 的对称点 B'→将 $|AF_1|-2=|BF_2|$ 转化为 $|AF_1|-|B'F_1|=2$→联立直线 AF_1 与双曲线方程→得解；(ⅱ)要证明点 P 在以 F_1，F_2 为焦点的椭圆上，即证 $|PF_1|+|PF_2|$ 为定值且大于焦距即可，根据相似三角形的判定和性质，将原问题转化为 $\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|B'F_1|}$ 为定值问题即可得解.

解：(1)设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$c>0$，

当 $\theta_1=\frac{\pi}{2}$ 时，$|AF_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

即当 $x=-c$ 时，$|AF_1|=\frac{b^2}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，①（1 分）

又 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$ 为双曲线 C 的一条渐近线，

即 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，②（2 分）

联立①②可得 $b^2=1$，$a^2=2$，（3 分）

所以双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.（4 分）

(2)(ⅰ)设 $A(x_1,y_1)$，$B(-x_2,-y_2)$，

则 B 关于坐标原点的对称点 $B'(x_2,y_2)$ 在双曲线左支上.

因为 $\theta_1=\theta_2$，所以 $AF_1/\!/BF_2$.

根据对称性，知 A，F_1，B' 三点共线，（6 分）

且 $|B'F_1|=|BF_2|$.

又 $|AF_1|-2=|BF_2|$，

即 $|AF_1|-|B'F_1|=2$.（7 分）

设直线 AF_1 的方程为 $x=my-\sqrt{3}$，与 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 联立，

整理得 $(m^2-2)y^2-2\sqrt{3}my+1=0$，

则 $m^2-2\neq 0$，$\Delta=8m^2+8>0$ 恒成立。

则 $\begin{cases} y_1+y_2=\frac{2\sqrt{3}m}{m^2-2}, \\ y_1y_2=\frac{1}{m^2-2}, \end{cases}$ 且 $y_1y_2<0$，

即 $m^2-2<0$. (9分)

因为 $|AF_1|-|B'F_1|=2$，

所以 $\sqrt{1+m^2}|y_1|-\sqrt{1+m^2}|y_2|=2$.

即 $\sqrt{1+m^2}|y_1+y_2|=2$，

即 $\sqrt{1+m^2}\left|\frac{2\sqrt{3}m}{m^2-2}\right|=2$，

整理得 $2m^4+7m^2-4=0$，

即 $(2m^2-1)(m^2+4)=0$，

解得 $m^2=\frac{1}{2}<2$.

又 $|AF_1|-|B'F_1|=2$，

所以 $m=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以直线 BF_2 的方程为 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}y+\sqrt{3}$.

即 $2x+\sqrt{2}y-2\sqrt{3}=0$. (11分)

(ⅱ)证明：因为 $AF_1/\!/BF_2$，

则易证 $\triangle PAF_1\backsim\triangle PF_2B$， (12分)

则 $\frac{|PF_1|}{|BF_1|}=\frac{|AF_1|}{|AF_1|+|BF_2|}$，

$\frac{|PF_2|}{|AF_2|}=\frac{|BF_2|}{|AF_1|+|BF_2|}$. (13分)

所以 $|PF_1|+|PF_2|=\frac{|AF_1|\cdot|BF_1|}{|AF_1|+|BF_2|}+\frac{|BF_2|\cdot|AF_2|}{|AF_1|+|BF_2|}=\frac{|AF_1|\cdot(2\sqrt{2}+|BF_2|)}{|AF_1|+|BF_2|}+\frac{|BF_2|\cdot(2\sqrt{2}+|AF_1|)}{|AF_1|+|BF_2|}=2\sqrt{2}+\frac{2}{\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_2|}}=2\sqrt{2}+\frac{2}{\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|B'F_1|}}$. (14分)

又 $\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|B'F_1|}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left(\frac{1}{|y_1|}+\frac{1}{|y_2|}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\frac{|y_1-y_2|}{|y_1y_2|}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\frac{\sqrt{\frac{12m^2}{(m^2-2)^2}-\frac{4}{m^2-2}}}{\frac{1}{|m^2-2|}}=2\sqrt{2}$. (15分)

所以 $|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>2\sqrt{3}$.

即点 P 在以 F_1，F_2 为焦点的椭圆上， (16分)

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{\frac{25}{8}}+\frac{y^2}{\frac{1}{8}}=1$. (17分)