厦门市2025届高三毕业班第四次质量检测

数 学 试 题

满分:150分　　考试时间:120分钟

考生注意:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号. 回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将答题卡交回.厦门中学生助手微信公众号

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 复数 $z=\frac{1}{2-\mathrm{i}}$,则 z 的虚部为

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. 1

2. 已知双曲线 C 的顶点为 A_1,A_2,虚轴的一个端点为 B,若 $\triangle A_1A_2B$ 为直角三角形,则 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

3. 在 $(1+2x)^n$ 的展开式中各二项式系数的和为32,则 x^3 的系数为

A. 10　　B. 40　　C. 80　　D. 120

4. 以边长为1的正三角形的一边所在直线为旋转轴,将该正三角形旋转一周得到的几何体的体积为 厦门中学生助手微信公众号

A. π　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

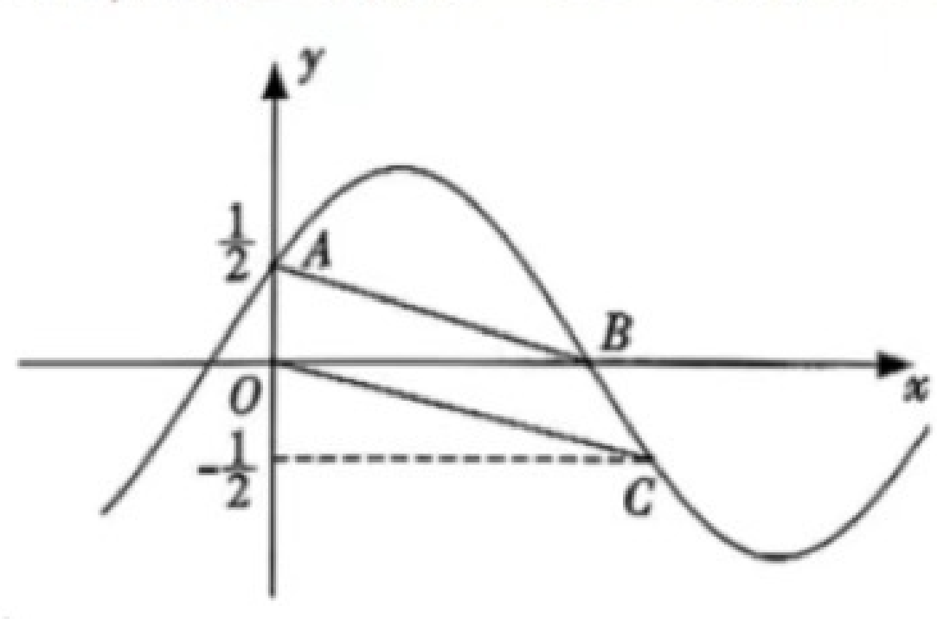
5. 在梯形 $ABCD$ 中,$AB /\!/ CD$,$AB=4$,$AD=2$,$CD=1$,$\angle DAB=60°$,则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=$

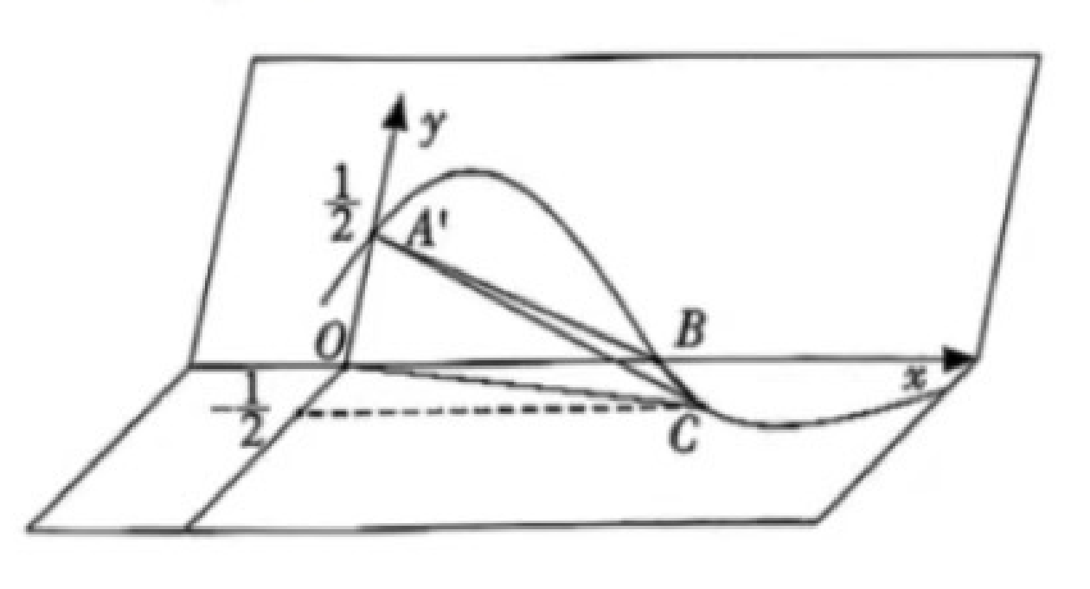
A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

6. 厦门某会场座位共有20排,第一排有15个座位,从第二排起,每一排都比前一排多两个座位. 现有一个200人的代表团来该会场参加会议,主办方需预留前 n 排座位给该代表团,则 n 的最小值为

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

7. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如下,将 $\triangle AOB$ 沿 OB 翻折至 $\triangle A'OB$,使得二面角 $A'-OB-C$ 为120°. 若 $|A'C|=\frac{\sqrt{19}}{2}$,则 $\omega=$





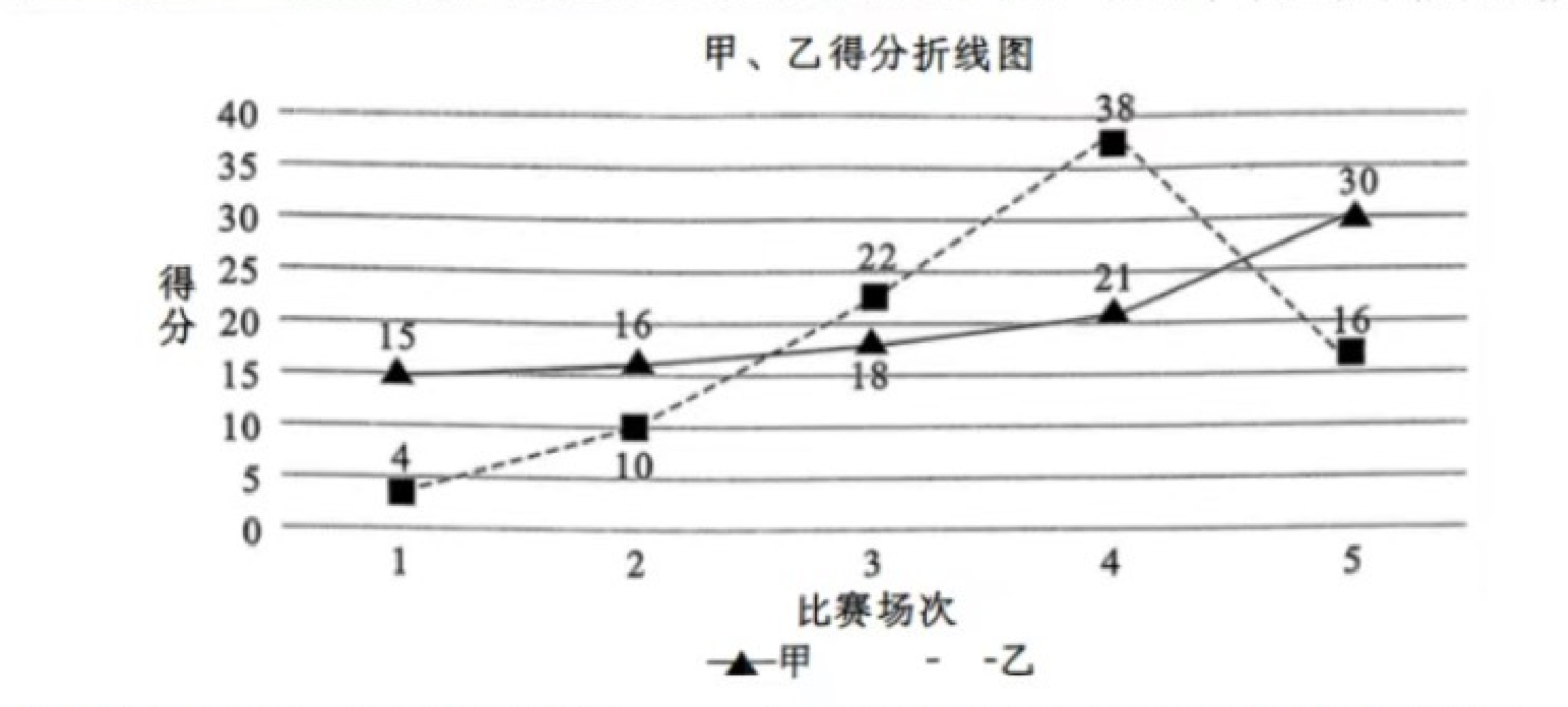
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. 1　　D. π

8. 已知集合 $A=\{x\mid e^{2x}<a\sqrt{x}\}$,$B=\{x\mid x^2-x<0\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,则 a 的取值范围是

A. $(-\quad,2]$　　B. $(-\quad,2\sqrt{e}]$　　C. $(-\quad,4]$　　D. $(-\quad,e^2]$

二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分. 在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

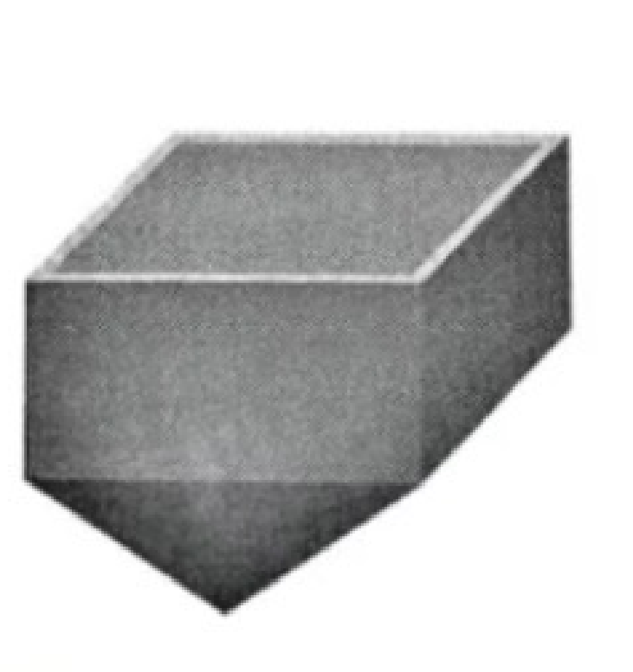
9. 甲、乙两名篮球运动员连续5场比赛的得分如下图所示,则 厦门中学生助手微信公众号

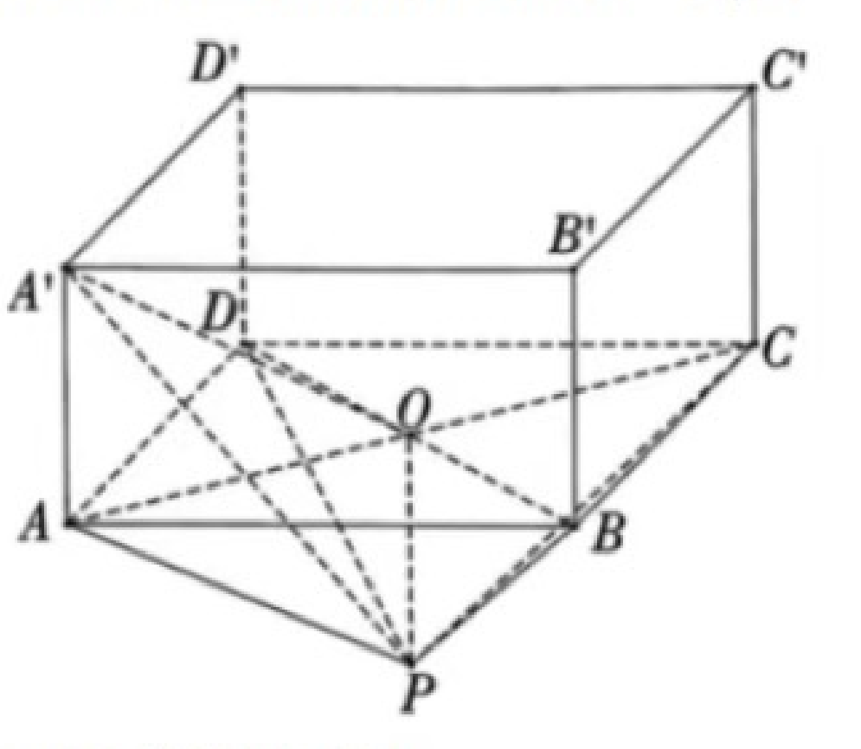


A. 甲得分的极差大于乙得分的极差　　B. 甲得分的平均数大于乙得分的平均数

C. 甲得分的中位数大于乙得分的中位数　　D. 甲得分的方差大于乙得分的方差

10. 如图,一个漏斗的上面部分可视为长方体 $ABCD-A'B'C'D'$,下面部分可视为正四棱锥 $P-ABCD$,O 为正方形$ABCD$的中心,两部分的高都是该正方形边长的一半,则





A. $A'O\perp AB$　　B. $A'O /\!/$ 平面 APD

C. 平面 $AA'P\perp$ 平面 BDP　　D. CC' 与 $A'P$ 为相交直线

11. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1,公比为 q 的递增等比数列,其前 n 项和为 S_n. 若对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,总存在 $m\in\mathbf{N}^*$,使得 $a_n\leqslant S_m<a_{n+1}$,则称 $\{a_n\}$ 是"可分等比数列",则

A. $\left\{-\frac{1}{2^n}\right\}$不是"可分等比数列"　　B. $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}$是"可分等比数列"

C. 若 $\{a_n\}$ 是"可分等比数列",则 $m=n$　　D. 若 $\{a_n\}$ 是"可分等比数列",则 $q\geqslant 2$

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2,x\leqslant 0,\\ \log_2 x,x>0.\end{cases}$ 若 $f(a)+f(-1)=2$,则 $a=$ ▲ .

13. A,B,C,D 四个人排成一排,当 A,B 相邻时,A 必须在 B 的右边,那么不同的排法共有 ▲ 种. 厦门中学生助手微信公众号

14. 已知直线 $l:y-2=0$ 与圆 $O:x^2+y^2=4$ 相切于点 T,A 是圆 O 上一动点,点 P 满足$PO\perp OA$,且以 P 为圆心,PA 为半径的圆恰与 l 相切,则 $\sin\angle PTO$ 的最大值为 ▲ .

四、解答题:本题共5小题,共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13分)

记$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知向量 $\boldsymbol{m}=(\sin C,\sqrt{3}\cos A-\sqrt{3})$,$\boldsymbol{n}=(a,c)$,且 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$. 厦门中学生助手微信公众号

(1)求 A;

(2)若 $a=2$,求$\triangle ABC$ 周长的最大值.

16. (15分)

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-(a-2)x-2a\ln x,a\in\mathbf{R}$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

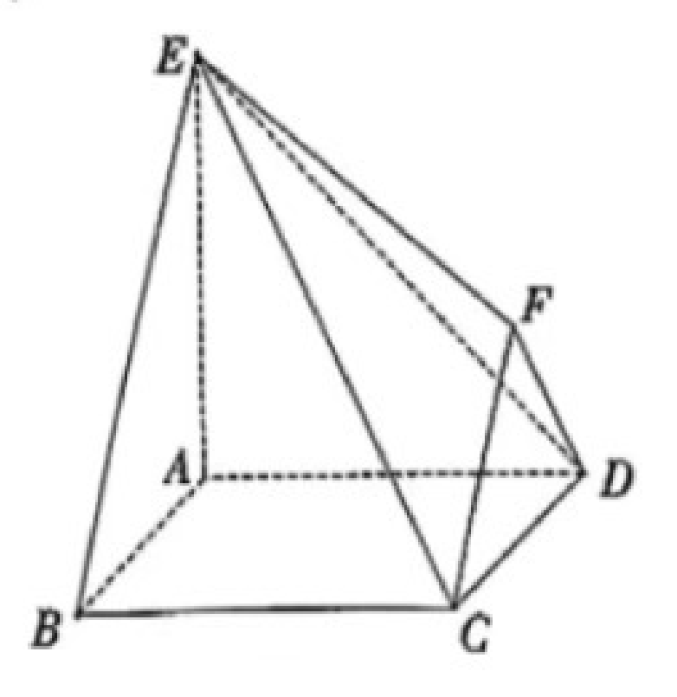
(2)当 $a>0$ 时,证明:$f(x)\geqslant\ln a-a^2+\frac{5}{2}$.

17. (15分)

如图,在多面体 $ABCDEF$ 中,$AE\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $CDF\perp$ 平面 $ABCD$,四边形 $ABCD$ 是正方形,$\triangle CDF$ 是正三角形,$AB=2$,$AE=2\sqrt{3}$.

(1)证明:$DF /\!/$ 平面 ABE; 厦门中学生助手微信公众号

(2)若直线 EF 与底面 $ABCD$ 的交点为 G,直线 AG 上是否存在点 N,使得平面 EBN 与平面ECD 的夹角为60°? 若存在,求 AN 的长;若不存在,请说明理由.



18. (17分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 $F(1,0)$,离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1)求 E 的方程;

(2)过点 $T(3,0)$且不垂直于 y 轴的直线与 E 交于 A,B 两点,直线AF 与 E 交于点 C(异于A).

(i)证明:$\triangle FBC$ 为等腰三角形; 厦门中学生助手微信公众号

(ii)若点 M 是$\triangle ABC$ 的外心,求$\triangle AMC$ 面积的最大值.

19. (17分)

在一个不透明的口袋中装有大小、形状完全相同的 n 个小球,将它们分别编号为 $1,2,3,\cdots,n$. 每次从口袋中随机抽取一个小球,记录编号后放回,直至取遍所有小球后立刻停止摸球. 记总的摸球次数为 X_n,其期望为 $E(X_n)$. 厦门中学生助手微信公众号

(1)求 $P(X_2=4)$与 $P(X_3=5)$;

(2)求 $E(X_2)$;

(3)证明:$E(X_n)>n\ln(n+1)$.

附:①若随机变量 X 的可能取值为 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$,

则 $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(k\cdot P(X=k))=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(k\cdot P(X=k))$;

厦门中学生助手微信公众号

②若随机变量 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$,则 $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}E(\xi_i)$.

厦门市 2025 届高三毕业班第四次质量检测参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

1~4：BACD　　5~8：CCBB

8．解析：$B=(0,1)$，则 $A\cap B=\varnothing$ 等价于 $e^{2x}<a\sqrt{x}$ 在 $(0,1)$ 上无解，即 $x\in(0,1)$ 时，$e^{2x}\ge a\sqrt{x}$ 恒成立，

所以 $a\le\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$，设 $h(x)=\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$，$h'(x)=\frac{\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{2x}}{x}=\frac{(4x-1)e^{2x}}{2x\sqrt{x}}$，可得 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 单调递减，

在 $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$ 单调递增，所以 $h_{\min}(x)=h\left(\frac{1}{4}\right)=2\sqrt{e}$，所以 $a\le2\sqrt{e}$．

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．BC　　10．BCD　　11．ACD 厦门中学生助手微信公众号

11．解析：若 $a_n=-\frac{1}{2^n}$，则 $a_1=-\frac{1}{2}$，$a_2=-\frac{1}{4}$，$a_3=-\frac{1}{8}$，因为 $a_n<0$，所以 $S_n\le a_1=-\frac{1}{2}$，又因为

$a_2=-\frac{1}{4}>-\frac{1}{2}$，$a_3=-\frac{1}{8}>-\frac{1}{2}$，所以不存在正整数 m，使得 $a_2\le S_m<a_3$，所以 $\left\{-\frac{1}{2^n}\right\}$ 不是“可分等比数列”，所以选项 A 正确；

若 $a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n$，则 $a_1=\frac{3}{2}$，$a_2=\frac{9}{4}$，$a_3=\frac{27}{8}$，所以 $S_1=\frac{3}{2}<a_2$，当 $n\ge2$ 时，$S_n\ge a_1+a_2=\frac{15}{4}>a_3$，

所以不存在正整数 m，使得 $a_2\le S_m<a_3$，所以 $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}$ 不是“可分等比数列”，所以选项 B 错误；

若 $a_1<0$，则有 $S_n\le a_1<a_2<a_3$，所以不存在正整数 m，使得 $a_2\le S_m<a_3$，所以 $a_1>0$，

因为 $\{a_n\}$ 是递增等比数列，所以 $q>1$，$a_n>0$，所以 $S_{n+1}>a_{n+1}$，

因为 $a_n\le S_m<a_{n+1}$，所以 $m<n+1$，即 $m\le n$．

下证：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，当且仅当 $m=n$ 时，$a_n\le S_m<a_{n+1}$．

反证法：假设存在正整数 n，使得当 $m\le n-1$ 时，$a_n\le S_m<a_{n+1}$，取满足条件的最小正整数 n_0，此时有 $m\le n_0-1$，使得 $a_{n_0}\le S_m<a_{n_0+1}$ 且 $a_{n_0-1}\le S_{n_0-1}<a_{n_0}$，则 $a_{n_0-1}\le S_{n_0-1}<a_{n_0}\le S_m$，即 $S_m>S_{n_0-1}$，即 $m>n_0-1$

与 $m\le n_0-1$ 矛盾．

所以对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，当且仅当 $m=n$ 时，$a_n\le S_m<a_{n+1}$，所以选项 C 正确；

下证：$q\ge2$．

由上可知 $m=n$，即 $a_n\le S_n<a_{n+1}$ 恒成立，只需 $S_n<a_{n+1}$，即 $q^n<q^n(q-1)+1$ 恒成立，

①当 $q\ge2$ 时，因为 $q^n(q-1)+1-q^n=q^n(q-2)+1>0$ 恒成立，所以 $q\ge2$ 符合要求；

②当 $1<q<2$ 时，因为 $q^n(q-1)+1-q^n=q^n(q-2)+1$，当 $n>\log_q\left(\frac{1}{2-q}\right)$ 时，

$q^n(q-2)+1<-1+1=0$，不符合题设要求．综上，$q\ge2$，所以选项 D 正确．

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分． 厦门中学生助手微信公众号

12．8　　13．18　　14．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

14．解析：设 $P(x,y)$，依题意得 $|y-2|=|PA|=\sqrt{x^2+y^2+4}$，化简可得 $x^2=-4y$，设 $P\left(x_0,-\frac{x_0^2}{4}\right)$，

则 $\tan\angle PTO=\left|\frac{1}{k_{TP}}\right|=\left|\frac{x_0}{2+\frac{x_0^2}{4}}\right|=\left|\frac{4}{\frac{8}{x_0}+x_0}\right|\le\frac{4}{2\sqrt{8}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，当且仅当 $\frac{8}{x_0}=x_0$，即 $x_0=\pm2\sqrt{2}$ 时取等，

所以 $\sin\angle PTO\le\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

四、解答题：共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤． 厦门中学生助手微信公众号

15．解：解法 1：

（1）因为 $\vec{m}\perp\vec{n}$，所以 $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，即 $a\sin C+c(\sqrt{3}\cos A-\sqrt{3})=0$，……1 分

由正弦定理得，$\sin A\sin C+\sin C(\sqrt{3}\cos A-\sqrt{3})=0$，

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C>0$，所以 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=\sqrt{3}$，……3 分

即 $\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，……4 分

又 $0<A<\pi$，所以 $\frac{\pi}{3}<A+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，（没有角的范围扣 1 分）

所以 $A+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$．……6 分

（2）因为 $a=2$，$A=\frac{\pi}{3}$，

由余弦定理得 $2^2=b^2+c^2-bc$，即 $(b+c)^2-3bc=4$，……8 分

所以 $(b+c)^2-4=3bc\le3\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$，……10 分

整理得 $(b+c)^2\le16$，即 $b+c\le4$，当且仅当 $b=c=2$ 取等，（没有写取等条件扣 1 分）……12 分

所以 $\triangle ABC$ 周长最大值为 6．……13 分

解法 2：

（1）因为 $\vec{m}\perp\vec{n}$，所以 $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，即 $a\sin C+c(\sqrt{3}\cos A-\sqrt{3})=0$，

由正弦定理得，$\sin A\sin C+\sin C(\sqrt{3}\cos A-\sqrt{3})=0$，

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C>0$，所以 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=\sqrt{3}$，……3 分

又 $\sin^2A+\cos^2A=1$，即 $3(1-\cos A)^2+\cos^2A=1$，……4 分

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$ 或 $\cos A=1$，又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$．……6 分

（2）由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $b=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin B$，$c=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin C$，……8 分

所以 $\triangle ABC$ 周长 $l=a+b+c$

$=2+\frac{4}{\sqrt{3}}(\sin B+\sin C)$

$=2+\frac{4}{\sqrt{3}}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)+\sin C\right]$……9 分

$=2+\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\right)$

$=2+4\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)$……11 分

所以 $l\le6$，当 $C+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $C=\frac{\pi}{3}$ 时取等，（没有写取等条件扣 1 分）

所以 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 6．……13 分

16．解法 1：厦门中学生助手微信公众号

（1）由题意得，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，……1 分

$f'(x)=x-(a-2)-\frac{2a}{x}$……2 分

$=\frac{x^2-(a-2)x-2a}{x}$

$=\frac{(x-a)(x+2)}{x}$，……3 分

①当 $a\le0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，……5 分

②当 $a>0$ 时，当 $0<x<a$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增．

综上，当 $a\le0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增．……7 分

（2）由（1）得，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(a)=\frac{1}{2}a^2-a(a-2)-2a\ln a=-\frac{1}{2}a^2+2a-2a\ln a$，……8 分

欲证明 $f(x)\ge\ln a-a^2+\frac{5}{2}$，只需证 $-\frac{1}{2}a^2+2a-2a\ln a\ge\ln a-a^2+\frac{5}{2}$，

即证 $\frac{1}{2}a^2+2a-(2a+1)\ln a-\frac{5}{2}\ge0$，……9 分

设 $g(a)=\frac{1}{2}a^2+2a-(2a+1)\ln a-\frac{5}{2}$，$a\in(0,+\infty)$，

$g'(a)=a+2-2\ln a-\frac{2a+1}{a}=a-\frac{1}{a}-2\ln a$，……10 分

设 $h(a)=a-\frac{1}{a}-2\ln a$，$a\in(0,+\infty)$，厦门中学生助手微信公众号

$h'(a)=1+\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}=\frac{(a-1)^2}{a^2}\ge0$，所以 $h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，……12 分

又 $h(1)=0$，……13 分

所以当 $a\in(0,1)$ 时，$h(a)<0$，$g'(a)<0$，$g(a)$ 单调递减，

当 $a\in(1,+\infty)$ 时，$h(a)>0$，$g'(a)>0$，$g(a)$ 单调递增，

所以 $g(a)\ge g(1)=0$，即 $\frac{1}{2}a^2+2a-(2a+1)\ln a-\frac{5}{2}\ge0$，

所以 $f(x)\ge\ln a-a^2+\frac{5}{2}$．……15 分

解法 2：（1）同解法 1；厦门中学生助手微信公众号

（2）由（1）得，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(a)=\frac{1}{2}a^2-a(a-2)-2a\ln a=-\frac{1}{2}a^2+2a-2a\ln a$，……8 分

欲证明 $f(x)\ge\ln a-a^2+\frac{5}{2}$，只需证 $-\frac{1}{2}a^2+2a-2a\ln a\ge\ln a-a^2+\frac{5}{2}$，

即证 $\frac{1}{2}a^2+2a-(2a+1)\ln a-\frac{5}{2}\ge0$，……9 分

因为 $2a+1>0$，只需证 $\frac{a^2+4a-5}{2(2a+1)}-\ln a\ge0$，

设 $g(a)=\frac{a^2+4a-5}{2(2a+1)}-\ln a$，$a\in(0,+\infty)$，……11 分

$g'(a)=\frac{a^2+a+7}{(2a+1)^2}-\frac{1}{a}=\frac{a^3-3a^2+3a-1}{a(2a+1)^2}=\frac{(a-1)^3}{a(2a+1)^2}$，……13 分

当 $a\in(0,1)$ 时，$g'(a)<0$，$g(a)$ 单调递减，当 $a\in(1,+\infty)$ 时，$g'(a)>0$，$g(a)$ 单调递增，

所以 $g(a)\ge g(1)=0$，即 $\frac{1}{2}a^2+2a-(2a+1)\ln a-\frac{5}{2}\ge0$，厦门中学生助手微信公众号

所以 $f(x)\ge\ln a-a^2+\frac{5}{2}$．……15 分

17．解法 1：

（1）取 CD 中点 M，连接 FM．因为 $\triangle CDF$ 是正三角形，所以 $FM\perp CD$，

又因为平面 $CDF\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $CDF\cap$ 平面 $ABCD=CD$，$FM\subset$ 平面 CDF，

所以 $FM\perp$ 平面 $ABCD$，……2 分

因为 $AE\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $AE\parallel FM$，……3 分

又因为 $FM\subset$ 平面 CDF，$AE\not\subset$ 平面 CDF（未写扣 1 分），所以 $AE\parallel$ 平面 CDF．……4 分

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $AB\parallel CD$．

又因为 $AB\not\subset$ 平面 CDF，$CD\subset$ 平面 CDF，所以 $AB\parallel$ 平面 CDF．

又因为 $AB\cap AE=A$，$AB\subset$ 平面 ABE，$AE\subset$ 平面 ABE，所以平面 $ABE\parallel$ 平面 CDF．……6 分

因为 $DF\subset$ 平面 CDF，所以 $DF\parallel$ 平面 ABE．……7 分

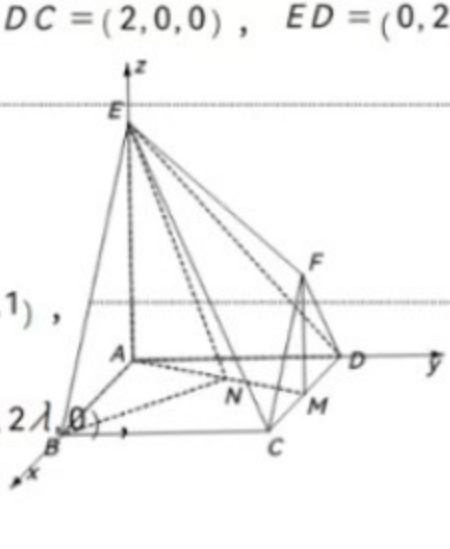
（若直接由线线平行到面面平行扣 2 分）

（2）因为 $AE\parallel FM$ 且 $FM=\sqrt{3}\ne AE$，所以四边形 $AMFE$ 为梯形，延长 EF 交 AM 的延长线于 G．$AM\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $G\in$ 平面 $ABCD$．……8 分

以 A 为原点，AB，AD，AE 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系．

$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$M(1,2,0)$，$E(0,0,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{ED}=(0,2,-2\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{BE}=(-2,0,2\sqrt{3})$，……9 分



设平面 ECD 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DC}=0\\\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{ED}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x_1=0\\2y_1-2\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，令 $z_1=1$，可得 $\overrightarrow{n_1}=(0,\sqrt{3},1)$，……10 分

设 $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AM}$，$\lambda\in\mathbf{R}$，则 $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{BA}+\lambda\overrightarrow{AM}=(\lambda-2,2\lambda,0)$，

设平面 EBN 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BE}=0\\\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BN}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BE}=-2x_2+2\sqrt{3}z_2=0\\\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BN}=(\lambda-2)x_2+2\lambda y_2=0\end{cases}$，

令 $z_2=2\lambda$，可得 $\overrightarrow{n_2}=(2\sqrt{3}\lambda,2\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,2\lambda)$，……12 分

则 $\left|\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{|6-3\lambda+2\lambda|}{2\cdot\sqrt{12\lambda^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)^2+4\lambda^2}}=\frac{|6-\lambda|}{2\cdot\sqrt{19\lambda^2-12\lambda+12}}=\cos60^\circ=\frac{1}{2}$，……13 分

解得 $\lambda=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$，……14 分

故 $|AN|=|\sqrt{5}\lambda|=\frac{2\sqrt{15}}{3}$．……15 分

解法 2：

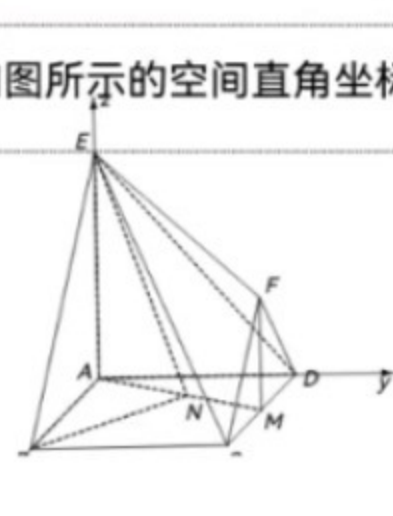
（1）取 CD 中点 M，连接 FM．因为 $\triangle CDF$ 是正三角形，所以 $FM\perp CD$，厦门中学生助手微信公众号

又因为平面 $CDF\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $CDF\cap$ 平面 $ABCD=CD$，$FM\subset$ 平面 CDF，

所以 $FM\perp$ 平面 $ABCD$，……2 分

以 A 为原点，AB，AD，AE 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系．

$D(0,2,0)$，$F(1,2,\sqrt{3})$，$E(0,0,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DF}=(1,0,\sqrt{3})$，……3 分



取平面 ABE 的法向量为 $\vec{n}=(0,1,0)$，……4 分

$\overrightarrow{DF}\cdot\vec{n}=0$，即 $\overrightarrow{DF}\perp\vec{n}$，……5 分

又 $DF\not\subset$ 平面 ABE（此条件未写扣 2 分），故 $DF\parallel$ 平面 ABE．……7 分

（2）同解法 1

解法 3：

（1）因为 $\triangle CDF$ 是正三角形，设 M 为 CD 中点，所以 $FM\perp CD$，$FM=\sqrt{3}$．

又因为平面 $CDF\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $CDF\cap$ 平面 $ABCD=CD$，$FM\subset$ 平面 CDF，

所以 $FM\perp$ 平面 $ABCD$，……2 分

因为 $AE\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $AE\parallel FM$．

设 Q 为 AB 中点，P 为 EB 中点，所以 $PQ\parallel AE$，$PQ=\sqrt{3}$．

所以 $PQ\underline{\parallel}FM$，所以四边形 $PQMF$ 为平行四边形．……4 分

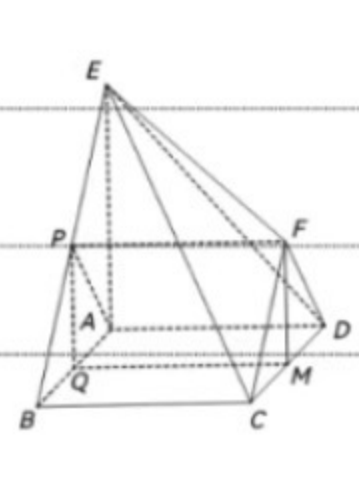
所以 $PF\underline{\parallel}QM\underline{\parallel}AD$，所以四边形 $ADFP$ 为平行四边形．

所以 $DF\parallel AP$，……5 分

又因为 $AP\subset$ 平面 ABE，$DF\not\subset$ 平面 ABE（此条件不写扣 1 分）．

所以 $DF\parallel$ 平面 ABE．……7 分

（若默认 $BP\underline{\parallel}CF$ 得到 $DF\parallel AP$ 扣 4 分）



（2）同解法 1．厦门中学生助手微信公众号

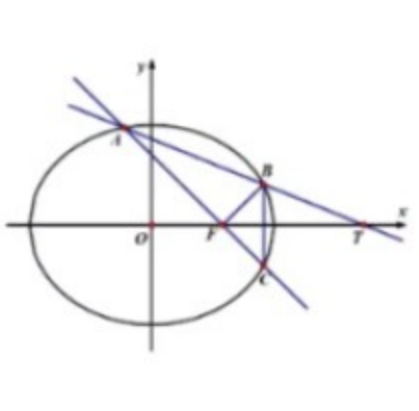
18．解法 1：

（1）由题 $c^2=a^2-b^2=1,e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，……2 分

所以 $a^2=3,b^2=2$，

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$．……4 分

（2）（i）设直线 AB 的方程为 $x=my+3$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，



联立 $\begin{cases}x=my+3\\\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，得 $(2m^2+3)y^2+12my+12=0$，

$\Delta=(12m)^2-48(2m^2+3)=48(m^2-3)>0$，得 $m^2>3$，

$y_1+y_2=-\frac{12m}{2m^2+3},y_1y_2=\frac{12}{2m^2+3}$，……6 分

若 $BF\perp x$ 轴，则 $B\left(1,\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，此时 AB 的斜率 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $m^2=3$（不合题意），

所以 AF,BF 的斜率均存在，

$k_{AF}+k_{BF}=\frac{y_1}{x_1-1}+\frac{y_2}{x_2-1}=\frac{y_1(x_2-1)+y_2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{2my_1y_2+2y_1+2y_2}{(x_1-1)(x_2-1)}$，……8 分

又 $my_1y_2+y_1+y_2=\frac{12m}{2m^2+3}-\frac{12m}{2m^2+3}=0$，……9 分

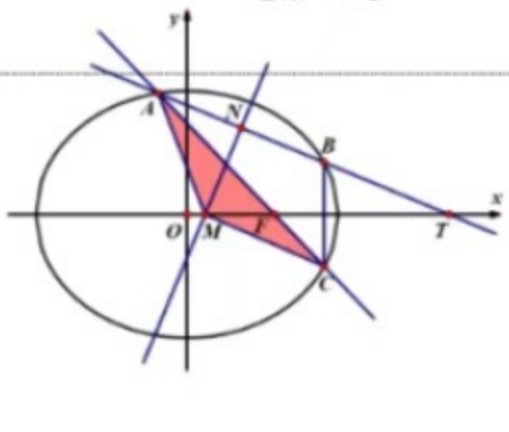
所以 $k_{AF}+k_{BF}=0$，即 $k_{CF}+k_{BF}=0$，

又因为 B,C 均在椭圆上，

如图，由椭圆对称性可知 $|FB|=|FC|$，即 $\triangle FBC$ 为等腰三角形．……10 分

（ii）设 AB 的中点为 $N(x_0,y_0)$，则 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{6m}{2m^2+3}$，$x_0=my_0+3=\frac{9}{2m^2+3}$，

所以 $N\left(\frac{9}{2m^2+3},-\frac{6m}{2m^2+3}\right)$，……11 分



所以 AB 的垂直平分线为 $y+\frac{6m}{2m^2+3}=-m\left(x-\frac{9}{2m^2+3}\right)$……(1)

将 $y=0$ 代入方程(1)得 $x=\frac{3}{2m^2+3}$，所以 $M\left(\frac{3}{2m^2+3},0\right)$，……12 分

$\triangle AMC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|MF||y_1+y_2|=\frac{1}{2}\left|1-\frac{3}{2m^2+3}\right|\left|\frac{12m}{2m^2+3}\right|=\frac{12|m|^3}{(2m^2+3)^2}$，……14 分

设 $f(t)=\frac{12t^3}{(2t^2+3)^2}$，$t=|m|>\sqrt{3}$，厦门中学生助手微信公众号

$f'(t)=12\times\frac{3t^2(2t^2+3)^2-8t(2t^2+3)t^3}{(2t^2+3)^4}=\frac{12t^2(9-2t^2)}{(2t^2+3)^3}$，

当 $\sqrt{3}<t<\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，$f'(t)>0$，当 $t>\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，$f'(t)<0$，

所以 $f(t)$ 在 $\left(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 单调递增，在 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 单调递减，……16 分

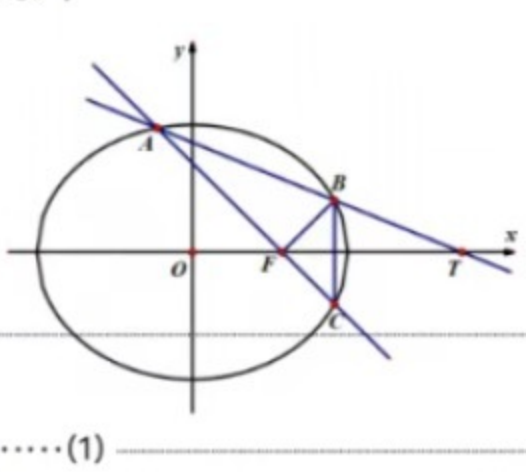
所以当 $t=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，$f(t)$ 取得最大值 $f\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{9\sqrt{2}}{16}$，

所以 $\triangle AMC$ 面积的最大值为 $\frac{9\sqrt{2}}{16}$．……17 分

解法 2：

（1）同解法 1；

（2）（i）设直线 AB 的方程为 $x=my+3$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，



联立 $\begin{cases}x=my+3\\\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，得 $(2m^2+3)y^2+12my+12=0$，

$\Delta=(12m)^2-48(2m^2+3)=48(m^2-3)>0$，得 $m^2>3$，

$y_1+y_2=-\frac{12m}{2m^2+3},y_1y_2=\frac{12}{2m^2+3}$，……6 分

设 $B'(x_2,-y_2)$，则直线 AB' 的方程为 $y-y_1=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$……(1)……7 分

将 $y=0$ 代入方程(1)得 $x=x_1-\frac{(x_1-x_2)y_1}{y_1+y_2}=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{2my_1y_2}{y_1+y_2}+3=1$，

所以 A,F,B' 三点共线，即 B' 与 C 重合，……9 分

由椭圆对称性可知 $|FB|=|FC|$，即 $\triangle FBC$ 为等腰三角形．……10 分

（ii）同解法 1；

解法 3：

（1）同解法 1；

（2）（i）设直线 AC 的方程为 $x=ny+1$，$A(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，则 $n=\frac{x_1-1}{y_1}$，

联立 $\begin{cases}x=ny+1\\\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，整理得 $(2n^2+3)y^2+4ny-4=0$，厦门中学生助手微信公众号

$\Delta>0$，$y_1+y_2=-\frac{4n}{2n^2+3},y_1y_2=-\frac{4}{2n^2+3}$，……6 分

所以 $y_2=-\frac{4}{(2n^2+3)y_1}=-\frac{4}{\left(2\left(\frac{x_1-1}{y_1}\right)^2+3\right)y_1}$，整理得 $y_2=-\frac{4y_1}{2(x_1-1)^2+3y_1^2}=-\frac{y_1}{2-x_1}$，……7 分

设直线 AB 的方程为 $x=my+3$，$A(x_1,y_1),B(x_3,y_3)$，则 $m=\frac{x_1-3}{y_1}$，

联立 $\begin{cases}x=my+3\\\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，得 $(2m^2+3)y^2+12my+12=0$，$y_1+y_3=-\frac{12m}{2m^2+3},y_1y_3=\frac{12}{2m^2+3}$，

所以 $y_3=\frac{12}{(2m^2+3)y_1}=\frac{12y_1}{2(x_1-3)^2+3y_1^2}=\frac{12y_1}{24-12x_1}=\frac{y_1}{2-x_1}$，

所以 $y_2+y_3=0$，……9 分

由椭圆对称性可知 $|FB|=|FC|$，即 $\triangle FBC$ 为等腰三角形．……10 分

（ii）设 AC 的中点为 $K(x_0,y_0)$，则 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{2n}{2n^2+3}$，$x_0=ny_0+1=\frac{3}{2n^2+3}$，

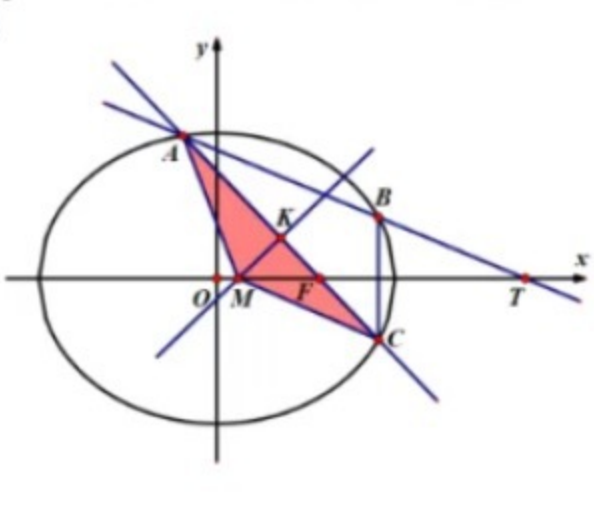
所以 $K\left(\frac{3}{2n^2+3},-\frac{2n}{2n^2+3}\right)$，……11 分

所以 AC 的垂直平分线为 $y+\frac{2n}{2n^2+3}=-n\left(x-\frac{3}{2n^2+3}\right)$……(1)，

将 $y=0$ 代入方程(1)得 $x=\frac{1}{2n^2+3}$，所以 $M\left(\frac{1}{2n^2+3},0\right)$，……12 分

所以 $\triangle AMC$ 的面积

$S=\frac{1}{2}|MF||y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times\left|1-\frac{1}{2n^2+3}\right|\times\frac{4\sqrt{3}\sqrt{n^2+1}}{2n^2+3}=\frac{4\sqrt{3}(\sqrt{n^2+1})^3}{(2n^2+3)^2}$，……14 分



令 $t=\sqrt{n^2+1}$，则 $n^2=t^2-1$，$S=\frac{4\sqrt{3}t^3}{(2t^2+1)^2}$，

令 $g(t)=\frac{4\sqrt{3}t^3}{(2t^2+1)^2}$，$t>1$，厦门中学生助手微信公众号

$g'(t)=\frac{4\sqrt{3}\left[3t^2(2t^2+1)^2-8t(2t^2+1)t^3\right]}{(2t^2+1)^4}=\frac{4\sqrt{3}t^2(3-2t^2)}{(2t^2+1)^3}$，

所以 $1<t<\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，$g'(t)>0$，当 $t>\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，$g'(t)<0$，

所以 $g(t)$ 在 $\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，……16 分

所以当 $t=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，$g(t)$ 取得最大值 $g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{9\sqrt{2}}{16}$，厦门中学生助手微信公众号

所以 $\triangle AMC$ 面积的最大值为 $\frac{9\sqrt{2}}{16}$．……17 分

19．解：（1）$X_2=4$ 表示袋中共两个球，前 3 次摸出同一个球，第 4 次才摸出另一个球，

即 $P(X_2=4)=\frac{2}{2^4}=\frac{1}{8}$，……2 分

$X_3=5$ 表示袋中共 3 个球，前 4 次摸出的是两个不同编号的球，第 5 次才摸出最后一个编号的球，第 5 次才摸出第三个编号的球，则前 4 次摸球中，另外两个编号球各至少摸到一次，

则 $P(X_3=5)=\frac{3\times(2^4-2)}{3^5}=\frac{14}{81}$．……4 分

（另解：以第二个编号球第一次出现的位置分类，如若出现在第 2 个位置，则第 3、4 两个位置不出现最后一个编号球即可，先确定第一个位置和最后一个位置球的编号，共有 A_3^2 种，则此类情况有 $A_3^2\cdot2^2=24$ 种，则 $P(X_3=5)=\frac{A_3^2\times(2^2+2^1+2^0)}{3^5}=\frac{14}{81}$）

（2）依题意可得：$X_2=2,3,4,5,\ldots\ldots,m,\ldots\ldots$，厦门中学生助手微信公众号

则 $P(X_2=k)=\frac{2\times1}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}}$，$k\ge2$，……6 分

所以 $E(X_2)=\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{k}{2^{k-1}}\right)=\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{k}{2^{k-1}}\right)$，……7 分

设 $S_m=\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{k}{2^{k-1}}\right)=\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\ldots\ldots+\frac{m}{2^{m-1}}$，

$\frac{1}{2}S_m=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots\ldots+\frac{m-1}{2^{m-1}}+\frac{m}{2^m}$，厦门中学生助手微信公众号

作差可得 $\frac{1}{2}S_m=\frac{2}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{m-1}}-\frac{m}{2^m}=1+\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{m-2}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{m}{2^m}=\frac{3}{2}-\frac{m+2}{2^m}$，

所以 $S_m=3-\frac{m+2}{2^{m-1}}$，……9 分

所以 $E(X_2)=\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{k}{2^{k-1}}\right)=\lim_{m\to+\infty}\left(3-\frac{m+2}{2^{m-1}}\right)=3$．……10 分

（3）记恰好已经记录得到 $i-1$（$i\in\mathbf{N}^*$）个不同的编号后，开始继续摸球，直到记录到余下未录得的 $n-(i-1)$ 个球之一的第 i 个新的编号所需要的摸球次数为 ξ_i，则 $X_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，其中 $i=1,2,\quad,n$，……11 分

$P(\xi_i=k)=\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{i-1}{n}\right),k=1,2,3,\ldots\ldots,n,\ldots\ldots$，……12 分

$E(\xi_i)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(k\cdot\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\right)=\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\sum_{k=1}^{+\infty}\left(k\cdot\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\right)$，

设 $T_m=\sum_{k=1}^{m}\left(k\cdot\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\right)=1\times\left(\frac{i-1}{n}\right)^0+2\times\left(\frac{i-1}{n}\right)^1+\quad+m\times\left(\frac{i-1}{n}\right)^{m-1}$，

$\frac{i-1}{n}T_m=1\times\left(\frac{i-1}{n}\right)^1+2\times\left(\frac{i-1}{n}\right)^2+\quad+(m-1)\times\left(\frac{i-1}{n}\right)^{m-1}+m\times\left(\frac{i-1}{n}\right)^m$，

作差可得：

$\left(1-\frac{i-1}{n}\right)T_m=\left(\frac{i-1}{n}\right)^0+\left(\frac{i-1}{n}\right)^1+\quad+\left(\frac{i-1}{n}\right)^{m-1}-m\left(\frac{i-1}{n}\right)^m=\frac{1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^m}{1-\frac{i-1}{n}}-m\left(\frac{i-1}{n}\right)^m$，……13 分

所以 $E(\xi_i)=\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)T_m=\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^m}{1-\frac{i-1}{n}}-m\left(\frac{i-1}{n}\right)^m\right)=\frac{n}{n-i+1}$，

所以 $E(X_n)=E\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n-i+1}$，

即 $E(X_n)=n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}\right)$，……15 分

厦门中学生助手微信公众号

令 $f(x)=x-\ln(x+1)$，$f'(x)=\frac{x}{x+1}$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

所以 $f\left(\frac{1}{n}\right)>f(0)=0$，即 $\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$，……16 分

所以 $1+\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}>\ln2-\ln1+\ln3-\ln2+\quad+\ln(n+1)-\ln(n)=\ln(n+1)$，

所以 $E(X_n)=n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}\right)>n\ln(n+1)$．……17 分

【说明】随着录得的编号的个数 i 从 1 增加到 n，摸球总次数也在不断增加。将摸球试验按照记录得到的不同编号的个数 i 分成 n 个环节（小试验），每一个环节中相应的 ξ_i 即为当且仅当录得一个新的编号时所需摸球次数，则 $X_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，且 ξ_i 均服从几何分布，即在大试验的第 i 个环节中，在当已经记录了 $i-1$ 个编号后，继续开始摸球，直到出现一个新的编号时，若摸球次数为 k，则前 $k-1$ 次均录得旧编号，且每次摸球成功的概率为 $p_1=\frac{i-1}{n}$，而第 k 次录得新编号的概率为 $p_2=1-\frac{i-1}{n}$．则 $P(\xi_i=k)=\left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)$，$i=1,2,3,\ldots,n,\ldots$．