

福建 9 月高三数学

全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答,写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 选择题用 2B 铅笔在答题卡上把所选答案的标号涂黑;非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答;字体工整,笔迹清楚。
4. 考试结束后,请将试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 < 1\}$, $B = \{x | 0 < 2x < 4\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $(-1, 1)$ B. $(0, 2)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, 2)$

2. 复数 $z = \frac{1-i}{1+3i}$ 的实部为

- A. $-\frac{2}{5}$ B. $-\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

3. 某研究所研究耕种深度 x (单位: cm) 与一种农作物每公顷产量 y (单位: t) 的关系, 所得数据资料如下表:

耕种深度 x /cm	3	4	6	7
每公顷产量 y /t	5	6	8	9

发现 y 与 x 之间具有线性相关关系, 其经验回归方程为 $\hat{y} = 0.6x + a$, 据此计算样本点 $(7, 9)$ 处的残差为

- A. -0.8 B. -0.7 C. 0.6 D. 0.8

4. 将英文单词“mommy”的字母组合, 能得到不同字母排法的种数为

- A. 20 B. 25 C. 30 D. 35

5. 已知点 P 是抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上任意一点, F 是抛物线 C 的焦点, 点 $Q(8, 5)$, 则 $|PF| + |PQ|$ 的最小值为

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x < 0 \\ e^x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(m - x^2) + f(mx) < 0$ 恒成立, 则实数 m

的取值范围为

A. $(-4, 0)$

B. $(-2, 0)$

C. $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

D. $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 是首项和公比均为 3 的等比数列, 在数列 $\{a_n\}$ 的任意相邻两项 a_k 与 a_{k+1} (其中 $k \in \mathbf{N}^*$) 之间插入 2^k 个 1, 使它们和原数列的项构成一个新数列 $\{b_n\}$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 50 项和 $S_{50} =$

A. 402

B. 404

C. 408

D. 412

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F_1 , 点 P 为双曲线 C 上位于第一象限内的一点, 直线 PF_1 与双曲线 C 的左支相交于点 Q , $|F_1Q| = a$ 且 $\overrightarrow{F_1Q} = \frac{1}{4}\overrightarrow{F_1P}$, 则双曲线 C 的离心率为

A. $\frac{3}{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{30}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{33}}{3}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $C = \frac{2\pi}{3}$, $c = \sqrt{7}$, $b = a + 1$, 则

A. $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 $\frac{\sqrt{7}}{3}$

B. $a = 1$

C. $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$

D. $\sin B = 2\sin A$

10. 下列说法正确的是

A. 数据 1, 3, 4, 7, 9, 12, 14, 21 的 25% 分位数为 3

B. 若随机变量 X 服从正态分布 $N(4, \sigma^2)$, 且 $P(2 < X < 4) = 0.23$, 则 $P(X > 6) = 0.27$

C. 若随机变量 X 服从二项分布 $B(12, \frac{1}{3})$, $Y = 3X + 1$, 则 $\frac{D(Y)}{E(Y)} = \frac{24}{13}$

D. 假设某市场供应的灯泡中, 甲厂产品占 40%, 乙厂产品占 60%, 甲厂产品的合格率是 80%, 乙厂产品的合格率是 60%. 在该市场中随机购买一个灯泡, 则这个灯泡是合格品的概率为 0.64

11. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{25(1-x^2)}{16(1+x^2)}$, 则下列说法正确的是

A. 函数 $f(x)$ 的减区间为 $(\frac{1}{2}, 2)$

B. 若函数 $g(x) = f(x) - t$ 有 3 个零点, 则 $\ln 2 - \frac{7}{8} < t < \frac{7}{8} - \ln 2$

C. $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0$

D. 函数 $f(x)$ 有 3 个零点 $x_1, 1, x_2, 0 < x_1 < 1 < x_2$ 且 $x_1 x_2 = 1$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知向量 a, b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $|a| = 2, a \perp (a - 2b)$, 则 $|a - 3b| =$ _____.

13. 已知直线 $l: y = m(x+1)$, 圆 $M: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$, 若圆 M 被直线 l 分成的两段圆弧弧长之比为 3:1, 则 $m =$ _____.

14. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, $\triangle PAB$ 是等边三角形, 则直线 PC 与底面 $ABCD$ 所成的角的正切值的最大值为 _____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = (x^2 - 2x + a)e^x$ 的极小值点为 $x = 1$.

(1) 求实数 a 的值;

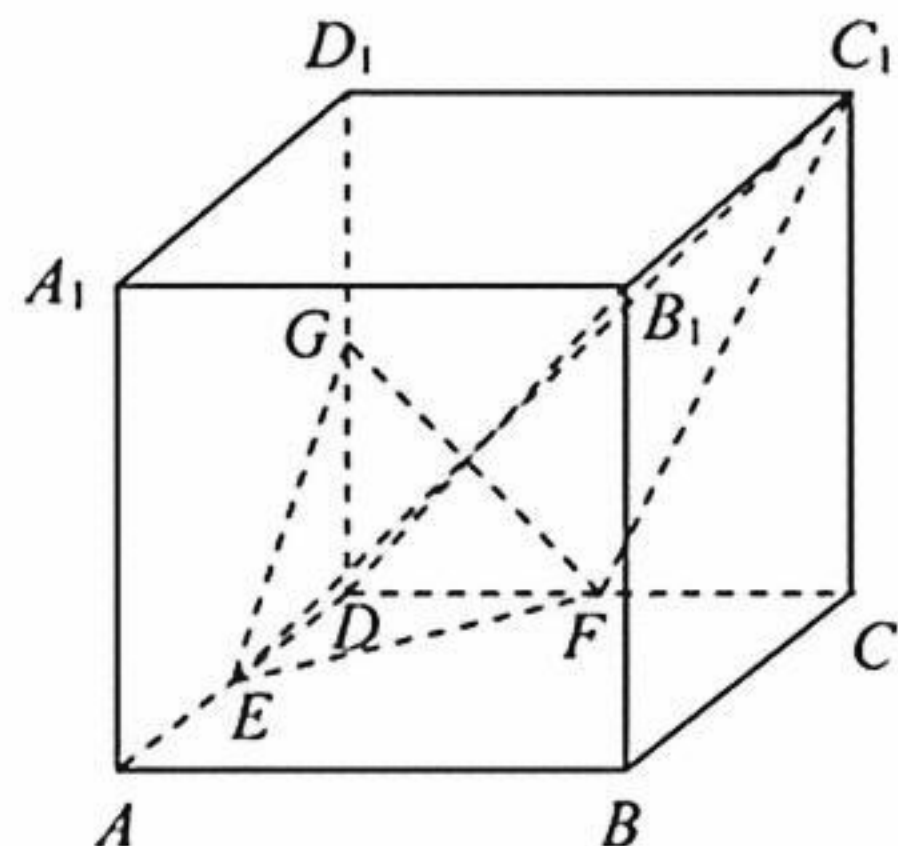
(2) 求函数 $f(x)$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程.

16. (本小题满分 15 分)

如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是棱 AD 的中点, F 是棱 CD 的中点, G 是棱 DD_1 的中点.

(1) 证明: $B_1D \perp$ 平面 EFG ;

(2) 求平面 GEF 与平面 EFC_1 的夹角的余弦值.



17. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-4\pi, +\infty)$ 上的所有零点从小到大依次为 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, 设数列 $\{x_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上的值域;

(2) 求 S_n 的最小值;

(3) 记 $a_n = \frac{1}{\left(x_n + \frac{13\pi}{3}\right)\left(x_{n+1} + \frac{13\pi}{3}\right)}$, 证明: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n < \frac{2}{\pi^2}$.

18. (本小题满分 17 分)

小王同学参加一个投篮测试, 其规则是: 有 5 次投篮机会, 若连续投中两次则通过测试并结束测试; 若未通过测试, 将继续投篮直至 5 次投篮机会用完; 第 5 次投篮后, 不论通过与否均结束测试. 现假定小王同学每次投篮结果相互独立, 命中率均为 p ($0 < p < 1$), 记 X 为小王同学测试结束时投篮的次数.

(1) 求 X 的分布列及数学期望;

(2) 若在通过测试的条件下, 小王同学恰好投篮 2 次的概率大于 $\frac{1}{5p - p^3}$, 求 p 的取值范围.

19. (本小题满分 17 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 $F(1, 0)$, 长轴长为 4, 左、右顶点分别为 A, B , 过焦点 F 的直线与椭圆 C 相交于 P, Q 两点, 且点 P 位于第一象限. 直线 AP 和 AQ 分别与直线 $x = 2$ 相交于 M, N 两点.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 求 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN}$ 的值;

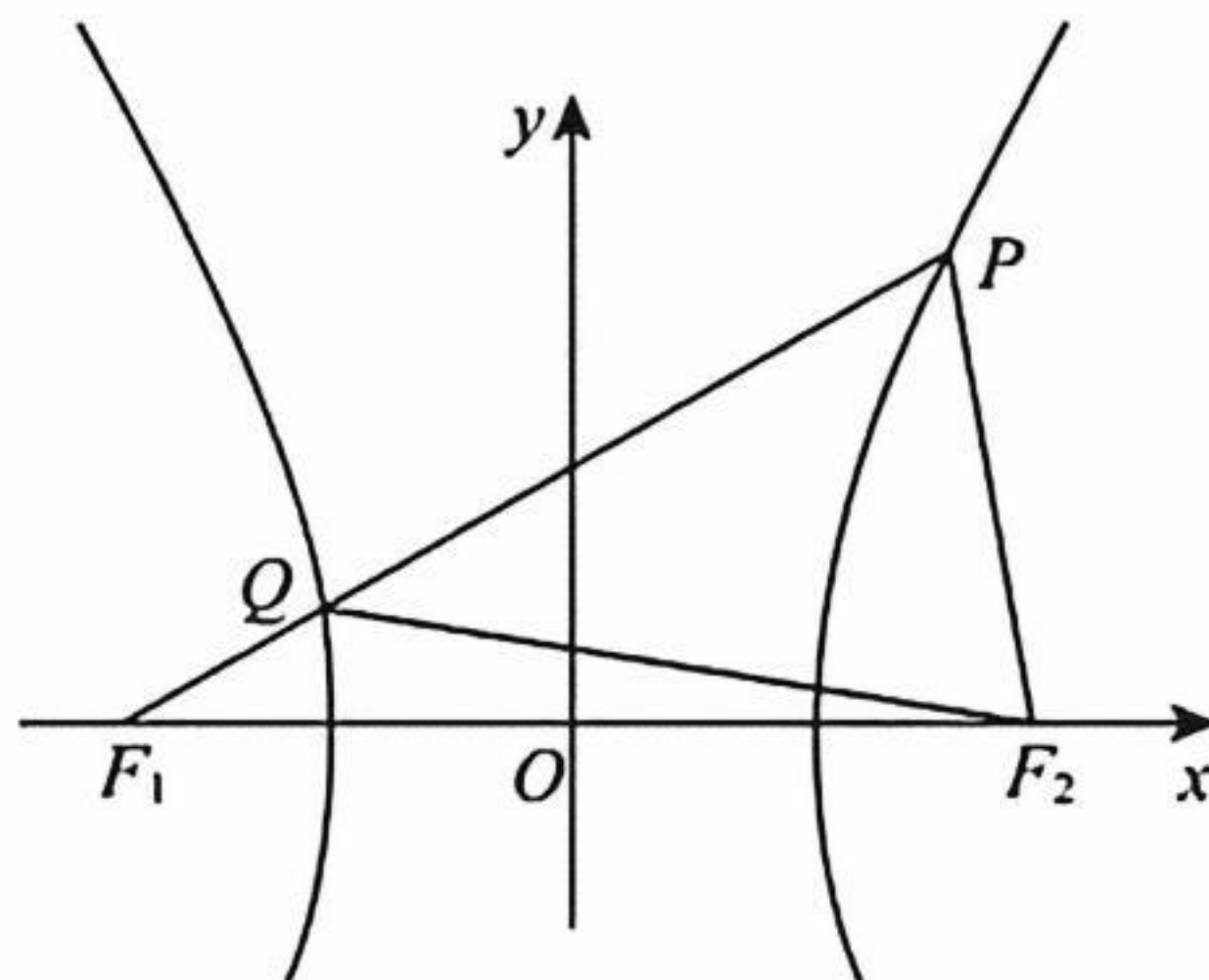
(3) 若线段 BM 的中点为 T , 证明: FT 是 $\angle BFP$ 的角平分线.

福建 9 月高三数学

参考答案、提示及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6
答案	C	B	D	A	B	A
题号	7	8	9	10	11	
答案	C	D	BD	BC	ACD	

1. C 【解析】由 $A=(-1,1), B=(0,2)$, 可得 $A \cap B=(0,1)$, 故选 C.
2. B 【解析】由 $z=\frac{(1-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{-2-4i}{10}=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$, 可得复数 z 的实部为 $-\frac{1}{5}$, 故选 B.
3. D 【解析】由 $\bar{x}=\frac{1}{4} \times (3+4+6+7)=5, \bar{y}=\frac{1}{4} \times (5+6+8+9)=7$, 有 $7=0.6 \times 5+a$, 可得 $a=4$, 有 $\hat{y}=0.6x+4$, 当 $x=7$ 时, $\hat{y}=8.2$, 所以样本点 $(7,9)$ 处的残差为 $9-8.2=0.8$, 故选 D.
4. A 【解析】所得不同字母排法的种数为 $C_3^3 A_2^2=20$, 故选 A.
5. B 【解析】由 $F(1,0)$, 设点 P 到抛物线 C 的准线 $l: x=-1$ 的距离为 d , 有 $|PF|+|PQ|=d+|PQ| \geq 9$, 等号在 $PQ \perp l$ 时成立, 可得 $|PF|+|PQ|$ 的最小值为 9, 故选 B.
6. A 【解析】当 $x>0$ 时, $-x<0$, 有 $f(-x)=1-e^x=-f(x)$; 当 $x<0$ 时, $-x>0$, 有 $f(-x)=e^{-x}-1=-f(x)$. 又由 $f(0)=0$, 可得函数 $f(x)$ 为奇函数. 又由 $x \geq 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 且函数 $f(x)$ 为奇函数, 可得函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 不等式 $f(m-x^2)+f(mx)<0$ 可化为 $f(m-x^2)<-f(mx)$, 可化为 $f(m-x^2)<f(-mx)$, 可化为 $m-x^2<-mx$, 即对 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2-mx-m>0$ 恒成立, 可得 $\Delta=m^2+4m<0$, 解得 $-4<m<0$, 故选 A.
7. C 【解析】因为 $2^1=2, 2^2=4, 2^3=8, 2^4=16, 2^5=32, a_1=3, a_2=9, a_3=27, a_4=81, a_5=243$, 由题意前 5 项共插入 $2+2^2+2^3+2^4=30$ 项, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 50 项的和 $S_{50}=a_1+1 \times 2+a_2+1 \times 4+a_3+1 \times 8+a_4+1 \times 16+a_5+1 \times 15=\frac{3 \times (1-3^5)}{1-3}+45=408$, 故选 C.
8. D 【解析】如图, 记双曲线 C 的右焦点为 F_2 , O 为坐标原点, 连 PF_2, QF_2 , 由 $|F_1Q|=a$ 且 $\overrightarrow{F_1Q}=\frac{1}{4}\overrightarrow{F_1P}$, 可得 $|QP|=3a, |PF_2|=2a, |QF_2|=3a$. 设 $|F_1F_2|=2c$, 又由 $\angle PQF_2+\angle F_1QF_2=\pi$, 得 $\cos \angle PQF_2+\cos \angle F_1QF_2=0$, 所以 $\frac{9a^2+9a^2-4a^2}{18a^2}+\frac{a^2+9a^2-4c^2}{6a^2}=0$, 可得 $\sqrt{3}c=\sqrt{11}a$, 可得双曲线 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{33}}{3}$, 故选 D.



9. BD 【解析】对于 A 选项, 可得 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\frac{c}{2\sin C}=\frac{\sqrt{7}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$, 故 A 选项错误;

对于 B 选项, 由余弦定理, 有 $a^2+(a+1)^2+a(a+1)=7$, 解得 $a=1$, 故 B 选项正确;

对于 C 选项, 又由 $b=2$, 可得 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 C 选项错误;

对于 D 选项, 由 $a=1, b=2$, 可得 $\sin B=2\sin A$, 故 D 选项正确. 故选 BD.

10. BC 【解析】对于 A 选项, 由 $8 \times 25\% = 2$, 可得数据的 25% 分位数为 $\frac{3+4}{2} = 3.5$, 故 A 选项错误;

对于 B 选项, $P(X > 6) = 0.5 - P(4 < X < 6) = 0.5 - P(2 < X < 4) = 0.5 - 0.23 = 0.27$, 故 B 选项正确;

对于 C 选项, 由 $E(X) = 12 \times \frac{1}{3} = 4, D(X) = 12 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, 有 $E(Y) = 13, D(Y) = 24$, 可得 $\frac{D(Y)}{E(Y)} = \frac{24}{13}$, 故 C 选项正确;

对于 D 选项, 这个灯泡是合格品的概率为 $40\% \times 80\% + 60\% \times 60\% = 0.68$, 故 D 选项错误. 故选 BC.

11. ACD 【解析】对于 A 选项, 由 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{25x}{4(1+x^2)^2} = \frac{(2x-1)(x-2)(2x+1)(x+2)}{4x(1+x^2)^2}$, 令 $f'(x) < 0$, 有

$\frac{1}{2} < x < 2$, 可得函数 $f(x)$ 的减区间为 $(\frac{1}{2}, 2)$, 故 A 选项正确;

对于 B 选项, 由函数 $f(x)$ 的减区间为 $(\frac{1}{2}, 2)$, 增区间为 $(0, \frac{1}{2}), (2, +\infty)$, 又由 $f(\frac{1}{2}) = \frac{15}{16} - \ln 2$, $f(2) = \ln 2 - \frac{15}{16}$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$. 若函数 $g(x)$ 有 3 个零点, 有 $\ln 2 - \frac{15}{16} < t < \frac{15}{16} - \ln 2$, 故 B 选项错误;

对于 C 选项, 由 $f(\frac{1}{x}) = \ln \frac{1}{x} + \frac{25(1-\frac{1}{x^2})}{16(1+\frac{1}{x^2})} = -\ln x + \frac{25(x^2-1)}{16(x^2+1)} = -\left[\ln x + \frac{25(1-x^2)}{16(x^2+1)}\right] = -f(x)$, 有

$f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0$, 故 C 选项正确;

对于 D 选项, 由 $f(1) = 0$, 函数 $f(x)$ 的减区间为 $(\frac{1}{2}, 2)$, 增区间为 $(0, \frac{1}{2}), (2, +\infty)$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$. 可得函数 $f(x)$ 有 3 个零点, $x_1, 1, x_2$, 且 $0 < x_1 < 1 < x_2$. 又由 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 及 $f(x_1) = -f(\frac{1}{x_1})$, 有 $f(x_2) = f(\frac{1}{x_1}) = 0$, 又由 $\frac{1}{x_1} > 1$, 有 $x_2 = \frac{1}{x_1}$, 可得 $x_1 x_2 = 1$, 故 D 选项正确. 故选 ACD.

12. $2\sqrt{7}$ (5 分, 结果正确均得分)

【解析】由 $a \perp (a-2b)$, 有 $a \cdot (a-2b) = |a|^2 - 2a \cdot b = 4 - 2a \cdot b = 0$, 可得 $a \cdot b = 2$, 有 $|b| = \frac{a \cdot b}{|a| \times \frac{1}{2}} =$

$\frac{2}{2 \times \frac{1}{2}} = 2$, 可得 $|a-3b| = \sqrt{(a-3b)^2} = \sqrt{|a|^2 - 6a \cdot b + 9|b|^2} = \sqrt{4 - 12 + 36} = 2\sqrt{7}$.

13. -1 或 $-\frac{1}{7}$ (5 分, 结果正确均得分)

【解析】设直线 l 与圆 M 交于 A, B 两点, 圆心为 $M(1, -1)$, 半径 $r=1$, 因为圆 M 被直线 l 截得两段弧长之比为 $3:1$, 而弧长之比等于对应圆心角之比. 所以两段弧所对的圆心角之比为 $3:1$, 故较小弧所对的圆心角为 $\frac{1}{3+1} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$. 设 N 为弦 AB 的中点, 则 $MN \perp AB$, 并且在等腰三角形 MAB 中, MN 平分圆心角, 所以

$\angle AMN = \frac{1}{2} \angle AMB = \frac{\pi}{4}$. 在直角三角形 MAN 中, $|MN| = |MA| \cos \frac{\pi}{4} = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 这说明圆心 $M(1, -1)$ 到

直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 直线 $l: y = m(x+1)$ 可化为 $mx - y + m = 0$, 由点到直线的距离公式, 得 $\frac{|2m+1|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

解得 $m = -1$ 或 $-\frac{1}{7}$.

14. 1(5 分, 结果正确均得分)

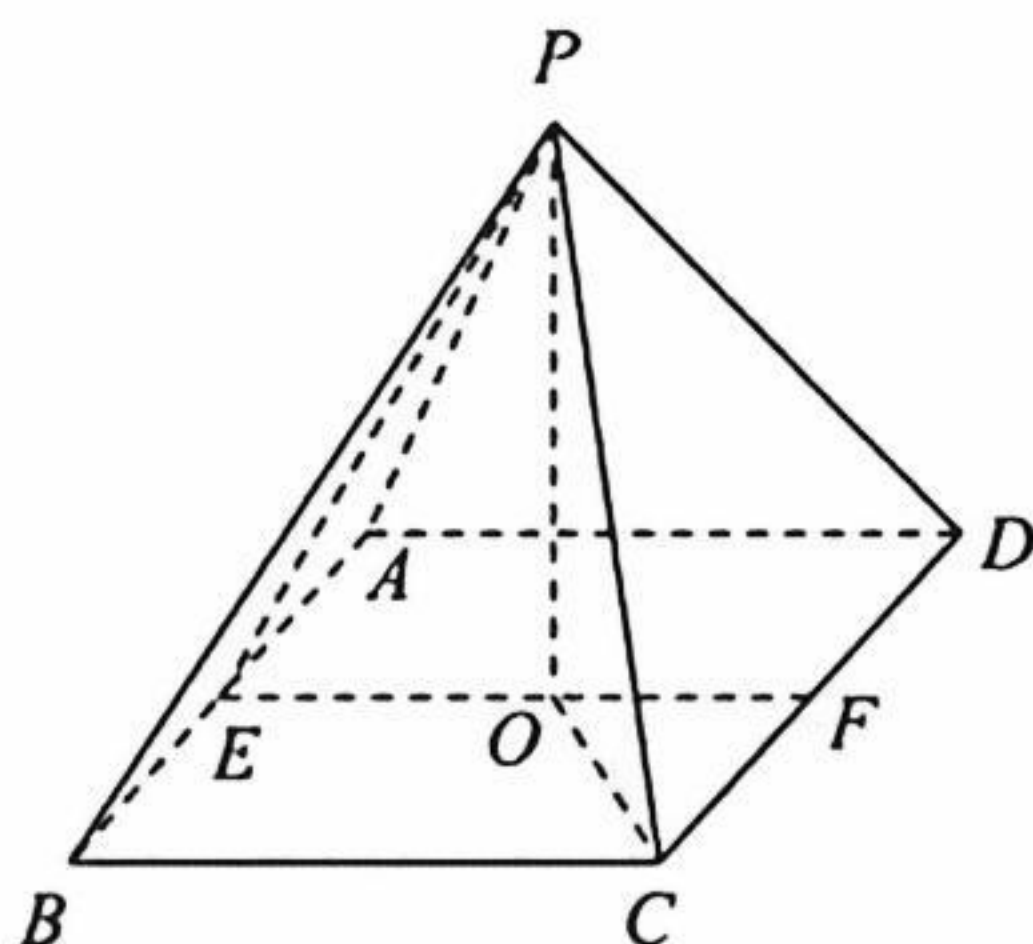
【解析】设 $AB=2$, ①当二面角 $P-AB-C$ 为直角时, 取棱 AB 的中点为 E , 连 PE, EC , 因为 $\triangle PAB$ 是等边三角形, 可得 $PE \perp AB$, 可得 $PE \perp$ 平面 $ABCD$, 可得 $\angle PCE$ 是直线 PC 与平面 $ABCD$ 所成的角. 又由

$$PE = \sqrt{3}, CE = \sqrt{5}, \text{ 可得 } \tan \angle PCE = \frac{PE}{EC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5};$$

②当二面角 $P-AB-C$ 为锐角时, 如图, 取棱 AB 的中点为 E , 棱 CD 的中点为 F , 连 PE, EF , 过点 P 作 $PO \perp EF$. 由 $PE \perp AB, EF \perp AB$, 可得 $AB \perp$ 平面 PEF , 可得 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 可得 $\angle PCO$ 是直线 PC 与平面 $ABCD$ 所成的角. 设 $EO = x (0 < x < \sqrt{3})$, 有 $OP = \sqrt{3-x^2}$, $OC = \sqrt{(2-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, 有

$$\tan \angle PCO = \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \sqrt{\frac{3-x^2}{x^2-4x+5}} = \sqrt{\frac{4(2-x)-(x^2-4x+5)}{x^2-4x+5}} = \sqrt{\frac{4(2-x)}{(x-2)^2+1}-1} = \sqrt{\frac{4}{(2-x)+\frac{1}{2-x}}-1}.$$

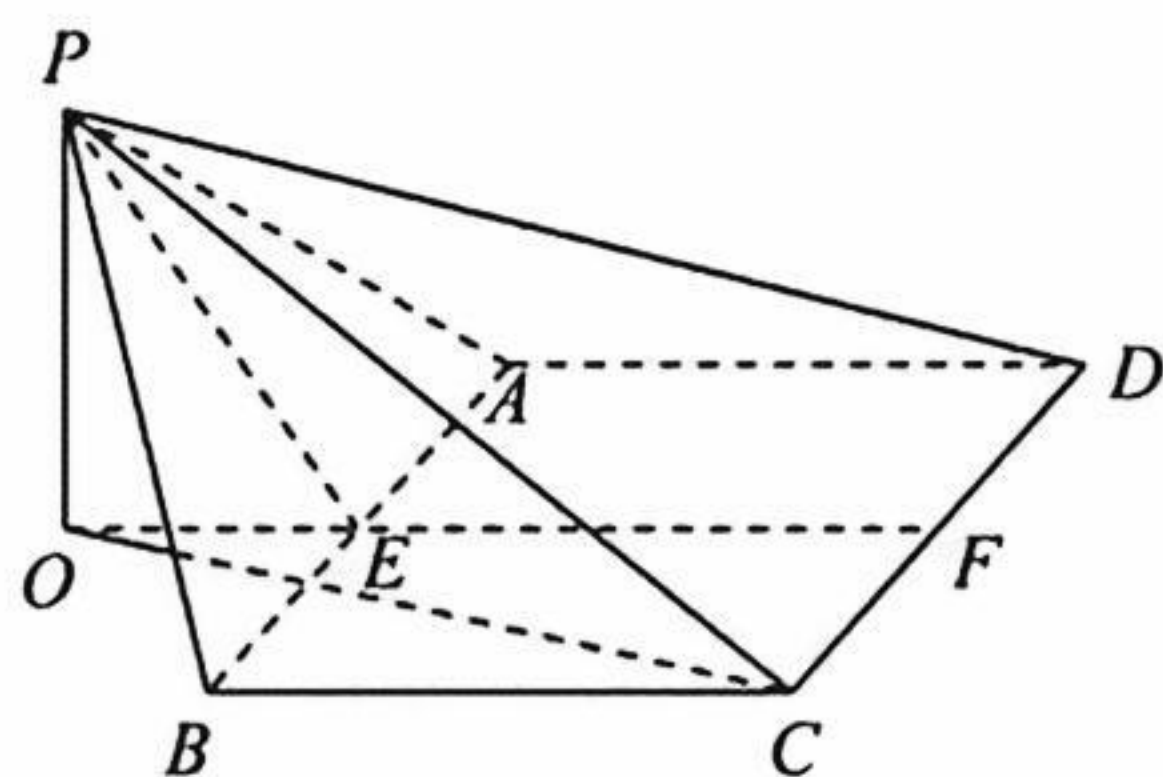
又因为 $(2-x) + \frac{1}{2-x} \geq 2\sqrt{(2-x) \times \frac{1}{2-x}} = 2$ (当且仅当 $2-x = \frac{1}{2-x}$ 即 $x=1$ 时取等号), 有 $\tan \angle PCO \leq 1$, 可得此时 $\tan \angle PCO$ 的最大值为 1;



③当二面角 $P-AB-C$ 为钝角时, 如图, 取棱 AB 的中点为 E , 棱 CD 的中点为 F , 连 PE, EF , 过点 P 作 $PO \perp EF$. 由 $PE \perp AB, EF \perp AB$, 可得 $AB \perp$ 平面 PEF , 可得 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 可得 $\angle PCO$ 是直线 PC 与平面 $ABCD$ 所成的角. 设 $EO = x (0 < x < \sqrt{3})$, 有 $OP = \sqrt{3-x^2}$, $OC = \sqrt{(2+x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$, 有

$$\tan \angle PCO = \frac{\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{x^2+4x+5}} < \sqrt{\frac{3-x^2}{x^2-4x+5}} < 1.$$

由①②③可知直线 PC 与底面 $ABCD$ 所成的角的正切值的最大值为 1.



15. 【答案】(1) $a=1$ (2) $x+y-1=0$

【命题意图】考查导数性质.

【试题分析】(1) 由 $f'(x) = (x^2 - 2x + a + 2x - 2)e^x = (x^2 + a - 2)e^x$ (2 分)

又由函数 $f(x)$ 的极小值点为 $x=1$, 有 $f'(1) = (a-1)e = 0$, 可得 $a=1$ (4 分)

有 $f'(x) = (x^2 - 1)e^x$.

令 $f'(x) > 0$, 可得 $x > 1$ 或 $x < -1$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $-1 < x < 1$, 可得函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, 减区间为 $(-1, 1)$, 可得函数 $f(x)$ 的极小值点为 $x=1$, 故有 $a=1$ (7 分)

(2) 由 $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$, 有 $f(0) = 1$ (9 分)

又由 $f'(0) = -1$ (11 分)

可得函数 $f(x)$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y - 1 = -(x - 0)$, 整理为 $x + y - 1 = 0$.

故函数 $f(x)$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $x + y - 1 = 0$ (13 分)

16. 【答案】(1) 详见解析 (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【命题意图】考查空间向量与立体几何.

【试题分析】(1) 以 D 为坐标原点, 向量 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立如图所示空间直角坐标系. (1 分)

各点坐标如下: $D(0, 0, 0), E(1, 0, 0), F(0, 1, 0), G(0, 0, 1), B_1(2, 2, 2), C_1(0, 2, 2)$ (3 分)

所以 $\overrightarrow{DB_1} = (2, 2, 2), \overrightarrow{EF} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{EG} = (-1, 0, 1)$ (4 分)

又 $\overrightarrow{DB_1} \cdot \overrightarrow{EF} = 0, \overrightarrow{DB_1} \cdot \overrightarrow{EG} = 0$ (5 分)

可得 $DB_1 \perp EF, DB_1 \perp EG$ (6 分)

又由 $DB_1 \perp EF, DB_1 \perp EG, EF \cap EG = E, EF, EG \subset \text{平面 } EFG$,

所以 $B_1D \perp \text{平面 } EFG$ (7 分)

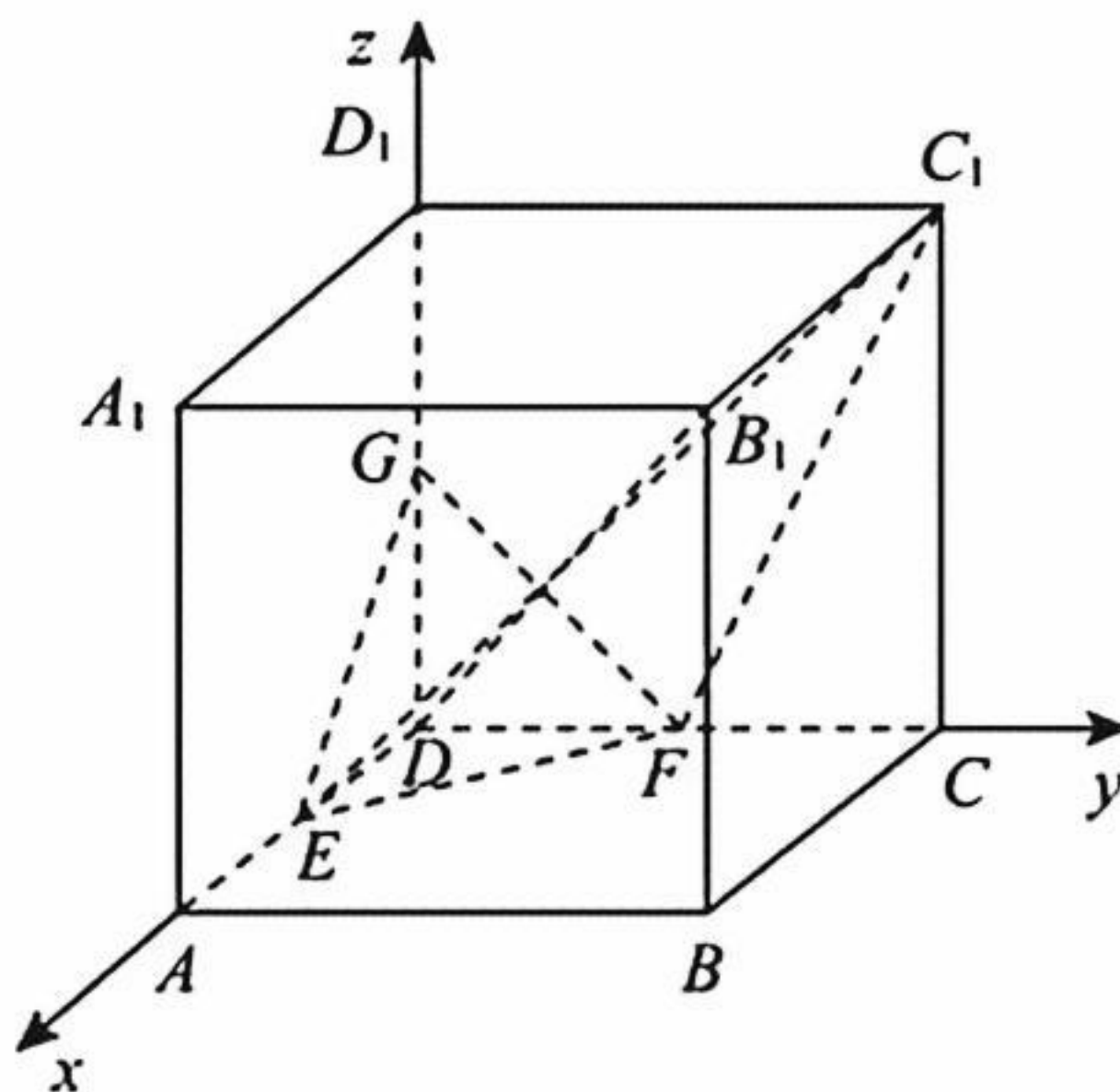
(2) 由 $B_1D \perp \text{平面 } EFG$, 可得平面 EFG 的一个法向量为 $m = (2, 2, 2)$ (9 分)

设平面 EFC_1 的一个法向量为 $n = (x, y, z)$, 由 $\overrightarrow{EF} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{FC_1} = (0, 1, 2)$ (10 分)

有 $\begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot n = -x + y = 0 \\ \overrightarrow{FC_1} \cdot n = y + 2z = 0 \end{cases}$, 取 $x = 2, y = 2, z = -1$, 可得平面 EFC_1 的一个法向量为 $n = (2, 2, -1)$ (13 分)

又由 $m \cdot n = 6, |m| = 2\sqrt{3}, |n| = 3$, 有 $\cos \langle m, n \rangle = \frac{6}{2\sqrt{3} \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

可得平面 GEF 与平面 EFC_1 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (15 分)



17. 【答案】(1) $[-\sqrt{3}, 2]$ (2) $-\frac{28\pi}{3}$ (3) 详见解析

【命题意图】考查数列与三角函数综合.

【试题分析】(1) 由 $f(x) = \sqrt{3} \sin x - 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2} \right)$
 $= \sqrt{3} \sin x - \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = \sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$ (3 分)

当 $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ 时, 有 $-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}$, 可得 $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$, 可得 $-\sqrt{3} \leq 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 2$,

故函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$ (5 分)

(2) 令 $f(x)=0$, 有 $x-\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbb{Z})$, 可得 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbb{Z})$ (6 分)

取 $k\pi+\frac{\pi}{6}\geq-4\pi(k\in\mathbb{Z})$, 可得 $k\geq-\frac{25}{6}$, 又由 $k\in\mathbb{Z}$, 可得 $k\geq-4(k\in\mathbb{Z})$.

当 $k=-4$ 时, $x=-\frac{23\pi}{6}$ (7 分)

可得数列 $\{x_n\}$ 是首项为 $x_1=-\frac{23\pi}{6}$, 公差为 π 的等差数列, 可得 $x_n=-\frac{23\pi}{6}+\pi(n-1)=\pi n-\frac{29\pi}{6}$ (8 分)

令 $x_n\leq 0$, 可得 $n\leq\frac{29}{6}$, 又由 $n\in\mathbb{N}^*$, 可得 $n=1$ 或 2 或 3 或 4 (9 分)

可得 S_n 的最小值为 $S_4=(1+2+3+4)\pi-\frac{29\pi}{6}\times 4=-\frac{28\pi}{3}$ (10 分)

(3) 证明: 由 $x_n+\frac{13\pi}{3}=\pi n-\frac{29\pi}{6}+\frac{13\pi}{3}=\pi n-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi(2n-1)}{2}$ (11 分)

有 $a_n=\frac{1}{\frac{\pi(2n-1)}{2}\times\frac{\pi(2n+1)}{2}}=\frac{2}{\pi^2}\times\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$ (13 分)

有 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{2}{\pi^2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{2}{\pi^2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$
 $=\frac{2}{\pi^2}-\frac{2}{\pi^2(2n+1)}$, 所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\frac{2}{\pi^2}$ (15 分)

18. 【答案】(1) 详见解析 (2) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

【命题意图】考查概率与随机变量综合.

【试题分析】(1) X 的所有可能取值为: $2, 3, 4, 5$ (1 分)

有 $P(X=2)=p^2$ (2 分)

$P(X=3)=(1-p)\times p^2=p^2-p^3$ (3 分)

$P(X=4)=p^2(1-p)^2+p(1-p)p^2=p^2-p^3$ (5 分)

$P(X=5)=1-p^2-(p^2-p^3)-(p^2-p^3)=1-3p^2+2p^3$ (6 分)

可得 X 的分布列为:

X	2	3	4	5
P	p^2	p^2-p^3	p^2-p^3	$1-3p^2+2p^3$

..... (7 分)

可得 $E(X)=2p^2+3(p^2-p^3)+4(p^2-p^3)+5(1-3p^2+2p^3)=3p^3-6p^2+5$ (8 分)

(2) 设事件 A : 小王同学通过测试, 事件 B : 小王同学恰好投篮 2 次.

因为投篮 5 次通过的概率为 $(1-p^2)(1-p)p^2=p^2-p^3-p^4+p^5$ (10 分)

则 $P(A)=p^2+(p^2-p^3)+(p^2-p^3)+(p^2-p^3-p^4+p^5)=4p^2-3p^3-p^4+p^5$ (12 分)

$P(AB)=p^2$ (13 分)

则在通过测试的条件下, 小王同学恰好投篮 2 次的概率为 $P(B|A)=\frac{p^2}{4p^2-3p^3-p^4+p^5}=\frac{1}{4-3p-p^2+p^3}$ (15 分)

又由 $\frac{1}{4-3p-p^2+p^3}>\frac{1}{5p-p^3}$, 可化为 $2p^3-p^2-8p+4<0$, 可化为 $(p^2-4)(2p-1)<0$, 又由 $0<p<1$, 解得 $\frac{1}{2}<p<1$.

故 p 的取值范围为 $(\frac{1}{2}, 1)$ (17 分)

19. 【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (2) -3 (3) 详见解析

【命题意图】考查椭圆综合.

【试题分析】(1) 设 $F(c, 0)$, 由题意有 $\begin{cases} 2a=4 \\ c=1 \\ b^2=a^2-c^2 \end{cases}$, (1 分)

可得 $a=2, b=\sqrt{3}$ (2 分)

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (3 分)

(2) 设 P, Q 两点的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 直线 PQ 的方程为 $my = x - 1$.

联立方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ my = x - 1 \end{cases}$, 消去 x 后整理为 $(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$.

可得 $y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4}$ (5 分)

直线 AP 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$, 令 $x = 2$, 可得 $y = \frac{4y_1}{x_1 + 2} = \frac{4y_1}{my_1 + 3}$, 可得点 M 的坐标为 $(2, \frac{4y_1}{my_1 + 3})$,

同理可得点 N 的坐标为 $(2, \frac{4y_2}{my_2 + 3})$ (7 分)

由 $\overrightarrow{FM} = (1, \frac{4y_1}{my_1 + 3}), \overrightarrow{FN} = (1, \frac{4y_2}{my_2 + 3})$,

有 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 1 + \frac{16y_1 y_2}{(my_1 + 3)(my_2 + 3)} = 1 + \frac{16y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 + 3m(y_1 + y_2) + 9}$

$= 1 + \frac{-16 \times \frac{9}{3m^2 + 4}}{-\frac{9m^2}{3m^2 + 4} - \frac{18m^2}{3m^2 + 4} + 9} = -3$.

所以 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN}$ 的值为 -3 (9 分)

(3) 由 $B(2, 0), M(2, \frac{4y_1}{my_1 + 3})$, 可得 $T(2, \frac{2y_1}{my_1 + 3})$ (10 分)

由直线 PF 的方程为 $x - my - 1 = 0$, 点 T 到直线 PF 的距离为 $d = \frac{|2 - \frac{2my_1}{my_1 + 3} - 1|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{|3 - my_1|}{\sqrt{1 + m^2} |my_1 + 3|}$ (12 分)

又由 $0 < x_1 < 2$, 有 $my_1 + 3 = x_1 + 2 > 0, 3 - my_1 = 4 - x_1 > 0$, 有 $d = \frac{3 - my_1}{\sqrt{1 + m^2} (my_1 + 3)}$ (13 分)

有 $d^2 - (\frac{2y_1}{my_1 + 3})^2 = \frac{(3 - my_1)^2}{(1 + m^2)(my_1 + 3)^2} - \frac{4y_1^2}{(my_1 + 3)^2} = \frac{(3 - my_1)^2 - (4m^2 + 4)y_1^2}{(1 + m^2)(my_1 + 3)^2} = -\frac{(3m^2 + 4)y_1^2 + 6my_1 - 9}{(1 + m^2)(my_1 + 3)^2}$ (15 分)

又由 $(3m^2 + 4)y_1^2 + 6my_1 - 9 = 0$, 有 $d^2 - (\frac{2y_1}{my_1 + 3})^2 = 0$, 可得 $d = \frac{2y_1}{my_1 + 3}$ (16 分)

可得 $|BT| = d$, 又由 $BM \perp x$ 轴, 故 FT 是 $\angle BFP$ 的角平分线. (17 分)