

高三年级 12 月检测训练

数学试题

(试卷满分:150 分 考试用时:120 分钟)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$, $B = \{x | \ln x \geq \frac{1}{2}\}$, 则 $A \cup B =$
A. $[3, +\infty)$ B. $(-\infty, -1] \cup [\sqrt{e}, +\infty)$
C. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ D. $[-1, \sqrt{e}]$
2. 已知复数 z 满足 $2z + 1 = (3 - z)i$, 则 $z \cdot \bar{z} =$
A. 4 B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. $\sqrt{2}$
3. 已知 $a > 0, b > 0, \sqrt{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, 则 $\frac{1}{\log_a 2} + \frac{1}{\log_b 2}$ 的最小值为
A. 3 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. 1
4. 已知点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 若 $\overrightarrow{BG} = \lambda \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{AG}$, 则 $\lambda - \mu =$
A. 0 B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 3
5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = -5, a_n = \frac{S_n}{n} + 2(n-1)$, 若对任意 $n \in \mathbb{N}^+$, $\lambda \leq S_n$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围是
A. $(-\infty, -6]$ B. $(-\infty, -5]$
C. $(-\infty, -3]$ D. $(-\infty, -2]$
6. 图 1 是古书《天工开物》中记载的筒车图。筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具, 在农业上得到广泛应用。在图 2 中, 一个半径为 2 m 的筒车按逆时针方向每分钟转 1.5 圈, 筒车的轴心 O 距水面的高度为 $\sqrt{3}$ m。设筒车上的某个盛水桶 P (看作点) 到水面的距离为 d (单位: m) (若在水面下则 d 为负数), 若以盛水桶 P 刚浮出水面时开始计时, d 与时间 t (单位: s) 之间的关系为 $d = A \sin(\omega t + \varphi) + K$ ($A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$), 则 $\varphi =$

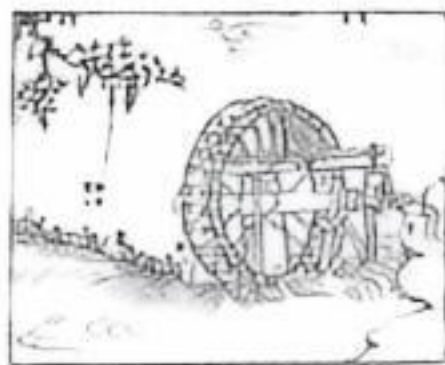


图 1

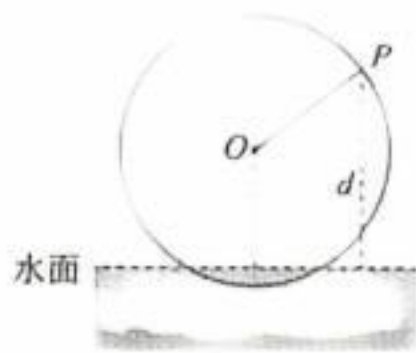


图 2

A. $-\frac{\pi}{3}$

B. $-\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{3}$

7. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{m^2} = 1 (m > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 作圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的切线, 交双曲线 C 的右支于点 M , 若 $\angle F_1MF_2 = \frac{\pi}{3}$, 则实数 $m =$

A. $2 + \sqrt{3}$

B. $1 + \sqrt{3}$

C. 2

D. $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x(2x-1), & x > 0, \\ k(x+1), & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = f(x) + f(-x)$, 若 $y = g(x)$ 恰有 4 个零点, 则实数 k 的取值范围是

A. $(-\infty, 1)$

B. $(4e^{\frac{1}{2}}, +\infty)$

C. $(1, 4e^{\frac{1}{2}})$

D. $(1, +\infty)$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知一组数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x} (\bar{x} \neq 0)$, 将这组数据分别加上它们的平均数, 得到一组新数据 $x_1 + \bar{x}, x_2 + \bar{x}, x_3 + \bar{x}, \dots, x_n + \bar{x}$, 则新数据与原数据相比
- A. 极差相同 B. 平均数不同 C. 方差不同 D. 中位数相同

10. 已知函数 $f(x) = \sin \pi x, g(x) = x - \frac{1}{x} - \ln x, h(x) = f(x) \cdot g(x)$, 则下列说法正确的是

A. $g\left(\frac{1}{x}\right) + g(x) = 0$

B. 不等式 $g(x) > 0$ 的解集为 $(0, 1)$

C. $h\left(\frac{16}{3}\right) < h\left(\frac{3}{11}\right)$

D. 1 为函数 $h(x)$ 的极大值点

11. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面边长为 1, 高为 h , 该正四棱锥的顶点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内部(包括表面), 则下列结论正确的是

A. h 的取值范围是 $(0, 1]$

B. 若正四棱锥 $P-ABCD$ 的侧棱长为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C. 当点 P 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心时, 正四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的表面积为 $\frac{9\pi}{4}$

D. 当点 P 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球球心时, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球与正四棱锥 $P-ABCD$ 的公共部分的体积为 $\frac{\pi}{36}$

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 已知 $\left(x + \frac{2}{x}\right)^n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) 的展开式中,第6项系数与第7项系数之比为3:1,则 n 的值为

13. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F ,斜率为1的直线 l 与抛物线 C 交于 M, N 两点,则 $\frac{|FM| - |FN|}{|MN|}$ 的值为

14. 已知 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\sin \alpha - |\sin \beta|) \cdot (\cos \beta - |\cos \alpha|) = 0$,则 $\sin \alpha + \cos \beta - 2$ 的最小值为

四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c ,且满足 $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c}$

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若点 D 在边 AB 上,且满足 $AB = 3AD$,求 $\frac{\tan A}{\tan \angle ACD}$ 的值.

16. (本小题满分15分)

(1) 1个质点在数轴上运动,每次向左或向右移动1个单位长度(相对于原点 O ,质点向右移动了 i ($i \in \mathbb{N}$) 个单位长度后位置记为 i ,向左移动了 i ($i \in \mathbb{N}$) 个单位长度后位置记为 $-i$).已知质点每次向右移动的概率为 p ($0 < p < 1$),记 X 为质点从原点 O 出发,移动2次后的位置,求满足随机变量 X 的期望大于0的 p 的取值范围;

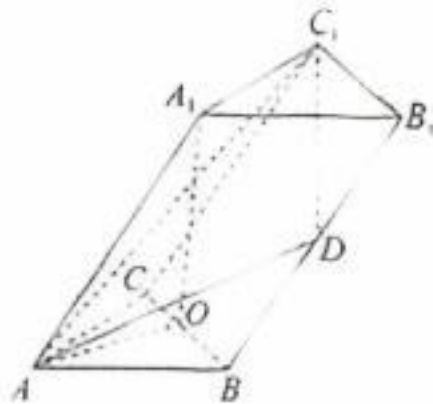
(2) 1个质点从平面直角坐标系中某点 A 出发,每次等可能地向上或向下或向左或向右移动1个单位长度,求该质点经过4次移动后回到点 A 的概率.

17. (本小题满分15分)

如图,在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, $\angle A_1AB = \angle A_1AC$, O 是 BC 的中点.

(1) 求证:平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 A_1AO ;

(2) 若 $A_1O \perp$ 底面 ABC ,且直线 AA_1 与底面 ABC 所成角为 60° , D 是棱 BB_1 的中点,求平面 AC_1D 与平面 ABC 夹角的余弦值.



18. (本小题满分 17 分)

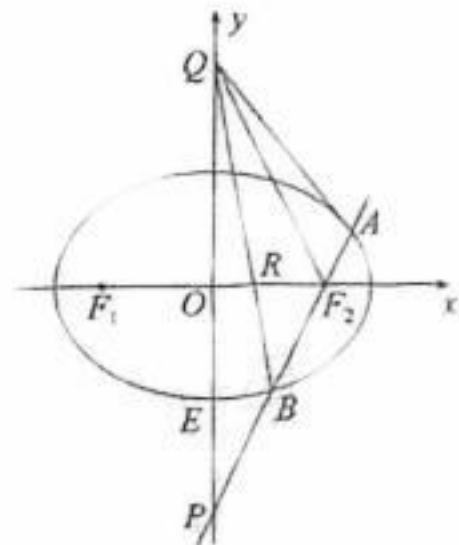
已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$, 且椭圆 C 过点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 椭圆的下顶点为 E .

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过右焦点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的上方), 与 y 轴交于点 P (点 P 在点 E 的下方), Q 为点 P 关于原点的对称点, QB 交 x 轴于点 R , 设 $\triangle PBQ, \triangle BF_2Q, \triangle AF_2Q$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 .

① 若直线 l 的斜率为 2, 求 $\frac{S_1 + S_2}{S_2 + S_3}$ 的值;

② 是否存在直线 l , 使 Q, R, F_2, A 四点共圆? 若存在, 试判断直线 l 的条数; 若不存在, 请说明理由.



19. (本小题满分 17 分)

约翰·卡尔·弗里德里希·高斯, 德国著名的数学家、物理学家、天文学家, 是近代数学奠基者之一, 享有“数学王子”之称. 函数 $y = [x]$ 称为高斯函数, 其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, 如 $[1.2] = 1, [-1.3] = -2$. 已知函数 $f(x) = \frac{2\cos x}{x}$

(1) 当 $x = 4$ 和 $x = 5$ 时, 求 $[f(x)]$ 的值;

(2) 设 $g(x) = \sqrt{x+45} - \sqrt{x+5}, x_1 = 5, x_{n+1} = g(x_n), n \in \mathbb{N}^+$

① 求 $\sum_{i=1}^n [f(x_i)]$ 的表达式; ($g(5) > 3.9, g(3.9) < 4.1, g(4.1) > 3.9$)

② 求 $[\sum_{i=1}^n x_i]$ 的表达式.

高三年级 12 月检测训练

数学试题参考答案及多维细目表

题号	1	2	3	4	5	6
答案	B	C	D	B	A	A
题号	7	8	9	10	11	
答案	D	B	AB	ACD	ACD	

1. 【答案】B

【解析】 $\because A = \{x | x \leq -1, \text{ 或 } x \geq 3\}, B = \{x | x \geq \sqrt{e}\}, \therefore A \cup B = \{x | x \leq -1, \text{ 或 } x \geq \sqrt{e}\}.$

2. 【答案】C

【解析】方法一： $\because (2+i)z = 3i-1, \therefore z = \frac{3i-1}{2+i} = \frac{(3i-1)(2-i)}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7i}{5}, \therefore |z| = \sqrt{2}, \therefore z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 2.$

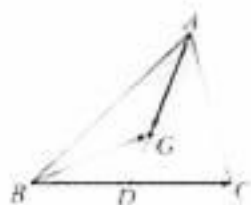
方法二： $\because (2+i)z = -1+3i, \therefore \sqrt{5}|z| = \sqrt{10}, \therefore |z| = \sqrt{2}, \therefore z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 2.$

3. 【答案】D

【解析】 $\because \sqrt{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}, \therefore ab \geq 2, \therefore \frac{1}{\log_2 2} + \frac{1}{\log_2 2} = \log_2 ab \geq \log_2 2 = 1, \therefore$ 最小值为 1, 此时 $a=b=\sqrt{2}.$

4. 【答案】B

【解析】如图, 延长 AG 交 BC 于点 D , 则 $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}, \therefore \overrightarrow{BG} = \lambda\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{AG},$ 且 $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AG}$ 不共线, $\therefore \lambda = \frac{1}{3}, \mu = \frac{1}{3}, \therefore \lambda + \mu = \frac{2}{3}.$



5. 【答案】A

【解析】方法一：由 $a_n = \frac{S_n}{n} + 2(n-1)$ 得 $na_n = S_n$

$+ 2n(n-1), \therefore$ 当 $n \geq 2$ 时, $n(S_n - S_{n-1}) = S_n + 2n(n-1).$

$\therefore (n-1)S_n - nS_{n-1} = 2n(n-1), \therefore \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = 2(n \geq 2), \therefore \left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是首项为 -5, 公差为 2 的等差数列.

$\therefore \frac{S_n}{n} = -5 + 2(n-1) = 2n-7, \therefore S_n = n(2n-7) = 2n^2 - 7n, \therefore S_n$ 的最小值为 $S_2 = -6, \therefore \lambda \leq -6.$

方法二：当 $n \geq 2$ 时, $na_n = S_n + 2n(n-1)$ ①, $(n-1)a_{n-1} = S_{n-1} + 2(n-1)(n-2)$ ②, ①-②得 $(n-1)a_n - (n-1)a_{n-1} = 4(n-1), n \geq 2, \therefore a_n - a_{n-1} = 4.$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 -5, 公差为 4 的等差数列, $\therefore a_n = -5 + 4(n-1) = 4n-9, \text{ 令 } a_n > 0 \text{ 得 } n \geq 3, \therefore S_n$ 的最小值为 $S_2 = -6, \therefore \lambda \leq -6.$

6. 【答案】A

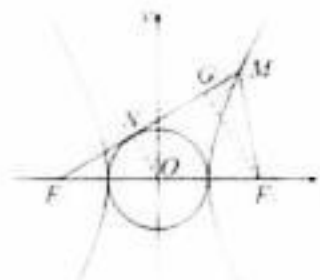
【解析】由题得筒车半径为 2 m, 转动一圈需要 40 s, 且轴心 O 距水面高度为 $\sqrt{3}$ m.

$\therefore A = \frac{(2+\sqrt{3}) - (\sqrt{3}-2)}{2} = 2, \omega = \frac{3\pi}{60} = \frac{\pi}{20}, K = \frac{(2+\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-2)}{2} = \sqrt{3} \text{ (m)}.$

又以盛水桶 P 刚浮出水面时开始计时, $\therefore d(0) = 0, \therefore \sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 又 } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = -\frac{\pi}{3}.$

7. 【答案】D

【解析】如图, 设点 M 在第一象限, 过点 F_2 作 $F_2G \perp MF_1$ 于点 G , 设 N 为圆 O 的切点, 连接 $ON, \therefore F_1N = NG = m, F_2G = 2ON = 2.$



在 $\text{Rt}\triangle MGF_2$ 中, $MG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $MF_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. 由双曲线定义得 $|MF_1| - |MF_2| = 2$, $\therefore 2m + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = 2$, $\therefore m = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. 【答案】B

【解析】 $\because g(x) = f(x) + f(-x)$, $\therefore g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x)$. 又 $g(x)$ 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$ 关于原点对称, $\therefore g(x)$ 为偶函数. 要使 $y = g(x)$ 恰有 4 个零点, 则需使 $y = g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恰有 2 个零点.

当 $x > 0$ 时, $g(x) = e^x(2x-1) + k(-x+1) = e^x(2x-1) - k(x-1)$.

方法一: 令 $e^x(2x-1) = k(x-1)$, 显然 $x=1$ 不是方程的根, $\therefore k = \frac{e^x(2x-1)}{x-1}$. 记 $h(x) = \frac{e^x(2x-1)}{x-1}$, 问题转化为 $h(x) = k$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有 2 个解.

$$\text{又 } h'(x) = \frac{e^x(2x^2-3x)}{(x-1)^2}.$$

$\therefore x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减;

$x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减;

$x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增.

且 $h(0) = 1$. 当 x 从 1 的左侧无限趋近于 1 时, $h(x)$ 趋近于 $-\infty$; 当 x 从 1 的右侧无限趋近于 1 时, $h(x)$ 趋近于 $+\infty$; 当 x 趋近于 $+\infty$ 时, $h(x)$

趋近于 $+\infty$. 又 $h\left(\frac{3}{2}\right) = 4e^{\frac{3}{2}}$, $\therefore k \in (4e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$.

方法二: $g'(x) = e^x(2x+1) - k$. 易知 $g'(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore$ 要使 $y = g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恰有 2 个零点, 则需满足 $g'(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有零点, 记为 x_0 , 且 $g'(0) = -k < 0$, $\therefore k > 0$, 且 $g'(x_0) = e^{x_0}(2x_0+1) - k = 0$.

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

$\because g(0) = k-1 > 0$, $g(k) = e^k(2k-1) + k(-k+1) > k(2k-1) + k(-k+1) = k^2 > k-1$,

$\therefore$ 当 $y = g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恰有 2 个零点时, 需满足 $g(x_0) < 0$, $0 < x_0 < k$.

$$\begin{aligned} \therefore g(x_0) &= e^{x_0}(2x_0-1) + k(-x_0+1) = \\ &= e^{x_0}(2x_0-1) + e^{-x_0}(2x_0+1)(-x_0+1) = \\ &= x_0 e^{x_0}(-2x_0+3) < 0, \therefore x_0 > \frac{3}{2} \end{aligned}$$

易知 $h(x) = e^x(2x+1)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore k = e^{x_0}(2x_0+1) > 4e^{\frac{3}{2}}.$$

综上所述, $k \in (4e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$.

9. 【答案】AB

【解析】极差为最大值与最小值的差, $\therefore$ 极差相同, $\therefore$ 选项 A 正确;

原数据的平均数 $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$, 新数据的

$$\text{平均数 } \bar{y} = \frac{x_1+\bar{x}+x_2+\bar{x}+\dots+x_n+\bar{x}}{n} =$$

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} + \bar{x} = 2\bar{x}, \therefore \text{平均数不同, } \therefore \text{选项 B 正确};$$

原数据的方差 $s_1^2 = \frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \dots +$

$$(x_n-\bar{x})^2], \text{新数据的方差 } s_2^2 = \frac{1}{n}[(x_1+\bar{x}-2\bar{x})^2 +$$

$$(x_2+\bar{x}-2\bar{x})^2 + \dots + (x_n+\bar{x}-2\bar{x})^2] = s_1^2, \therefore \text{方差相同, } \therefore \text{选项 C 错误};$$

中位数显然不同, $\therefore$ 选项 D 错误.

中位数显然不同, $\therefore$ 选项 D 错误.

10. 【答案】ACD

【解析】 $\because g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x} - \ln x + \frac{1}{x} - x + \ln \frac{1}{x} = 0$, $\therefore$ 选项 A 正确;

$$\because g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2+1-x}{x^2} > 0, \therefore g(x)$$

在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 又 $g(1) = 0$, $\therefore g(x) > 0$ 解集为 $(1, +\infty)$, $\therefore$ 选项 B 错误;

$$\because \sin \frac{\pi}{3} > \sin \frac{3\pi}{11} > 0, \text{ 且 } g\left(\frac{16}{3}\right) > g\left(\frac{11}{3}\right) > 0,$$

$$\therefore \sin \frac{\pi}{3} \cdot g\left(\frac{16}{3}\right) > \sin \frac{3\pi}{11} \cdot g\left(\frac{11}{3}\right), \therefore -\sin \frac{\pi}{3} \cdot$$

$$g\left(\frac{16}{3}\right) < -\sin \frac{3\pi}{11} \cdot g\left(\frac{11}{3}\right), \text{ 由 } h\left(\frac{16}{3}\right) = \sin \frac{16}{3}\pi \cdot$$

$$g\left(\frac{16}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} \cdot g\left(\frac{16}{3}\right), h\left(\frac{11}{3}\right) = \sin \frac{3\pi}{11} \cdot$$

$$k\left(\frac{3}{11}\right) = -\sin \frac{3\pi}{11} \cdot k\left(\frac{11}{3}\right), \therefore h\left(\frac{16}{3}\right) < h\left(\frac{3}{11}\right),$$

$\therefore$ 选项 C 正确;

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \pi \cos \pi x \cdot$$

$$\left(x - \frac{1}{x} - \ln x\right) + \sin \pi x \cdot \frac{x^2 + 1 - x}{x^2}, \therefore x \in$$

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ 时, } h'(x) > 0; x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ 时, } h'(x) < 0.$$

又 $h'(1) = 0$, $\therefore 1$ 为 $h(x)$ 极大值点, $\therefore$ 选项 D 正确.

11. 【答案】ACD

【解析】记正方形 $ABCD$ 和正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心分别为 O 和 O_1 , 则点 P 在线段 OO_1 (不含端点 O) 上, 易知 $0 < h \leq 1$, $\therefore$ 选项 A 正确;

$$\text{在 Rt} \triangle POO_1 \text{ 中, } h = PO = \sqrt{PC^2 - OC^2} =$$

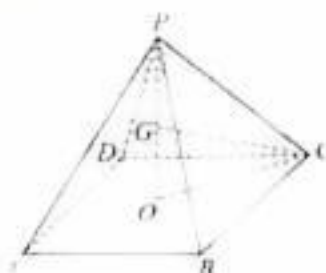
$$\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{2}{4}} = \frac{1}{2}, \therefore \text{选项 B 错误};$$

如图, 记四棱锥 $P \cdot ABCD$ 的外接球球心为 G , 则点 G 则在 OP 上, 连接 CG , 在 $\text{Rt} \triangle OGC$ 中,

$$OG = 1 - R, OC = \frac{\sqrt{2}}{2}, GC = R, \text{ 则 } R^2 = (1 - R)^2 +$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \therefore R = \frac{3}{4}, \therefore S_{\text{球}} = 4\pi R^2 = 4\pi \times \frac{9}{16} = \frac{9}{4}\pi,$$

$\therefore$ 选项 C 正确;



该正方体恰好放入与四棱锥 $P \cdot ABCD$ 体积相同的 6 个四棱锥, $\therefore$ 公共部分的体积为正方体内切球体积的 $\frac{1}{6}$, $\therefore$ 公共部分的体积为 $\frac{1}{6} \times \frac{4}{3}\pi$

$$\times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{36}, \therefore \text{选项 D 正确}.$$

12. 【答案】6

【解析】 $\because T_n = C_n^k x^{n-k} \left(\frac{2}{x}\right)^k$, $\therefore$ 第 6 项系数为

$$C_n^2 \cdot 2^2, \text{ 又 } T_n = C_n^k x^{n-k} \left(\frac{2}{x}\right)^k, \therefore \text{第 7 项系数为}$$

$$C_n^3 \cdot 2^3$$

$$\text{由题可知 } C_n^2 \cdot 2^2 = 3C_n^3 \cdot 2^3, \therefore \frac{n!}{5! (n-5)!} =$$

$$\frac{6 \cdot n!}{5! (n-6)!}, \therefore (n-5)! = (n-6)!, \therefore n = 6.$$

13. 【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 由抛物线定

$$\text{义得 } |FM| = x_1 + \frac{p}{2}, |FN| = x_2 + \frac{p}{2}$$

$$\therefore \frac{||FM| - |FN||}{|MN|} = \frac{\left| \left(x_1 + \frac{p}{2}\right) - \left(x_2 + \frac{p}{2}\right) \right|}{\sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2|}$$

$$= \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

14. 【答案】-3

【解析】令 $x = \sin \alpha, y = \cos \beta$, 则 $(x - \sqrt{1-y^2}) \cdot$

$$(y - \sqrt{1-x^2}) = 0, \therefore x = \sqrt{1-y^2}, \text{ 或 } y =$$

$$\sqrt{1-x^2}, \therefore x^2 + y^2 = 1 (x \geq 0), \text{ 或 } x^2 + y^2 = 1$$

$(y \geq 0)$.
 $\therefore$ 点 $(\sin \alpha, \cos \beta)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 位于第一、四象限(包括坐标轴)的部分上.

$\therefore$ 点 $(\sin \alpha, \cos \beta)$ 到直线 $x + y - 2 = 0$ 距离为

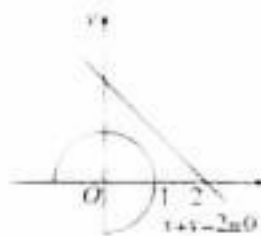
$$\frac{|\sin \alpha + \cos \beta - 2|}{\sqrt{2}} = d,$$

$$\text{又 } \sin \alpha + \cos \beta - 2 \leq 0, \therefore \sin \alpha + \cos \beta - 2 = -\sqrt{2}d.$$

下求 d 的最大值, 如图, d 的最大值为点 $(-1, 0)$ 到直线 $x + y - 2 = 0$ 的距离, $\therefore d_{\max} =$

$$\frac{|-1+0-2|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore (\sin \alpha + \cos \beta - 2)_{\min} = -\sqrt{2} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = -3.$$



15. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2a}$, $\therefore \frac{1}{2}(1 +$

$$\cos A) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + 1 \right), \therefore \cos A = \frac{b}{a} \dots \dots \dots 2 \text{ 分}$$

方法一: 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\cos A =$

$$\frac{\sin B}{\sin C}, \therefore \sin B = \cos A \sin C.$$

$\because A+B+C=\pi, \therefore \sin B=\sin(A+C),$
 $\therefore \sin A \cos C+\cos A \sin C=\cos A \sin C,$
 $\therefore \sin A \cos C=0, \because \sin A \neq 0, \therefore \cos C=0,$

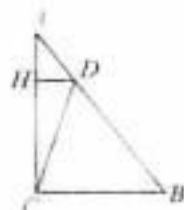
$\therefore C=\frac{\pi}{2} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

方法二: $\because \cos A=\frac{b}{c}, \therefore \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{c},$

$\therefore a^2+b^2=c^2, \therefore C=\frac{\pi}{2} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 方法一: 如图, 过点 D 作 DH 垂直于 AC 于点 H , 由题可得 $\frac{AH}{HC}=\frac{AD}{DB}=\frac{1}{2}$

设 $AH=x, HC=2x, \tan A=\frac{HD}{x}, \tan \angle ACD$
 $=\frac{HD}{2x}, \therefore \frac{\tan A}{\tan \angle ACD}=2. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$



方法二: 在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin A} =$
 $\frac{AD}{\sin \angle ACD} \text{ ①}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)} =$
 $\frac{BD}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\angle ACD\right)}, \therefore \frac{CD}{\cos A} = \frac{BD}{\cos \angle ACD} \text{ ②},$
 $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

② $\div$ ①, 得 $\frac{\tan A}{\tan \angle ACD}=2. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

16. 解: (1) 由题可知 X 的可能取值为 $-2, 0, 2$,
 $\therefore P(X=-2)=(1-p)^2, P(X=0)=2p(1-p),$
 $P(X=2)=p^2. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$
 X 的分布列如下:

X	-2	0	2
P	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

$\therefore E(X)=-2 \cdot (1-p)^2+2p^2=4p-2>0,$

$\therefore \frac{1}{2}<p<1$ (不列分布列不扣分) $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

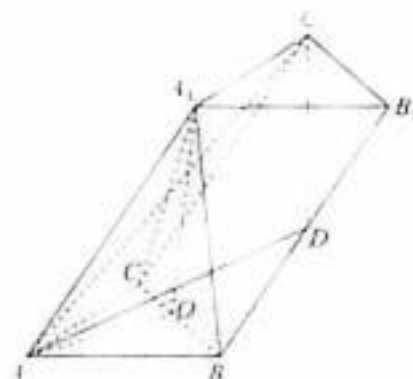
(2) 移动四次, 样本空间的样本点总数为 $n=4^4$

$=256$, 每个样本点出现的可能性相等, 且为有限个, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

记质点经过 4 次移动后回到点 A 为事件 B , 要 1 次回到起点 A , 则向左向右移动次数相等, 向上向下移动次数相等, $\therefore$ 事件 B 包含的样本点个数为 $m=A_1^4+\frac{A_1^2}{A_2^2 \cdot A_2^2}+\frac{A_1^2}{A_2^2 \cdot A_2^2}=36$ (或 $m=A_1^4+2C_4^2=36$) $\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

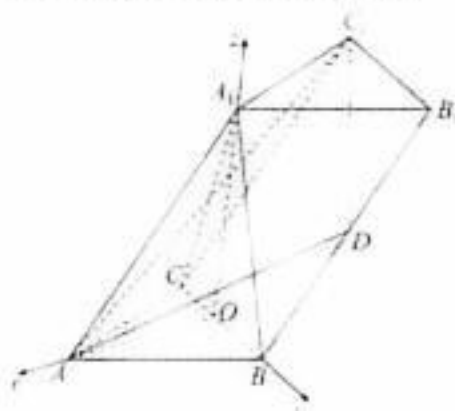
由古典概型计算公式得 $P(B)=\frac{36}{256}=\frac{9}{64}, \therefore$ 质点移动四次后回到点 A 的概率为 $\frac{9}{64} \quad \dots\dots 15 \text{ 分}$

17. (1) 证明: 如图, 连接 A_1B, A_1C



$\because AB=AC, \angle A_1AB=\angle A_1AC, A_1A=A_1A,$
 $\therefore \triangle A_1AB \cong \triangle A_1AC, \therefore A_1B=A_1C$
 $\because O$ 为 BC 中点, $\therefore BC \perp A_1O$, 又 $AC=AB,$
 $\therefore BC \perp AO. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$
 $\because AO \cap A_1O=O, AO \subset \text{平面 } A_1AO, A_1O \subset \text{平面 } A_1AO,$
 $\therefore BC \perp \text{平面 } A_1AO. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$
 $\because BC \subset \text{平面 } BCC_1B_1, \therefore \text{平面 } A_1AO \perp \text{平面 } BCC_1B_1. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 解: $\because A_1O \perp \text{平面 } ABC, \therefore \angle A_1AO$ 为 A_1A 与平面 ABC 所成的角, 即 $\angle A_1AO=60^\circ$, 由题可知 OA, OB, OA_1 两两垂直, 以 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA_1}$ 分别为 x 轴, y 轴, z 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $AC=AB=4$, $\therefore A_1(0,0,2\sqrt{6}), A(2\sqrt{2},0,0), B(0,2\sqrt{2},0), C(0,-2\sqrt{2},0)$. $\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$, $\therefore C_1(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2},2\sqrt{6}), B_1(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},2\sqrt{6})$ 10分

$\therefore D(-\sqrt{2},2\sqrt{2},\sqrt{6}), \therefore \overrightarrow{AD} = (-3\sqrt{2},2\sqrt{2},\sqrt{6}), \overrightarrow{AC_1} = (-4\sqrt{2},-2\sqrt{2},2\sqrt{6})$.

设平面 AC_1D 的一个法向量为 $n=(x,y,z)$,

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot n = 0, \\ \overrightarrow{AC_1} \cdot n = 0, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} -3\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + \sqrt{6}z = 0, \\ -4\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{6}z = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y = \sqrt{3},$$

$$\therefore n = (3\sqrt{3}, \sqrt{3}, 7), \dots\dots\dots 13 \text{分}$$

$\because A_1O \perp$ 平面 ABC , $\therefore$ 取平面 ABC 的法向量 $m=(0,0,1)$, 记平面 AC_1D 与平面 ABC 的夹角为 α , 则 $\cos \alpha = |\cos(m,n)| = \frac{|m \cdot n|}{|m| \cdot |n|} =$

$$\frac{\sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + 7^2}}{79} = \frac{7\sqrt{79}}{79}.$$

$\therefore$ 平面 AC_1D 与平面 ABC 夹角的余弦值为

$$\frac{7\sqrt{79}}{79} \dots\dots\dots 15 \text{分}$$

18. 解: (1) $\because$ 椭圆 C 的左、右焦点分别为 $F_1(-2,0), F_2(2,0)$, 且过 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$,

$$\therefore \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2+3} + \sqrt{(\sqrt{2}+2)^2+3} = 4\sqrt{2}.$$

$$\therefore 2a = 4\sqrt{2}, \therefore a = 2\sqrt{2}, \therefore b^2 = a^2 - c^2 = 4.$$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 4分

(2) ① 直线 l 方程为 $x = \frac{1}{2}y + 2$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ x = \frac{1}{2}y + 2, \end{cases} \quad \text{消去 } x, \text{ 得 } 9y^2 + 8y - 16 = 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = -\frac{8}{9}, y_1 y_2 = -\frac{16}{9} \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$\text{由题得 } \frac{S_1 + S_2}{S_2 + S_3} = \frac{|BP| + |AF_2|}{|BF_2| + |AF_2|} = \frac{y_2 + 4 + y_1}{y_1 - y_2}$$

$$= \frac{y_2 + 4 + y_1}{\sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}} = \frac{4 - \frac{8}{9}}{\sqrt{\frac{64}{81} + \frac{64}{9}}} = \frac{7\sqrt{10}}{20}$$

..... 9分

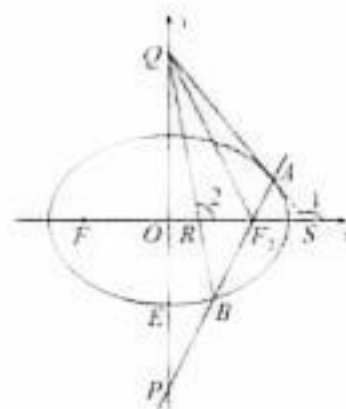
② 假设存在直线 l , 设直线 l 方程为 $x = my + 2$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ x = my + 2, \end{cases} \quad \text{消去 } x, \text{ 得 } (m^2 + 2)y^2 + 4my - 4 = 0,$$

$\Delta > 0$ 恒成立.

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{-4m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = \frac{-4}{m^2 + 2}, \therefore (y_1 - y_2)^2 = (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 = \frac{32(m^2 + 1)}{(m^2 + 2)^2}$$

如图, 延长 QA 交 x 轴于点 S , 若 Q, R, F_2, A 四点共圆, 则 $\angle AF_2S = \angle AQR$ 11分



$$\because \tan \angle AF_2S = \frac{1}{m}, \therefore \tan \angle AQR = \frac{1}{m}$$

$$\angle AQR = \angle 1 - \angle 2, \therefore \tan \angle AQR = \tan(\angle 1 -$$

$$\angle 2) = \frac{\tan \angle 1 - \tan \angle 2}{1 + \tan \angle 1 \cdot \tan \angle 2} = \frac{k_{QA} - k_{QR}}{1 + k_{QA} \cdot k_{QR}} \quad (\text{此步骤不推理不扣分})$$

$$\text{由 } k_{QA} = \frac{y_1 - \frac{2}{m}}{m y_1 + 2}, k_{QR} = \frac{y_2 - \frac{2}{m}}{m y_2 + 2} \text{ 得 } \tan \angle AQR$$

$$= \frac{4(y_1 - y_2)}{(m^2 + 1)y_1 y_2 + \left(2m - \frac{2}{m}\right)(y_1 + y_2) + 4 + \frac{1}{m^2}}$$

$$\therefore \frac{4(y_1 - y_2)}{(m^2 + 1)y_1 y_2 + \left(2m - \frac{2}{m}\right)(y_1 + y_2) + 4 + \frac{1}{m^2}} =$$

$$\frac{1}{m}, \therefore \frac{1}{m} = \frac{16\sqrt{2m^2 + 2}}{16 + \frac{8}{m^2} - 8m}, \therefore 2m\sqrt{2m^2 + 2} = 2 +$$

$$\frac{1}{m^2} - m^2, \dots \dots \dots 15 \text{ 分}$$

由点 P 在点 E 下方得 $-\frac{1}{m} < -2, \therefore 0 < m < 1$.

记 $f(m) = 2m\sqrt{2m^2+2} + m^2 - \frac{1}{m^2} - 2, 0 < m < 1$.

$$\therefore f'(m) = 2\sqrt{2m^2+2} + \frac{4m^2}{\sqrt{2m^2+2}} + 2m + \frac{2}{m^3}$$

$$> 0, \text{ 又 } f\left(\frac{1}{2}\right) < 0, f(1) > 0,$$

$\therefore$ 存在直线 l , 条数为 1 条. $\dots \dots \dots 17 \text{ 分}$

$$19. \text{ 解: (1) 当 } t=4 \text{ 时, } \left| \frac{2\cos 4}{1} \right| = \left| \frac{\cos 4}{2} \right| = -1, \dots \dots \dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{当 } t=5 \text{ 时, } \left[\frac{2\cos 5}{-1} \right] = 0, \dots \dots \dots 4 \text{ 分}$$

(2) ① 由条件 $g(x) = \frac{40}{\sqrt{x+45} + \sqrt{x+5}}$ 可知, 当

$x > 0$ 时, $g(x)$ 连续且单调递减. $\dots \dots \dots 5 \text{ 分}$

$$\because x_1 = 5, \therefore x_2 = g(x_1) = g(5), \forall g(4) = 4,$$

$$\therefore g(5) < g(4) = 4, \text{ 又 } g(5) > 3.9, \therefore 3.9 < g(5) < 4, \text{ 即 } 3.9 < x_2 < 4.$$

$$\because x_3 = g(x_2), 3.9 < x_2 < 4, \therefore g(3.9) > g(x_2) > g(4), \text{ 又 } g(4) = 4, g(3.9) < 4.1, \therefore 4 < x_3 < 4.1.$$

$$\because x_4 = g(x_3), 4 < x_3 < 4.1, \therefore g(4) > g(x_3) > g(4.1), \text{ 又 } g(4) = 4, g(4.1) > 3.9, \therefore 3.9 < x_4 < 4.$$

同理, 可得 $4 < x_5 < 4.1, \therefore$ 依此规律, 归纳可得 $x_{2t} \in (3.9, 4), x_{2t+1} \in (4, 4.1), t \in \mathbf{N}^+$

下面用数学归纳法证明此归纳结论:

当 $t=1$ 时, $x_2 \in (3.9, 4), x_3 \in (4, 4.1)$.

假设当 $t=k(k \in \mathbf{N}^+)$ 时, $x_{2k} \in (3.9, 4), x_{2k+1} \in (4, 4.1)$.

$$\text{则当 } t=k+1 \text{ 时, } x_{2k+2} = x_{2k+1} = x_{2k+1} = g(x_{2k+1}) \in (g(4.1), g(4)) \subset (3.9, 4),$$

$$x_{2k+3} = x_{2k+2} = g(x_{2k+2}) \in (g(4), g(3.9)) \subset (4, 4.1).$$

综上所述, $x_{2t} \in (3.9, 4), x_{2t+1} \in (4, 4.1)$, 对 $\forall t \in \mathbf{N}^+$ 成立. (不用数学归纳法证明不扣分) $\dots \dots \dots 9 \text{ 分}$

$$\therefore \cos x_1 \in (0, 1), \cos x_2 \in (-1, 0), n \geq 2, n \in$$

$$\mathbf{N}^+, \therefore \left[\frac{2\cos x_1}{1} \right] = 0, \left[\frac{2\cos x_2}{-1} \right] = -1, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^+$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n [f(x_i)] = 1 - n, n \in \mathbf{N}^+, \left\{ \begin{array}{l} \text{或 } \sum_{i=1}^n [f(x_i)] \\ = \begin{cases} 0, n=1, \\ 1-n, n \geq 2, \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^+ \end{cases} \end{array} \right. \dots \dots \dots 10 \text{ 分}$$

② 设 $\varphi(x) = x + g(x), x > 0, \varphi'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+45}} - \frac{1}{2\sqrt{x+5}} > 0$ 恒成立, $\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $\varphi(x)$ 单调递增. $\dots \dots \dots 11 \text{ 分}$

$$\because \varphi(4) = 8, \text{ 由 ① 知 } x_{2t} < 4, x_{2t+1} > 4, t \in \mathbf{N}^+, \text{ 且 } x_1 > 4, \varphi(x_1) = x_1 + x_2 > 8,$$

$$\therefore \varphi(x_{2t+1}) > \varphi(4) = 8, \varphi(x_{2t}) < \varphi(4) = 8, t \in \mathbf{N}^+ \dots \dots \dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } [x_1] = 5,$$

当 $n=2t(t \in \mathbf{N}^+)$ 时, 由 $\varphi(x) = x + g(x)$ 得 $\varphi(x_i) = x_i + g(x_i) = x_i + x_{i+1}$.

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \dots + (x_{2t-1} + x_{2t}) = \varphi(x_1) + \varphi(x_3) + \dots + \varphi(x_{2t-1}) > 8t = 4n.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5) + \dots + (x_{2t-2} + x_{2t-1}) + x_{2t} = x_1 + \varphi(x_2) + \varphi(x_4) + \dots + \varphi(x_{2t-2}) + x_{2t} < 5 + 8(t-1) + 4 = 8t + 1 = 4n + 1.$$

$$\therefore \left[\sum_{i=1}^n x_i \right] = 4n, \dots \dots \dots 14 \text{ 分}$$

同理, 当 $n=2t+1(t \in \mathbf{N}^+)$ 时,

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \dots + (x_{2t-1} + x_{2t}) + x_{2t+1} = \varphi(x_1) + \varphi(x_3) + \dots + \varphi(x_{2t-1}) + x_{2t+1} > 8t + 4 = 4n.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5) + \dots + (x_{2t-2} + x_{2t-1}) + (x_{2t} + x_{2t+1}) = x_1 + \varphi(x_2) + \varphi(x_4) + \dots + \varphi(x_{2t-2}) < 5 + 8t = 4n + 1.$$

$$\therefore \left[\sum_{i=1}^n x_i \right] = 4n, \dots \dots \dots 16 \text{ 分}$$

$$\text{综上所述, } \left[\sum_{i=1}^n x_i \right] = \begin{cases} 5, n=1, \\ 4n, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^+ \end{cases} \dots \dots \dots 17 \text{ 分}$$

多维细目表

题型	题号	分值	必备知识	学科素养						预估难度		
				数学 抽象	逻辑 推理	数学 建模	直观 想象	数学 运算	数据 分析	易	中	难
选择题	1	5	集合的运算					✓		✓		
选择题	2	5	复数的运算及模的性质					✓		✓		
选择题	3	5	基本不等式、对数运算					✓		✓		
选择题	4	5	平面向量基本定理	✓				✓		✓		
选择题	5	5	数列通项公式及最大项		✓			✓			✓	
选择题	6	5	三角函数的图象与性质		✓			✓	✓	✓		
选择题	7	5	双曲线的定义及综合		✓		✓	✓			✓	
选择题	8	5	函数的零点		✓		✓	✓				✓
选择题	9	5	统计基础					✓	✓	✓		
选择题	10	6	函数的基本性质		✓			✓			✓	
选择题	11	6	立体几何中的组合体问题		✓		✓	✓				✓
填空题	12	5	二项式定理					✓		✓		
填空题	13	5	抛物线的定义及弦长					✓		✓		
填空题	14	5	直线与圆中的最值问题		✓		✓	✓				✓
解答题	15	13	三角变换与解三角形				✓	✓		✓		
解答题	16	15	二项分布与古典概型计算		✓	✓		✓		✓		
解答题	17	15	点线面位置关系与空间角		✓		✓	✓			✓	
解答题	18	17	椭圆综合		✓		✓	✓				✓
解答题	19	17	导数与数列综合		✓			✓				✓