高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合，常用逻辑用语，函数，导数，三角函数，平面向量，复数，立体几何，数列。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $z\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$，则 $\bar{z}=$

A. $-1+\mathrm{i}$　　B. $-1-\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

2. 若“$x<-1$”是“$x\geqslant a$”的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围是

A. $(-1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)$

C. $[-1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1]$

3. 物理学家本·福特提出了一条统计学规律：在 $k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant 2)$ 进制的大量数据中，以 $n(n\in\mathbf{N}^*$，且 $n<k)$ 开头的数出现的概率为 $P_k(n)=\log_k\dfrac{n+1}{n}$，应用此规律可以检测经济数据是否存在造假或错误. 根据此规律，在 10 进制的大量随机数据中，以 1 开头的数出现的概率与以 8 开头的数出现的概率的比值约为（参考数据：$\lg 2\approx 0.301$，$\lg 3\approx 0.477$）

A. 5.9　　B. 4.8　　C. 3.7　　D. 2.6

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\left(2\cos\dfrac{11\pi}{6},2\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$，$\boldsymbol{b}=(2^{\log_4 3},(\sin 2)^0)$，则 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为

A. $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　B. $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$　　D. $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3+a_6=a_7+1$，$a_4=5$，则 $\{a_n\}$ 的前 25 项和为

A. 275　　B. 550　　C. 575　　D. 1 150

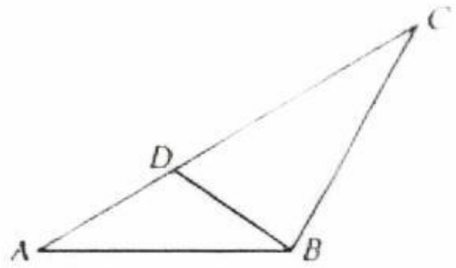
6. 一人骑车从 A 地出发向东骑行了 9 公里到达 B 地，然后由 B 地向南偏东 30°方向骑行了 6 公里到达 C 地，再由 C 地向北偏东 30°方向骑行了 16 公里到达 D 地，则由 A 到 D 的直线距离为

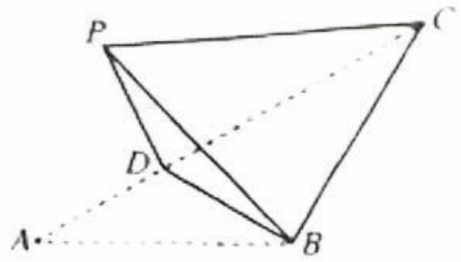
A. 20 公里　　B. $20\sqrt{3}$ 公里　　C. 26 公里　　D. $5\sqrt{19}$ 公里

7. 已知集合 $A=\{x\mid x-a<9\}$，$B=\{x\mid 0<x\leqslant 3\}$，若 $A\cup B=A$，则实数 a 的取值范围为

A. $(0,6)$　　B. $(-3,3)$　　C. $(3,6)$　　D. $(-\infty,6)$

8. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，$BA=BC=1$，$D$为边$AC$（不含端点）上一点，沿$BD$将$\triangle ABD$折起至$\triangle PBD$处，使得平面$PBD\perp$平面$BCD$，当点$P$到平面$BCD$的距离最大时，三棱锥$P-BCD$外接球的表面积为





A. 2π　　B. $\frac{7\pi}{3}$　　C. 3π　　D. 4π

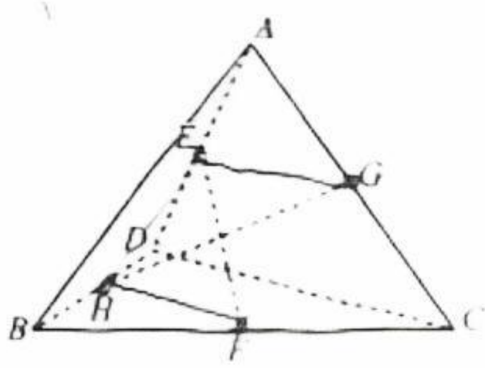
二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 已知公比为q的正项等比数列$\{a_n\}$的前3项和为21，$a_5-a_2=42$，则

A. $a_1=3$　　B. $q=2$

C. 数列$\{a_n\}$是递减数列　　D. $a_2a_4=576$

10. 如图，在四面体$ABCD$中，$AD\perp BC$，E,F,G,H分别是棱AD,BC,AC,BD的中点，若$EF=GH$，则



A. $AC\perp BD$

B. 四面体$ABCD$为正四面体

C. $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2=AC^2+BD^2$

D. 空间中恰好存在7个不同的平面，使得四面体$ABCD$的四个顶点到其中每个平面的距离均相等

11. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，则

A. 若$\sin 2B+\sin(B-A)=\sin C$，则$\triangle ABC$为等腰三角形

B. 若$\triangle ABC$为锐角三角形，则$\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)>0$

C. 若$\triangle ABC$的面积等于$\frac{1}{4}(a^2+b^2)$，则$\triangle ABC$为等腰直角三角形

D. 若$A,B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且$\sin^2A+\sin^2B=\sin C$，则$\triangle ABC$为直角三角形

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12. 在正四棱锥$P-ABCD$中，$PA=\sqrt{2}AB=4$，点E满足$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则$|\overrightarrow{PE}|$的最小值为_____.

13. 在$\triangle ABC$中，AD平分$\angle BAC$交BC于D，$AB=AD=4$，$CD=2\sqrt{3}$，则$AC=$_____.

14. 已知点$P(x,y)$的坐标满足$e^{x-y-1}-\ln(x-y)\leqslant 1$，$Q$为函数$f(x)=e^x$的图象上的动点，则$|PQ|$的最小值为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{12}\right)$，且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上不存在最小值.

(1)求 ω；

(2)若关于 x 的方程 $f(x)-a=0$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上恰有两个不同的实根，求 a 的取值范围.

16.（本小题满分 15 分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $2a^2+b^2+c^2=56$.

(1)若 $b=c$，$\cos A=\frac{1}{3}$，求 $\triangle ABC$ 外接圆的周长；

(2)求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

17.（本小题满分 15 分）

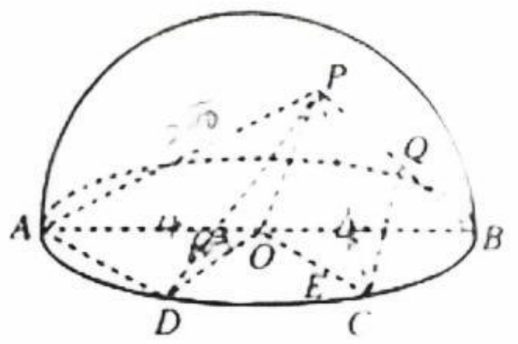
已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_na_{n+1}=2^n$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（本小题满分 17 分）

如图，AB 是半球 O 的直径，且 $AB=8$，C，D 是底面圆周上两点，P 为半球面上一点，$\angle AOD=\frac{\pi}{3}$.



（1）若 $AP=2\sqrt{10}$，OC 与 AP 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{8}$，Q 为 PB 的中点，

求 QC 的长度；

（2）若 C 与 D 在 AB 的同侧，且 $\angle BOC=\angle POC=\frac{\pi}{3}$.

（ⅰ）证明：$PB\perp$ 平面 PAD；

（ⅱ）若点 P 在平面 ABD 内的射影在 OC 上，求平面 PAD 与平面 POC 的夹角.

19.（本小题满分 17 分）

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若 $\exists x_0\in D$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线 l 与曲线 $y=f(x)$ 仅有一个公共点，则称切线 l 是曲线 $y=f(x)$ 的一条“纯切线”.

（1）证明：曲线 $y=\ln x-x$ 上的任意一点处的切线都是该曲线的一条“纯切线”；

（2）已知 $f(x)=x^3-2ax^2+3$，$x\in(0,b)$，对 $\forall b>0$ 及 $\forall x_0\in(0,b)$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线都为“纯切线”，求实数 a 的取值范围；

（3）已知 $f(x)=e^{2x}+2ce^x+3x(c<0)$，证明：曲线 $y=f(x)$ 存在无数条“纯切线”.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. D　由题意知 $z=\frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{-\mathrm{i}^2}{\mathrm{i}}+1=1-\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=1+\mathrm{i}$. 故选 D.

2. B　由题意知 $\{x|x<a\}\subsetneqq\{x|x<-1\}$，所以 $a<-1$. 故选 B.

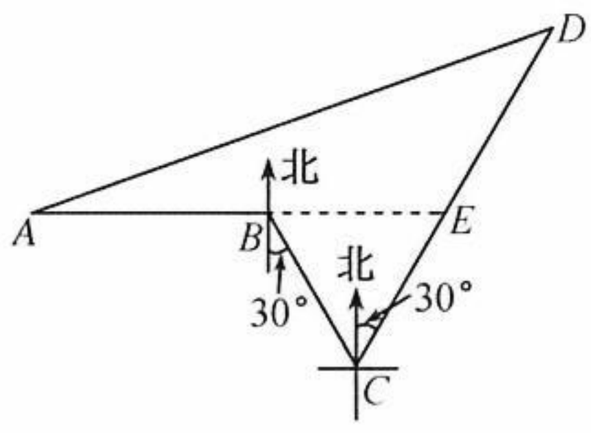
3. A　由题意知 $P_{10}(1)=\lg 2$，$P_{10}(8)=\lg\frac{9}{8}=2\lg 3-3\lg 2$，所以 $\frac{P_{10}(1)}{P_{10}(8)}=\frac{\lg 2}{2\lg 3-3\lg 2}\approx\frac{0.301}{2\times 0.477-3\times 0.301}\approx 5.9$.

故选 A.

4. C　由题意知 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},-1)$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1)$，所以 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}=\frac{2}{4}(\sqrt{3},-1)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$. 故选 C.

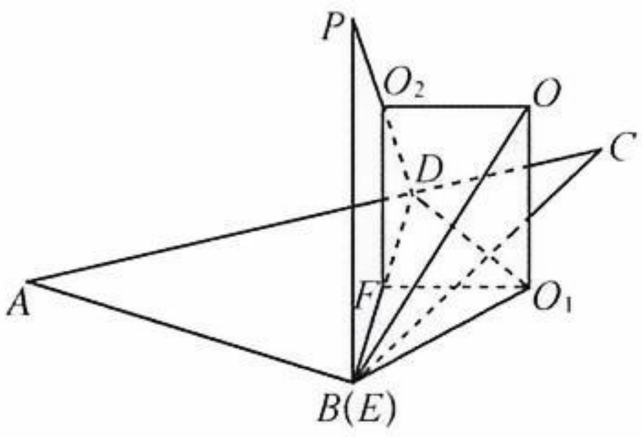
5. C　设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $a_3+a_6=a_7+1$，$a_4=5$，得 $2a_1+7d=a_1+6d+1$，$a_1+3d=5$，解得 $a_1=-1$，$d=2$，所以 $\{a_n\}$ 的前 25 项和为 $25\times(-1)+\frac{25\times(25-1)}{2}\times 2=575$. 故选 C.

6. D　如图，$AB=9$ km，$BC=6$ km，$CD=16$ km，延长 AB 交 CD 于点 E，由题意知 $\angle BCE=\angle CBE=60^\circ$，则 $\triangle BCE$ 为等边三角形，从而 $CE=BE=6$ km，$DE=10$ km，$\angle AED=120^\circ$. 由余弦定理，得 $AD^2=AE^2+DE^2-2AE\cdot DE\cos\angle AED=(9+6)^2+10^2-2(9+6)\times 10\times\left(-\frac{1}{2}\right)=5^2\times 19$，所以 $AD=5\sqrt{19}$. 故选 D.



7. A　由 $A\cup B=A$，得 $B\subseteq A$，所以 $\forall x\in(0,3]$，$x|x-a|<9$，即 $\forall x\in(0,3]$，$x-\frac{9}{x}<a<x+\frac{9}{x}$，所以 $\left(x-\frac{9}{x}\right)_{\max}<a<\left(x+\frac{9}{x}\right)_{\min}$. 因为函数 $y=x-\frac{9}{x}$ 在 $(0,3]$ 上单调递增，函数 $y=x+\frac{9}{x}$ 在 $(0,3]$ 上单调递减，所以 $\left(x-\frac{9}{x}\right)_{\max}=3-\frac{9}{3}=0$，$\left(x+\frac{9}{x}\right)_{\min}=3+\frac{9}{3}=6$，所以 a 的取值范围为 $(0,6)$. 故选 A.

8. B　因为 $\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，所以 $AC=\sqrt{BA^2+BC^2-2BA\cdot BC\cos\angle ABC}=\sqrt{3}$. 记 $\angle ABD=\theta\left(\theta\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)\right)$，作 $PE\perp BD$，交直线 BD 于 E，因为平面 $PBD\perp$ 平面 BCD，平面 $PBD\cap$ 平面 $BCD=BD$，$PE\subset$ 平面 PBD，所以 $PE\perp$ 平面 BCD，即 PE 的长度为点 P 到平面 BCD 的距离，且 $PE=PB\sin\theta=\sin\theta$，所以当 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $\angle ABD=\frac{\pi}{2}$ 时，$PE_{\max}=1$，此时 E 与 B 重合，且 $BD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，从而 $AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$CD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle BDC=\frac{2\pi}{3}$. 设 $\triangle BCD$ 的外心为点 O_1，BD 的中点为 F，则 $\triangle O_1BD$ 为正三角形，$O_1F\perp BD$，$O_1B=BD=\frac{\sqrt{3}}{3}$；设 O_2 为 PD 的中点，则 O_2 为 $\triangle PBD$ 的外心，$O_2F/\!/PB$，且 $O_2F=\frac{1}{2}PB=\frac{1}{2}$，所以 $O_2F\perp$ 平面 BCD. 过 O_1，O_2 分别作平面 BCD 和平面 PBD 的垂线，两垂线交于点 O，则四边形 OO_1FO_2 为矩形，O 为三棱锥 $P-BCD$ 外接球的球心，其半径为 $R=\sqrt{OO_1^2+O_1B^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{7}{12}}$，故三棱锥 $P-BCD$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\cdot\left(\sqrt{\frac{7}{12}}\right)^2=\frac{7\pi}{3}$. 故选 B.

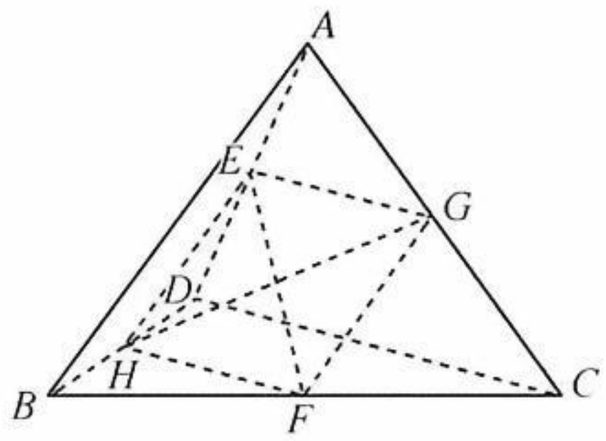


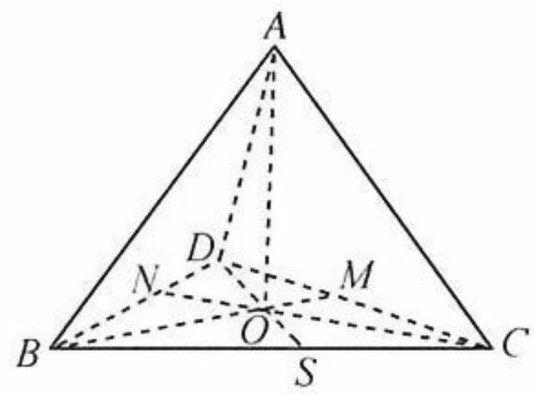
9. ABD　对于 AB，由题意得 $q>0$ 且 $q\neq 1$，$\begin{cases}\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=21,\\ a_1q^4-a_1q=42,\end{cases}$ 由 $\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=21$，得 $q^3-1=\frac{21(q-1)}{a_1}$，由 $a_1q^4-a_1q=42$，得 $q^3-1=\frac{42}{a_1q}$，所以 $\frac{21(q-1)}{a_1}=\frac{42}{a_1q}$，化简得 $q^2-q-2=0$，解得 $q=2$ 或 $q=-1$（舍），将 $q=2$ 代入 $\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=21$，解得

$a_1=3$，故 AB 正确；对于 C，由 AB 选项可知 $a_n=a_1q^{n-1}=3\times2^{n-1}$，所以数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，故 C 错误；对于 D，法一：由等比数列的性质，得 $a_2a_6=a_4^2$，因为 $a_4=3\times2^{4-1}=24$，所以 $a_2a_6=24^2=576$；

法二：因为 $a_n=3\times2^{n-1}$，所以 $a_2=6$，$a_6=3\times2^{6-1}=96$，所以 $a_2a_6=6\times96=576$，故 D 正确. 故选 ABD.

10. ACD　连接 EH，HF，FG，GE，则 $EG/\!/CD/\!/FH$，$EH/\!/AB/\!/FG$，所以四边形 $EHFG$ 为平行四边形，又 $EF=GH$，所以四边形 $EHFG$ 为矩形，所以 $EG\perp EH$，所以 $AB\perp CD$，





作 $AO\perp$ 平面 BCD，垂足为 O，连接 BO，CO，DO 并分别延长交 CD，BD，BC 于点 M，N，S，则 $CD\perp AO$，又 $AB\perp CD$，$AB\cap AO=A$，AB，$AO\subset$ 平面 ABM，所以 $CD\perp$ 平面 ABM，又 $BM\subset$ 平面 ABM，所以 $BM\perp CD$. 同理 $DS\perp BC$，所以 O 为 $\triangle BCD$ 的垂心，所以 $CN\perp BD$，易知 $BD\perp AO$，又 $CN\cap AO=O$，CN，$AO\subset$ 平面 AOC，所以 $BD\perp$ 平面 AOC，又 $AC\subset$ 平面 AOC，所以 $AC\perp BD$，故 A 正确；由条件知该四面体相对棱互相垂直，但没法说明各棱相等，故 B 错误；由上知 $AB\perp CD$，$AC\perp BD$，$AD\perp BC$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，即 $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=0$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，同理 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$，$AB^2+CD^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{AB}^2+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$，$AC^2+BD^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{AC}^2+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$，$AD^2+BC^2=\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AD}^2+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$，所以 $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2=AC^2+BD^2$，故 C 正确；四面体 $ABCD$ 的四个顶点到其中每个平面的距离均相等，这样的平面分两类：一类是平面两侧分别有 1 个顶点和 3 个顶点，这样的平面有 4 个，分别是过同一顶点出发的 3 条棱中点的平面；第二类是平面的两侧分别有两个顶点，这样的平面有 3 个，分别是过 4 条棱中点的平面，共有 7 个平面符合条件，故 D 正确. 故选 ACD.

11. BCD　对于 A，若 $\sin 2B+\sin(B-A)=\sin C$，则 $2\sin B\cos B=\sin(A+B)-\sin(B-A)$，所以 $2\sin B\cos B=2\sin A\cos B$，所以 $\cos B(\sin B-\sin A)=0$，又 $A,B\in(0,\pi)$，所以 $\cos B=0$，或 $\sin A=\sin B$，所以 $B=\frac{\pi}{2}$，或 $A=B$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形，故 A 错误；对于 B，若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则 $A+B>\frac{\pi}{2}$，所以 $A>\frac{\pi}{2}-B$，因为 $A,\frac{\pi}{2}-B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$，即 $\sin A-\cos B>0$，同理 $\sin B-\cos A>0$，所以 $\sin A-\cos A+\sin B-\cos B>0$，所以 $\sqrt{2}\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)>0$，即 $\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)>0$，故 B 正确；对于 C，由 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$，得 $\sin C=\frac{a^2+b^2}{2ab}\geqslant1$，所以 $\sin C=1$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，所以 $C=\frac{\pi}{2}$ 且 $a=b$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，故 C 正确；对于 D，由 $\sin^2A+\sin^2B=\sin C$，因为 $A,B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $A+B\in(0,\pi)$，当 $A+B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin A<\cos B$，$\sin B<\cos A$，所以 $\sin^2A+\sin^2B<\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin C$，与题设矛盾；当 $A+B\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$\sin A>\cos B$，$\sin B>\cos A$，所以 $\sin^2A+\sin^2B>\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin C$，与题设矛盾，所以 $A+B=\frac{\pi}{2}$，$C=\pi-(A+B)=\frac{\pi}{2}$，故 D 正确. 故选 BCD.

12. $2\sqrt{3}$　由 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，得点 E 在平面 $ABCD$ 上，$|\overrightarrow{PE}|$ 的最小值为点 P 到平面 $ABCD$ 的距离，设点 P 在底面 $ABCD$ 的射影为 O，则点 O 为正方形 $ABCD$ 的中心，连接 AC，则 O 为 AC 的中点，因为 $PA=\sqrt{2}AB=4$，所以 $OA=2$，所以 $PO=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，即 $|\overrightarrow{PE}|$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$.

13. 6　记$\angle BAD=\angle DAC=\alpha$，由$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABC}$，得$\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\alpha+\frac{1}{2}AD\cdot AC\sin\alpha=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 2\alpha$，即$\frac{1}{2}\times4\times4\sin\alpha+\frac{1}{2}\times4AC\sin\alpha=\frac{1}{2}\times4AC\sin 2\alpha$，所以$4+AC=2AC\cos\alpha$. 在$\triangle ADC$中，$DC^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cos\alpha$，即$12=16+AC^2-8AC\cos\alpha$，所以$12=16+AC^2-8\times\frac{4+AC}{2}$，整理，得$AC^2-4AC-12=0$，解得$AC=6$，或$AC=-2$(舍).

14. $\sqrt{2}$　令$x-y=t(t>0)$，则$e^{t-1}-\ln t\leqslant1$. 令$g(t)=e^{t-1}-\ln t$，则$g'(t)=e^{t-1}-\frac{1}{t}$，易知$g'(t)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$g'(1)=e^0-1=0$，所以当$t\in(0,1)$时，$g'(t)<0$；当$t\in(1,+\infty)$时，$g'(t)>0$，所以$g(t)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$g(t)\geqslant g(1)=1$，即$e^{t-1}-\ln t\geqslant1$(当且仅当$t=1$时等号成立)，又$e^{t-1}-\ln t\leqslant1$，所以$e^{t-1}-\ln t=1$，此时$t=1$，即$x-y=1$，所以点$P$在直线$x-y=1$上. 设$Q(x_0,e^{x_0})$，$f'(x)=e^x$，则$f'(x_0)=e^{x_0}$，因为过点$Q$与直线$x-y=1$平行的切线斜率为1，令$e^{x_0}=1$，得$x_0=0$，点$Q$的坐标为$(0,1)$，又点$Q(0,1)$到直线$x-y=1$的距离为$\frac{|0-1-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，结合$f(x)=e^x$图象的形态，可知$|PQ|_{\min}=\sqrt{2}$.

15. 解：(1)由题意，得$f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{12}\right)$，…… 2分

所以$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{12}\omega-\frac{\pi}{6}\right)=1$，…… 3分

所以$\frac{\pi}{12}\omega-\frac{\pi}{6}=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得$\omega=24k+2(k\in\mathbf{Z})$. …… 4分

又$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$上不存在最小值，所以$f(x)$的最小正周期$\frac{2\pi}{\omega}>\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$，

解得$0<\omega<6$，…… 6分

所以$\omega=2$，经验证符合条件. …… 7分

(2)由(1)得$f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

由$2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得$\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

由$\pi+2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant2\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得$\frac{7\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{13\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，…… 9分

所以$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{12}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{7\pi}{12},\pi\right)$上单调递增，…… 10分

又$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\pi=-1$，$f(\pi)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，…… 11分

要使关于x的方程$f(x)-a=0$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上恰有两个不同的实根，则需直线$y=a$与曲线$y=f(x)$，$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$的图象仅有两个公共点，所以$-1<a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以实数a的取值范围为$\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. …… 13分

16. 解：(1)因为$2a^2+b^2+c^2=56$，$b=c$，所以$a^2+b^2=28$，即$b^2=28-a^2$，…… 1分

由余弦定理，得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

因为$b=c$，$\cos A=\frac{1}{3}$，

所以$a^2=2b^2-\frac{2}{3}b^2=\frac{4}{3}b^2=\frac{4}{3}(28-a^2)$，解得$a=4$，…… 3分

由 $\cos A=\frac{1}{3}$，$A\in(0,\pi)$，得 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$． …… 4 分

设$\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 R，则 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{4}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=3\sqrt{2}$， …… 5 分

所以$\triangle ABC$ 的外接圆的周长为 $2\pi R=3\sqrt{2}\pi$. …… 6 分

(2)因为 $2a^2+b^2+c^2=56$，所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{56-3a^2}{2bc}$， …… 7 分

$\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{(bc)^2-b^2c^2\cos^2 A}=\frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2-(56-3a^2)^2}$， …… 9 分

由 $2a^2+b^2+c^2=56$，得 $bc\leqslant 28-a^2$（当且仅当 $b=c$ 时等号成立），…… 11 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2-(56-3a^2)^2}\leqslant\frac{1}{4}\sqrt{4(28-a^2)^2-(56-3a^2)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{-5a^4+112a^2}$

$=\frac{1}{4}\sqrt{-5\left(a^2-\frac{56}{5}\right)^2+\frac{56^2}{5}}\leqslant\frac{14\sqrt{5}}{5}$， …… 13 分

当 $a^2=\frac{56}{5}$ 且 $b^2=c^2=\frac{84}{5}$ 时等号成立，即$\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\frac{14\sqrt{5}}{5}$. …… 15 分

17. 解：(1) 因为 $a_na_{n+1}=2^n$，所以 $a_{n+1}a_{n+2}=2^{n+1}$，

所以 $\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}=2$， …… 2 分

所以 $a_1,a_3,a_5,\cdots,a_{2n-1},\cdots$ 成以 2 为公比的等比数列，

$a_2,a_4,a_6,\cdots,a_{2n},\cdots$ 也成以 2 为公比的等比数列，…… 3 分

又 $a_1=1$，所以 $a_2=2$，

所以 $a_{2n-1}=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$，$a_{2n}=2\times 2^{n-1}=2^n$， …… 5 分

所以 $a_n=\begin{cases}2^{\frac{n-1}{2}},n\text{ 为奇数},\\ 2^{\frac{n}{2}},n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ …… 6 分

(2)当 n 为偶数时，$\{a_n\}$ 中奇数项和偶数项均为 $\frac{n}{2}$ 项，…… 7 分

所以 $S_n=(a_1+a_3+\cdots+a_{n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_n)=\frac{1\times(1-2^{\frac{n}{2}})}{1-2}+\frac{2(1-2^{\frac{n}{2}})}{1-2}$

$=2^{\frac{n}{2}}-1+2\times 2^{\frac{n}{2}}-2=3\times 2^{\frac{n}{2}}-3$. …… 10 分

当 n 为奇数时，$\{a_n\}$ 中奇数项有 $\frac{n+1}{2}$，偶数项有 $\frac{n-1}{2}$， …… 11 分

所以 $S_n=(a_1+a_3+\cdots+a_n)+(a_2+a_4+\cdots+a_{n-1})=\frac{1\times(1-2^{\frac{n+1}{2}})}{1-2}+\frac{2(1-2^{\frac{n-1}{2}})}{1-2}$

$=2^{\frac{n+1}{2}}-1+2\times 2^{\frac{n-1}{2}}-2=2^{\frac{n+1}{2}}+2^{\frac{n+1}{2}}-3=2^{\frac{n+3}{2}}-3$. …… 14 分

所以 $S_n=\begin{cases}2^{\frac{n+3}{2}}-3,n\text{ 为奇数},\\ 3\times 2^{\frac{n}{2}}-3,n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ …… 15 分

18. (1)解：连接 OQ，则 $OQ/\!/AP$，且 $OQ=\sqrt{10}$，所以$\angle QOC$ 为 OC 与 AP 所成的角或其补角. …… 1 分

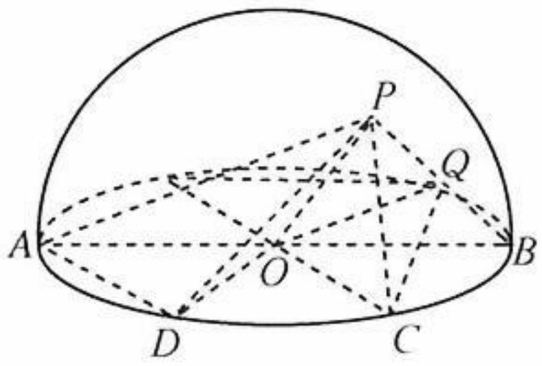
当$\angle QOC$ 为锐角时，

$QC=\sqrt{OC^2+OQ^2-2OC\cdot OQ\cos\angle QOC}=\sqrt{16+10-2\times 4\times\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{10}}{8}}=4$，…… 3 分

当$\angle QOC$ 为钝角时，

$QC=\sqrt{OC^2+OQ^2-2OC\cdot OQ\cos\angle QOC}=\sqrt{16+10-2\times 4\times\sqrt{10}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{8}\right)}=6$.

所以 $QC=4$ 或 $QC=6$. …… 5 分



(2)(ⅰ)证明:连接 DB,CD,BC,DB 与 OC 交于点 E,连接 PE,

因为 $\angle AOD=\angle BOC=\frac{\pi}{3}$,所以 $OB=BC=CD=OD$,

所以四边形 $OBCD$ 为菱形,所以 $OC\perp BD,OE=\frac{1}{2}OC=2$,…… 7 分

因为 $\angle POC=\frac{\pi}{3},OP=OC=4$,所以 $\triangle POC$ 为等边三角形,

所以 $PE\perp OC$,

又 $BD,PE\subset$ 平面 $PBD,BD\cap PE=E$,所以 $OC\perp$ 平面 PBD, …… 9 分

因为 $PB\subset$ 平面 PBD,所以 $OC\perp PB$,

因为 $\angle OAD=\angle BOC$,所以 $AD/\!/OC$,所以 $PB\perp AD$,

因为 AB 为球的直径,P 为球面上的点,所以 $PB\perp AP$,

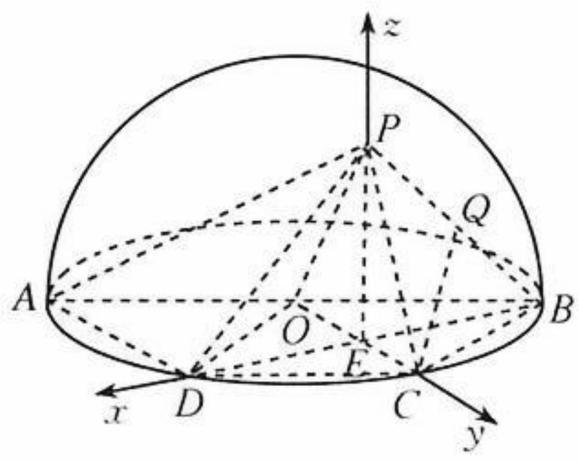
又 $AD,AP\subset$ 平面 PAD,且 $AD\cap AP=A$,所以 $PB\perp$ 平面 PAD. …… 11 分

(ⅱ)解:因为点 P 在底面圆的射影在 OC 上,所以平面 $POC\perp$ 平面 $ABCD$,

因为平面 $POC\cap$ 平面 $ABCD=OC$,

由(ⅰ)知,$PE\subset$ 平面 $POC,PE\perp OC$,所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$,

又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PE\perp BD$,且 $PE=4\times\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$. …… 12 分



所以 PE,BD,OC 两两垂直,以 E 为坐标原点,直线 ED,EC,EP 分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,则 $E(0,0,0),D(2\sqrt{3},0,0),O(0,-2,0),C(0,2,0)$,$P(0,0,2\sqrt{3})$,

所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OC}=(0,4,0),\overrightarrow{DP}=(-2\sqrt{3},0,2\sqrt{3})$. …… 13 分

设平面 PAD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4y=0,\\ -2\sqrt{3}x+2\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $x=1$,解得 $y=0,z=1$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$, …… 15 分

易知 $\overrightarrow{ED}=(2\sqrt{3},0,0)$ 为平面 POC 的一个法向量,

设平面 PAD 与平面 POC 的夹角为 θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{ED}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{ED}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

又 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$,即平面 PAD 与平面 POC 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$. …… 17 分

19.(1)证明:设 (m,n) 为曲线 $y=\ln x-x$ 上的任意一点,$y'=\frac{1}{x}-1$, …… 1 分

所以 $y'\Big|_{x=m}=\frac{1}{m}-1$,又 $n=\ln m-m$,

所以曲线 $y=\ln x-x$ 在点 (m,n) 处的切线方程为 $y-\ln m+m=\left(\frac{1}{m}-1\right)(x-m)$,

化简得 $y=\left(\frac{1}{m}-1\right)x+\ln m-1$. …… 3 分

令 $g(x)=\ln x-x-\left[\left(\frac{1}{m}-1\right)x+\ln m-1\right]=\ln x-\frac{1}{m}x-\ln m+1$,

则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{m}$,当 $x\in(0,m)$ 时,$g'(x)>0$;当 $x\in(m,+\infty)$ 时,$g'(x)<0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0,m)$ 上单调递增，在 $(m,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(m)=\ln m-1-\ln m+1=0$，

所以 $g(x)$ 有唯一零点 m，

所以 $\forall m>0$，曲线 $y=\ln x-x$ 在点 $(m,\ln m-m)$ 处的切线 l 与曲线 $y=\ln x-x$ 仅有一个公共点，

故曲线 $y=\ln x-x$ 上任意一点处的切线都是该曲线的一条“纯切线”. …… 5 分

(2)解：设 (x_0,y_0) 为曲线 $y=f(x)=x^3-2ax^2+3$ 上一点，$x_0\in(0,b)$，$(b>0)$.

所以 $y_0=f(x_0)=x_0^3-2ax_0^2+3$，

又 $f'(x)=3x^2-4ax$，所以 $f'(x_0)=3x_0^2-4ax_0$，

曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线 l 的方程为 $y-y_0=(3x_0^2-4ax_0)(x-x_0)$，

所以 $y=(3x_0^2-4ax_0)(x-x_0)+y_0$. …… 6 分

令 $h(x)=f(x)-[(3x_0^2-4ax_0)(x-x_0)+y_0]$

$=x^3-2ax^2+3-(x_0^3-2ax_0^2+3)-(3x_0^2-4ax_0)(x-x_0)$

$=(x-x_0)[x^2+x_0x+x_0^2-2a(x+x_0)-(3x_0^2-4ax_0)]$

$=(x-x_0)^2(x+2x_0-2a)$，…… 7 分

令 $h(x)=0$，得 $x=x_0$，或 $x=2a-2x_0$，

当 $a=0$ 时，$x=x_0>0$，$x=-2x_0<0$，满足题意；

若 l 为曲线 $y=f(x)$ 的一条“纯切线”，等价于 $\begin{cases}x_0\in(0,+\infty),\\ x_0=2a-2x_0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0\in(0,+\infty),\\ 2a-2x_0\notin(0,+\infty),\end{cases}$ …… 8 分

当 $a<0$ 时，$\begin{cases}x_0=\dfrac{2a}{3},\\ x_0\in(0,+\infty)\end{cases}$ 无解，或 $\begin{cases}x_0\in(0,+\infty),\\ 2a-2x_0\notin(0,+\infty),\end{cases}$ 即 x_0 为 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的唯一零点，此时 l 为曲线 $y=f(x)$ 的一条“纯切线”(切点横坐标为 $(0,+\infty)$ 内的任意数)；…… 9 分

当 $a>0$ 时，取 $b=\dfrac{3}{2}a$，$x_0=\dfrac{a}{2}\in(0,b)$，$2a-2x_0=2a-a=a\in(0,b)$，所以在 $(0,b)$ 上存在两个不同的解，不合题意.

综上，$a\in(-\infty,0]$. …… 11 分

(3)证明：设 (x_0,y_0) 为曲线 $y=f(x)$ 上一点，$f'(x)=2e^{2x}+2ce^x+3$，

$f'(x_0)=2e^{2x_0}+2ce^{x_0}+3$，$y_0=f(x_0)=e^{2x_0}+2ce^{x_0}+3x_0$，

故点 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$，

即 $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$，…… 13 分

令 $k(x)=f(x)-[f'(x_0)(x-x_0)+y_0]=f(x)-y_0-f'(x_0)(x-x_0)$，

…… 14 分

$k'(x)=f'(x)-f'(x_0)=2e^{2x}+2ce^x+3-(2e^{2x_0}+2ce^{x_0}+3)=2(e^x-e^{x_0})(e^x+e^{x_0}+c)$，

当 $e^{x_0}+c\geqslant 0$，即 $x_0\geqslant\ln(-c)$ 时，$e^x+e^{x_0}+c>0$ 恒成立，…… 15 分

此时当 $x<x_0$ 时，$k'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$k'(x)>0$，

所以 $k(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $k(x)_{\min}=k(x_0)=0$，所以 $k(x)$ 有唯一零点 x_0.

故切线 $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条“纯切线”，

所以对 $\forall c<0$，满足 $x_0\geqslant\ln(-c)$ 的 x_0 有无穷多个，故曲线 $y=f(x)$ 存在无数条“纯切线”. …… 17 分