宁德市 2026 届高中毕业班五月份质量检测

数学试题

（共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、选择题：本题共 8 小题，每题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $S=\{a \mid 1\le a\le 3\}$，集合 $T=\{-1,0,1,2,3,4\}$，则 $S\cap T$ 中元素的个数为

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

2. 复数 $z=2+i$，$\bar{z}$ 为 z 的共轭复数，则 $z\cdot\bar{z}=$

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. 3　　D. 5

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,m)$．若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{a}$，则 $m=$

A. -2　　B. 0　　C. 2　　D. 3

4. 设甲：$\forall x>0, x+\dfrac{4}{x}>a$；乙：$\log_2 a<2$，则甲是乙的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 若 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0, 0\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 4π，且 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\varphi=$

A. 0　　B. $\dfrac{\pi}{6}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{3}$

6. 直线 l：$mx+y=m+2$ 被圆 O：$x^2+y^2=16$ 截得的弦长的最小值为

A. $\sqrt{11}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{11}$　　D. $4\sqrt{3}$

7. 已知 F_1，F_2 分别是双曲线 E：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的左、右焦点，过 F_1 作 E 的渐近线的垂线，垂足为 M．若 $|MF_2|=3b$，则 E 的离心率为

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

8. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，若 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，当 $|x_1| < |x_2|$ 时，$f(x_1) < f(x_2)$，称函数 $f(x)$ 具有性质 M，则下列函数具有性质 M 的是

A. $f(x) = x + \sin x$

B. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^3 + 1, & x > 0. \end{cases}$

C. $f(x) = \left|\frac{1}{2^x + 1} - \frac{1}{2}\right|$

D. $f(x) = (x - 1)e^x$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 某市生态环境局记录了 4 月 1-7 日连续 7 天的 PM2.5 预测误差（预测误差 = 实际浓度 − 预测浓度，单位：$\mu g/m^3$），如下表：

日期	1	2	3	4	5	6	7
预测误差	-1	2	0	1	3	2	2

则以下结论正确的是

A. 这组数据的中位数是 1

B. 这组数据的众数是 2

C. 若第 8 天的预测误差为 1，则加入该数据后的平均数不变

D. 若第 8 天的预测误差为 1，则加入该数据后的方差变小

10. 设抛物线 $\Gamma: y^2 = 4x$ 的焦点为 F，准线为 l，过 F 的直线交 Γ 于 A，B 两点，过 A，B 作 l 的垂线，垂足分别为 A_1，B_1，则

A. $|AF| = |AA_1|$

B. $|AB|$ 的最小值为 2

C. 若 M 为 A_1B_1 的中点，则 $|MF| = \frac{1}{2}|A_1B_1|$

D. 点 $(3,0)$ 到 Γ 上点的距离的最小值为 3

11. 已知圆台形状的容器的上、下底面半径分别为 1，2，母线长为 2. 若容器壁厚度忽略不计，则

A. 该容器的侧面积为 6π

B. 该容器的容积为 $\frac{14\pi}{3}$

C. 该容器可以整体放入表面积为 16π 的球形容器内

D. 能将 7 个半径为 $\frac{1}{2}$ 的球平铺放入该容器内

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 曲线 $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线的斜率为 ______

13. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列，$S_3=3$，$S_5=15$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=$ ______

14. 点 O，A，B，M，N 在同一个平面内，满足 $OM=2ON=4$，$OB=\sqrt{2}OA=2\sqrt{2}$，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=4$．记 A，B 到直线 MN 的距离分别为 d_1，d_2，则 d_1+d_2 的最大值为

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. （13 分）已知数列 $\{a_n\}$，$a_1=3$，且 $a_n+a_{n+1}=2n+1$

（1）求证：$\{a_n-n\}$ 是等比数列；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 29 项和 S_{29}．

16. （15 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，直线 $l:x=my+1$ 交 C 于 P，Q 两点．当 $m=0$ 时，$|PQ|=3$．

（1）求 C 的方程；

（2）过 P 作直线 $x=4$ 的垂线，垂足为 N，点 $M\left(\frac{5}{2},0\right)$，证明：$Q$，$M$，$N$ 三点共线

17. （15 分）如图 1，平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$BC\perp CD$，$BC=CD$，$BD=2AD=2\sqrt{2}$．

（1）求 AC 的长；

（2）将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折到 $\triangle PBD$，连结 CP，如图 2．当 $CP=\sqrt{6}$ 时，求直线 CP 与平面 PBD 所成角的正弦值

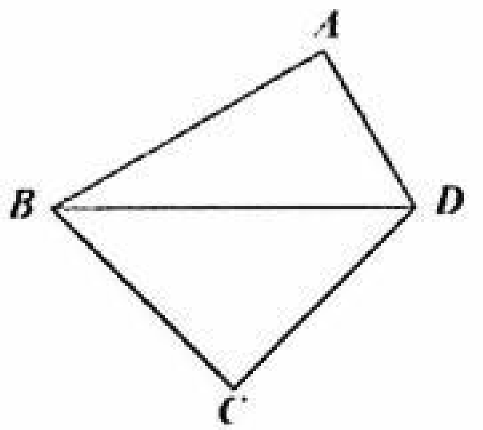


图 1

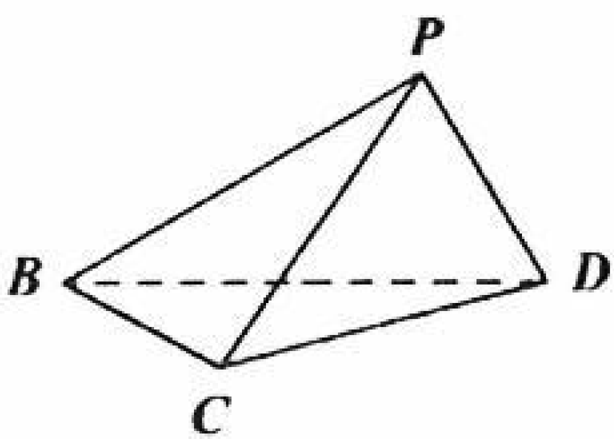


图 2

18. （17 分）把学生考试中解答题结果正确、无明显逻辑错误，但书写步骤不规范、缺少必要文字说明、卷面潦草、得分要点缺失的解答定义为“拙解”．为优化考试阅卷效率，某市教育学院引入 AI 智能阅卷系统，对数学试卷采用两台 AI_1，AI_2 初评－人工仲裁的方式阅卷．按扣分评分：“拙解”扣 1 分、2 分、3 分．AI_1，AI_2 初评与人工仲裁扣分概率均相同，且相互独立，各扣分概率如下表：

扣分	1	2	3
概率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

记系统 AI_1，AI_2 的扣分分别为 X_1，X_2，仲裁扣分为 X_3，扣分规则如下：

①若 $|X_1-X_2|\le 1$，取 X_1，X_2 的平均数为最终扣分；

②若 $|X_1-X_2|>1$，启动人工仲裁，取 X_1，X_2 中与 X_3 更接近者，与 X_3 计算平均数为最终扣分，若 $|X_3-X_1|=|X_3-X_2|$，则取 X_1，X_2 中较小者与 X_3 计算平均数为最终扣分．

根据以上材料，解决如下问题：

（1）设某同学一道“拙解”的最终扣分为随机变量 X，求 $P(X=1.5)$；

（2）该同学本次考试 5 道解答题全部为“拙解”，各题扣分相互独立．

（i）记单题扣 2 分的题目数为 Y_1，求 $P(Y_1=4\mid Y_1\ge 3)$；

（ii）记单题扣分不高于 2 分的题目数为 Y_2，若该同学通过规范书写，可将单题扣分不高于 2 分的概率提升至 q，为使 $P(Y_2>4)>0.9$，求 q 的最小值（结果保留两位小数）．

（参考数据：$0.88^4\approx 0.60$，$0.88^5\approx 0.53$，$0.89^4\approx 0.63$，$0.89^5\approx 0.56$）

19. （17 分）已知函数 $f(x)=a\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x$．

（1）若 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处取得极值，求 a 的值，并指出它是极大值还是极小值；

（2）当 $a>0$ 时，证明：$f(x)<\frac{(a+1)^2}{3}$；

（3）当 $a=1$ 时，若 $x\ge 0$，$f(x)\le k\ln(x+1)$，求整数 k 的最小值．

宁德市2026届高中毕业班质量检测

数学试题参考答案及评分标准

说明：

1.本解答指出了每题要考察的主要知识和能力，给出一种或几种解法供参考．如果考生的解法与给出的解法不同，可根据试题的主要考察内容比照评分标准确定相应的评分细则．

2.对解答题，当考生的解答在某一步出现错误，但整体解决方案可行且后续步骤没有出现推理或计算错误，则错误部分依细则扣分，并根据对后续步骤影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过后续部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3.解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4.解答题只给整数分数，填空题不给中间分．

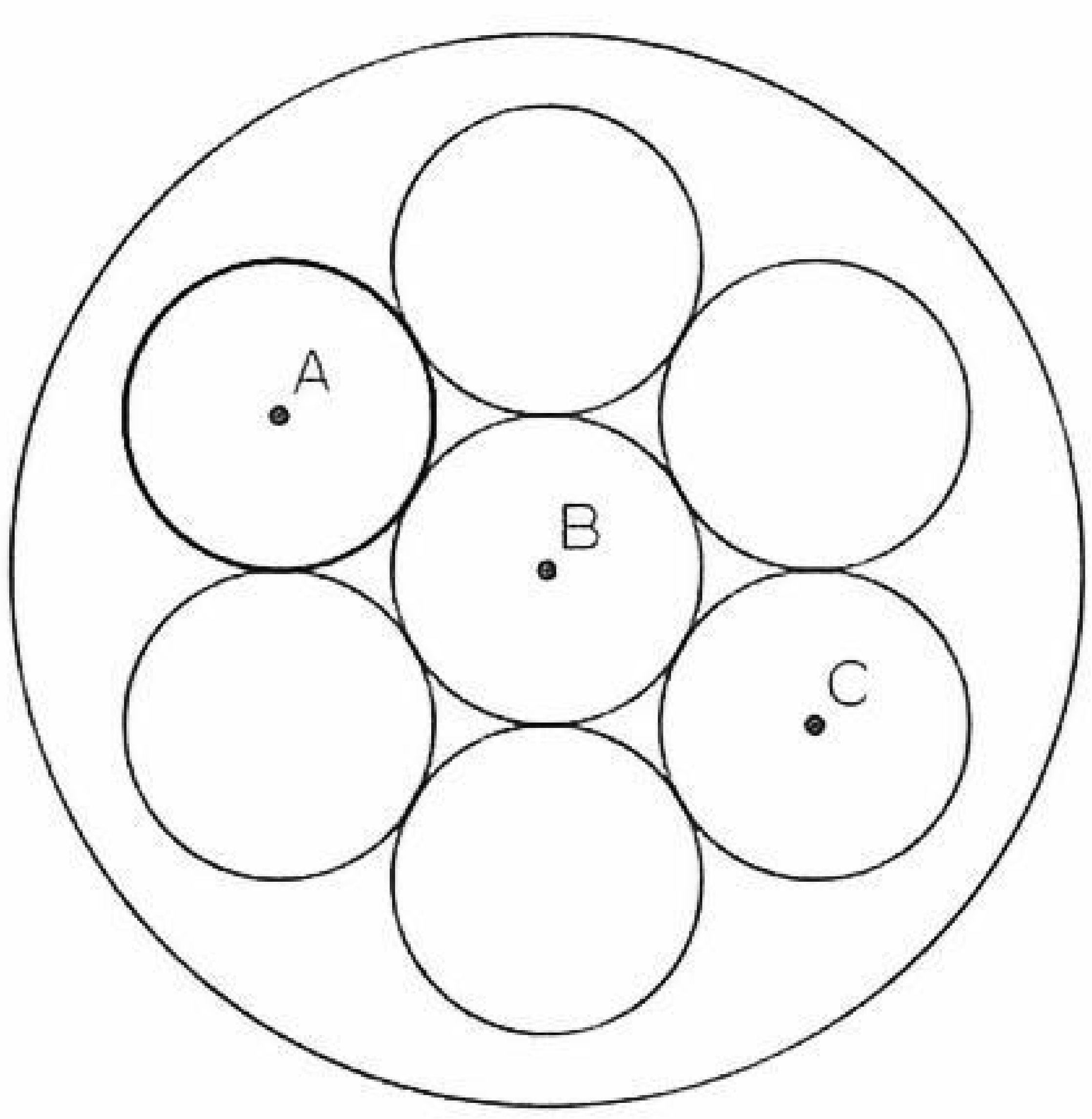
一、选择题：本题考查基础知识和基本运算，每小题5分，满分40分．

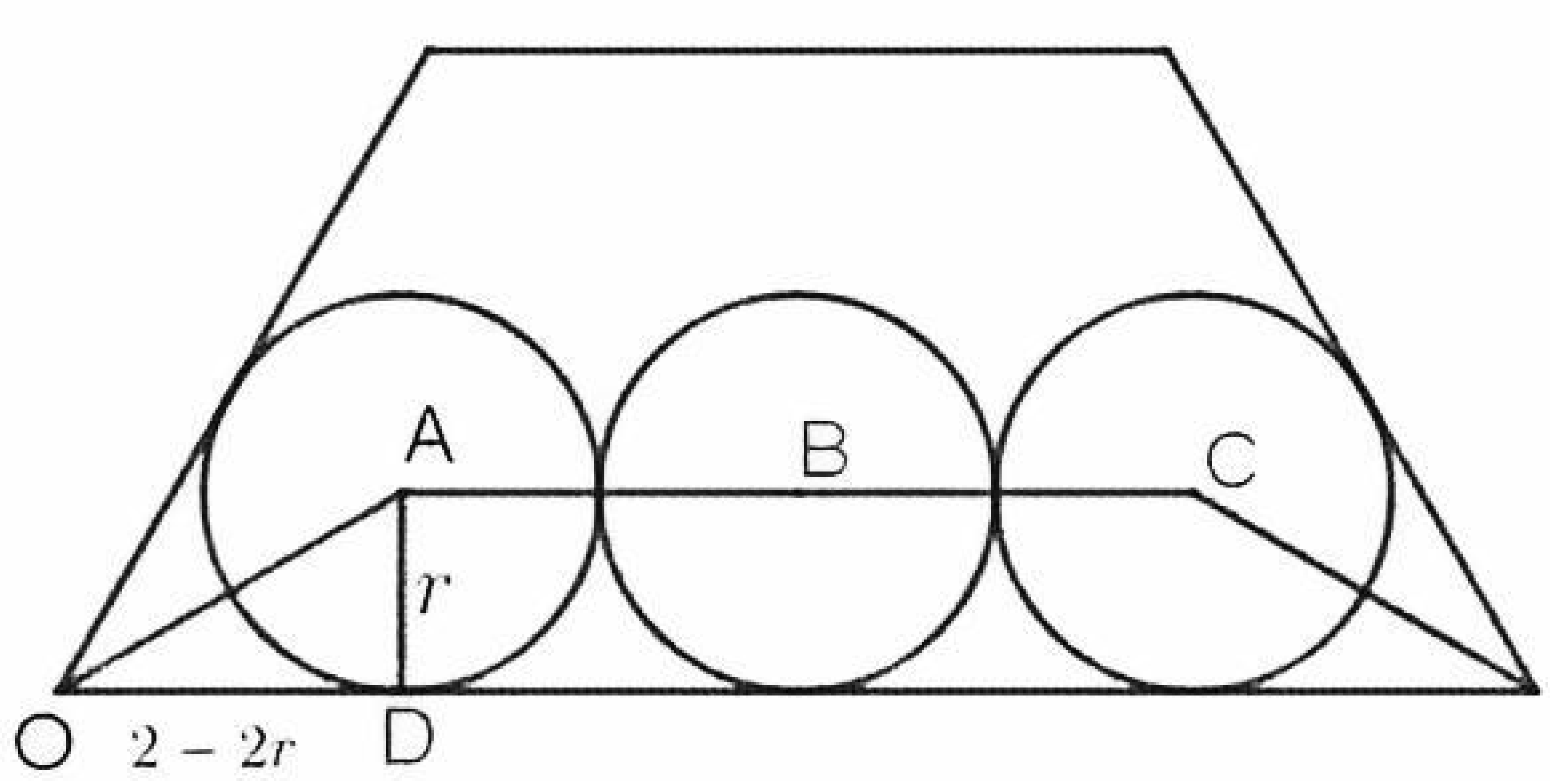
1．C　2．D　3．A　4．B　5．B　6．C　7．A　8．C

二、选择题：**本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．**

9． BCD　10．AC　11．ACD

11.D 解析：这 7 个球按如下方式放入该容器．当球与圆台相切时，过点 A,B,C 作圆台的轴截面．则$\dfrac{r}{2-2r}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，此时$r=4-2\sqrt{3}>\dfrac{1}{2}$，故能将 7 个半径为$\dfrac{1}{2}$的球平铺放入该容器





三、填空题：本题考查基础知识和基本运算，每小题5分，满分15分．

12．2　　13．$2n-3$　　14．$\dfrac{18\sqrt{5}}{5}$

14.解析：由$\overline{OB}\cdot\overline{AB}=4$，得$\overline{OB}\cdot(\overline{OB}-\overline{OA})=8-\overline{OA}\cdot\overline{OB}=4$，得$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=4$

设 A, B 的中点为 C, 则 $\overline{OC}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})$, $\overline{OC}^2=\frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB})^2=\frac{1}{4}\times(4+8+2\times4)=5$

所以 C 的轨迹为以 O 为圆心, $\sqrt{5}$ 为半径的圆. 又 O 到直线 MN 的距离为 $\frac{2\times4}{2\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$,

故 C 到直线 MN 的距离的最大值为 $\frac{9\sqrt{5}}{5}$, 则 d_1+d_2 的最大值为 $\frac{18\sqrt{5}}{5}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（13 分）本题主要考查递推数列、等差数列、等比数列及数列求和等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力等，考查化归与转化思想、分类与整合思想等，考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．满分 13 分．

解法一：（1）因为 $a_n+a_{n+1}=2n+1$, 故 $a_{n+1}-(n+1)=-(a_n-n)$ ……………………………3 分

又 $a_1=3$, 得 $a_1-1=2$ ……………………………………………5 分

故 $\{a_n-n\}$ 是以 2 为首项, -1 为公比的等比数列. ……………………………………………6 分

（2）由(1)得 $a_n-n=2\times(-1)^{n-1}$, 故 $a_n=2\times(-1)^{n-1}+n$ ……………………………………9 分

所以 $S_{29}=2\times\frac{1-(-1)^{29}}{1-(-1)}+\frac{1+29}{2}\times29=2+15\times29=437$ ……………………………………13 分

解法二：（1）同解法一；

（2）$S_{29}=(2+1)+(-2+2)+(2+3)+\cdots+(-2+28)+(2+29)$ ……………………8 分

$=(3+5+\cdots+31)+(0+2+\cdots26)=\frac{3+31}{2}\times15+\frac{0+26}{2}\times14=17\times15+13\times14=437$ ………13 分

16．（15 分）本题主要考查椭圆、直线与椭圆的位置关系等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力和创新能力，考查化归与转化思想、数形结合思想，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性，满分 15 分．

解法一：（1）因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，………………………………1 分

又 $c^2=a^2-b^2$，所以 $a=2c$，$b=\sqrt{3}c$ ……………………………………………………2 分

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$ ……………………………………………………………3 分

当 $m=0$ 时，l 的方程为 $x=1$，代入椭圆 C 的方程得：$y^2=3c^2-\frac{3}{4}$ ……………………5 分

又因为$|PQ|=3$，所以$y^2=3c^2-\frac{3}{4}=(\frac{3}{2})^2$

所以解得$c=1$，……………………………………………………………………………5分

故椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$……………………………………………………………6分

（2）设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则$N(4,y_1)$

由$\begin{cases}x=my+1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$消去$x$得：$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，………………………………………8分

则$y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$，…………………………………………………………9分

$\overline{QM}=(\frac{5}{2}-x_2,-y_2)=(\frac{3}{2}-my_2,-y_2)$，$\overline{NM}=(-\frac{3}{2},-y_1)$,………………………………………11分

因为$(-\frac{3}{2})(-y_2)-(\frac{3}{2}-my_2)(-y_1)=\frac{3}{2}(y_1+y_2)-my_1y_2$

$=\frac{3}{2}(\frac{-6m}{3m^2+4})-m\frac{-9}{3m^2+4}=\frac{-9m+9m}{3m^2+4}=0$……………………………………………………14分

所以$\overline{QM}\,//\,\overline{NM}$，且有公共点$M$，故$Q$，$M$，$N$三点共线. ……………………………15分

解法二：（1）同解法一；

（2）设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则$N(4,y_1)$

由$\begin{cases}x=my+1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$消去$x$得：$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，………………………………………8分

则$y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$，…………………………………………………………9分

$k_{QM}=\frac{-y_2}{\frac{5}{2}-x_2}=\frac{2y_2}{2my_2-3}$，$k_{NM}=\frac{-y_1}{-\frac{3}{2}}=\frac{2y_1}{3}$,………………………………………11分

因为$k_{QM}-k_{NM}=\frac{2y_2}{2my_2-3}-\frac{2y_1}{3}=\frac{6y_2-2y_1(2my_2-3)}{3(2my_2-3)}$

$=\frac{6(y_1+y_2)-4my_1y_2}{3(2my_2-3)}=\frac{6\times\frac{-6m}{3m^2+4}-4m\times\frac{-9}{3m^2+4}}{3(2my_2-3)}=0$……………………………………14分

所以$k_{QM}=k_{NM}$，且有公共点M，故Q，M，N三点共线. ....15 分

解法三：（1）同解法一；

（2）设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则$N(4,y_1)$

由$\begin{cases}x=my+1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$消去$x$得：$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，..................................8 分

则$y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$，..9 分

直线QN的方程为$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-4}(x-4)$，

即$y=\dfrac{y_2-y_1}{my_2-3}(x-4)+y_1$，..11 分

令$x=\dfrac{5}{2}$得$y=\dfrac{y_2-y_1}{my_2-3}(\dfrac{5}{2}-4)+y_1$，

即$y=\dfrac{-3(y_2-y_1)+2y_1(my_2-3)}{2(my_2-3)}=\dfrac{-3(y_2+y_1)+2my_1y_2}{2(my_2-3)}$，

因此$y=\dfrac{3\times\dfrac{-6m}{3m^2+4}-2m\times\dfrac{-9}{3m^2+4}}{2(2my_2-3)}=0$，...14 分

故点$M(\dfrac{5}{2},0)$在直线QN上，所以Q，M，N三点共线. ....15 分

17. （15 分）本小题主要考查空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，空间角的计算等基础知识，考查空间想象能力、逻辑推理能力、运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想等，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性与综合性. 满分 15 分.

解法一：（1）平面四边形$ABCD$中，$AB\perp AD$，$BC\perp CD$；

因为$BC=CD$，所以$\triangle BCD$为等腰直角三角形，

在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，因为$AB=\sqrt{6}$，$AD=\sqrt{2}$，

所以$\angle ABD=30^\circ$，$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{6+2}=2\sqrt{2}$，所以$BC=CD=2$................2 分

在$\triangle ABC$中，$\cos\angle ABC=\cos(\angle ABD+\angle CBD)=\cos\left(30^\circ+45^\circ\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，............4 分

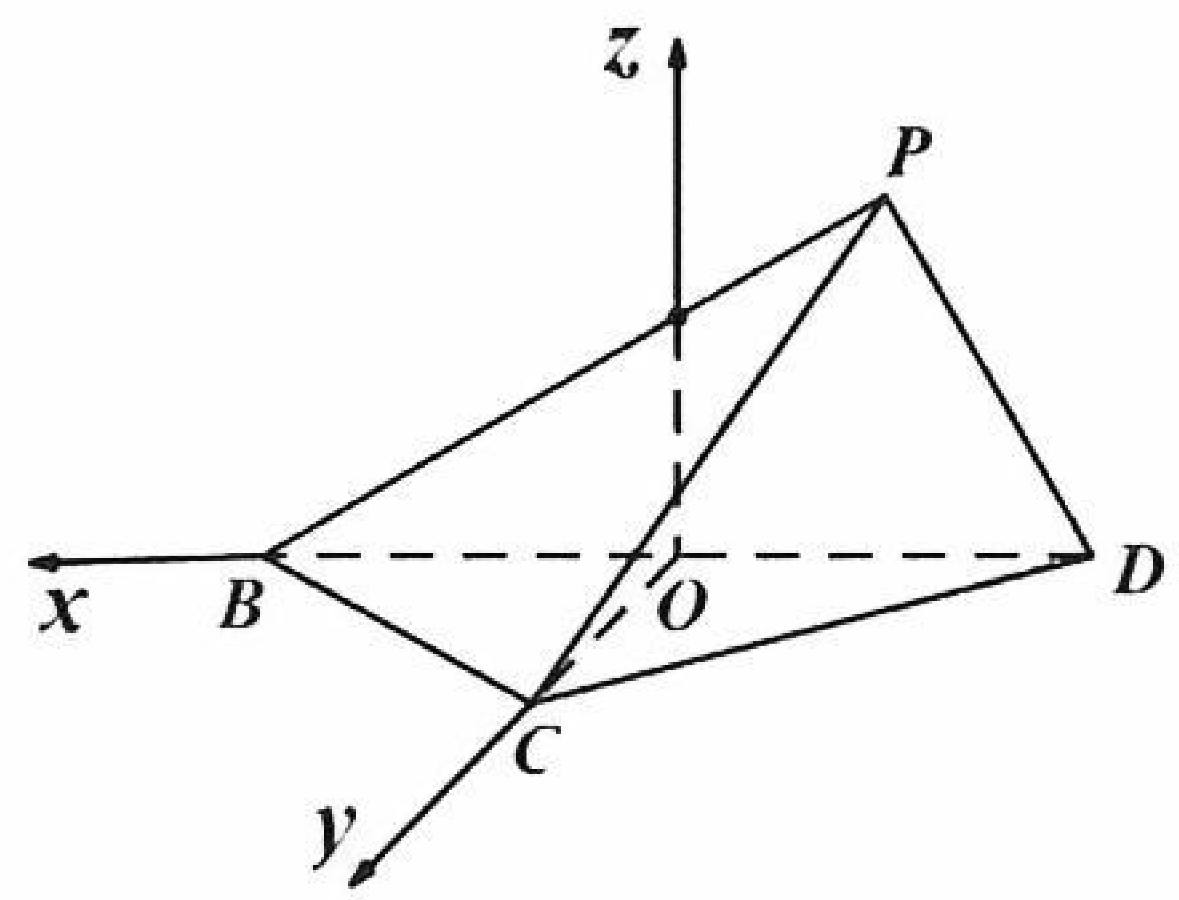
由余弦定理得

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\angle ABC = 6+4-2\times\sqrt{6}\times 2\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 4+2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}+1\right)^2$，

所以 $AC = \sqrt{3}+1$ ……………………………………………………………………7 分

（2）以 BD 的中点 O 为原点，以 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 为 x，y 轴正方向，以垂直于平面 BCD 的直线 Oz 为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，………………………………8 分

则 $B\left(\sqrt{2},0,0\right)$，$C\left(0,\sqrt{2},0\right)$，$D\left(-\sqrt{2},0,0\right)$.



设 $P(x,y,z)$，由（1）可知，$PB=\sqrt{6}$，$PD=\sqrt{2}$，

又因为 $CP=\sqrt{6}$，

所以 $\begin{cases}\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2+z^2=6,\\ x^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2+z^2=6,\\ \left(x+\sqrt{2}\right)^2+y^2+z^2=2,\end{cases}$

解得 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$z=1$，即 $P\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，…………………………10 分

则 $\overrightarrow{CP}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},1\right),\overrightarrow{BP}=\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right),\overrightarrow{BD}=\left(-2\sqrt{2},0,0\right)$……………………11 分

设平面 PBD 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，设直线 CP 与平面 PBD 所成角为 θ，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-2\sqrt{2}x=0\end{cases}$，取 $y=\sqrt{2}$，则 $z=1$，$x=0$，

所以，$\vec{n}=\left(0,\sqrt{2},1\right)$，……………………………………………………………13 分

所以 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{CP},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{CP}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CP}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

所以直线 CP 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ………………………………………………15 分

解法二：（1）平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$BC\perp CD$；

所以平面四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形

又因为 $BC=CD$，所以 $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形，

所以 BD 是圆的直径，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AB=\sqrt{6}$，$AD=\sqrt{2}$，

所以 $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{6+2}=2\sqrt{2}$，$\angle ABD=30^\circ$，$\angle ADB=60^\circ$，…………………2 分

$\sin\angle ABC=\sin\left(\angle ABD+\angle CBD\right)=\sin\left(30^\circ+45^\circ\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ …………………………4 分

由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{\sin\angle BCA}$，又 $\angle BCA=\angle ADB=60^\circ$，

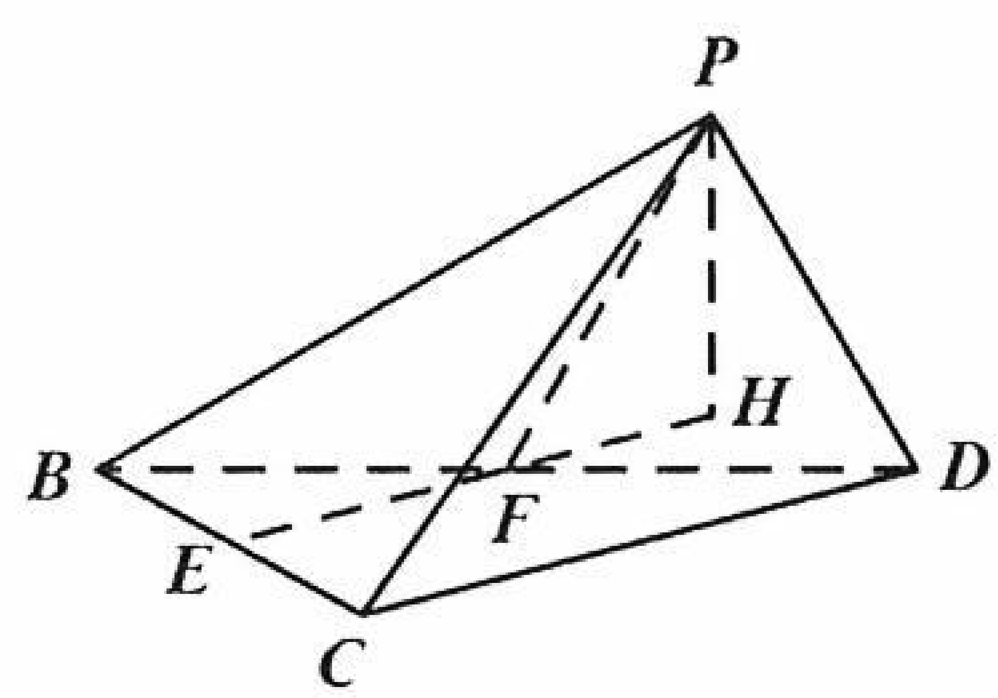
故 $AC=\dfrac{AB\sin\angle ABC}{\sin\angle BCA}=\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$ ……………………………………………7 分

(2)在 $Rt\Delta PBD$ 中，$PD=\sqrt{2}$，$BD=2\sqrt{2}$，故 $PB=\sqrt{6}$ ………………………………………8 分

由 $PC=\sqrt{6}$，取 BC 的中点 E，BD 的中点 F. 连接 EF，则 $PE\perp BC$，$EF\perp BC$.

因为 $PE\cap EF=E$，所以 $BC\perp$ 平面 PEF.

因为 $BC\subset$ 平面 BCD，所以平面 $BCD\perp$ 平面 PEF ……10 分



在 ΔPEF 中，$PE=\sqrt{5}$，$EF=1$，$PF=\sqrt{2}$，所以

$\cos\angle EFP=\dfrac{1+2-5}{2\times1\times\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

因为 $\angle EFP\in(0,\pi)$，所以 $\angle EFP=\dfrac{3\pi}{4}$ ……………………………………………………………11 分

过 P 作 $PH\perp EF$ 交 EF 的延长线于 H

则 $PH\perp$ 平面 BCD，且 $PH=PF\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=1$ …………………………………………………12 分

设 C 到平面 PBD 的距离为 h

由 $V_{C-PBD}=V_{P-BCD}$，所以 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\times1$

所以 $h=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ……………………………………………………………14 分

所以直线 CP 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ …………………………15 分

18. （17 分）本小题主要考查统计、条件概率公式、概率的分布及期望、考查数学建模能力、运算求解能力、数据处理能力、应用意识，考查数学抽象、逻辑推理、数学建模、数据分析和数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性．满分 17 分．

(1)某同学一道类解答最终扣分为 1.5 分包括 AI_1 扣 1 分, AI_2 扣 2 分;

AI_1 扣 2 分, AI_2 扣 1 分;

AI_1 扣 1 分, AI_2 扣 3 分, 仲裁扣 2 分;

AI_1 扣 3 分, AI_2 扣 1 分, 仲裁扣 2 分四种情况,

故 $P(X=1.5)=P(X_1=1,X_2=2)+P(X_1=2,X_2=1)+P(X_1=1,X_2=3,X_3=2)+P(X_1=3,X_2=1,X_3=2)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times2=\frac{5}{16}$ ……………………………………………5 分

(2)(ⅰ)因为 $P(X=1)=P(X_1=1,X_2=1)+P(X_1=1,X_2=3,X_3=1)+P(X_1=3,X_2=1,X_3=1)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times2=\frac{3}{32}$ ……………………………………………………………6 分

$P(X=1.5)=\frac{5}{16}$,

$P(X=2)=P(X_1=2,X_2=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ ………………………………………………7 分

单题扣 2 分的概率为 $\frac{1}{4}$, $Y_1 \quad B(5,\frac{1}{4})$

$P(Y_1=3)=C_5^3(\frac{1}{4})^3\times(\frac{3}{4})^2=\frac{90}{4^5}$

$P(Y_1=4)=C_5^4(\frac{1}{4})^4\times(\frac{3}{4})=\frac{15}{4^5}$

$P(Y_1=5)=C_5^5(\frac{1}{4})^5=\frac{1}{4^5}$ ………………………………………………………………9 分

故 $P(Y_1\geq3)=\frac{106}{4^5}$, $P(Y_1=4\mid Y_1\geq3)=\frac{\frac{15}{4^5}}{\frac{106}{4^5}}=\frac{15}{106}$. ……………………………………… 11 分

(ⅱ)原本单题扣分不高于2分的概率为$\dfrac{21}{32}$，则$\dfrac{21}{32} < q < 1$

由$Y_2 \sim B(5,q)$，有$P(Y_2 \geq 4) = C_5^4 q^4 \times (1-q) + C_5^5 q^5 \geq 0.9$，得$5q^4 - 4q^5 \geq 0.9$ ……………14 分

令$f(q) = 5q^4 - 4q^5$，$f\ (q) = 20q^3 - 20q^4 = 20q^3(1-q) > 0$

故$f(q)$在$(\dfrac{21}{32},1)$单调递增. ……………………………………………………………15 分

又$f(0.88) = 5\times 0.88^4 - 4\times 0.88^5 \approx 5\times 0.60 - 4\times 0.53 = 0.88 < 0.9$

$f(0.89) = 5\times 0.89^4 - 4\times 0.89^5 \approx 5\times 0.63 - 4\times 0.56 = 0.91 > 0.9$

所以q的最小值为0.89. ……………………………………………………………………… 17 分

19．（17 分）本题主要考查导数及其应用、函数的零点和不等式等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力等，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、数形结合思想，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性与综合性．满分 17 分．

解：（1）$f'(x) = a\cos x + \cos 3x$ ………………………………………………………. 1 分

因为$f(x)$在$\dfrac{\pi}{4}$取得极值，所以$f'(\dfrac{\pi}{4}) = a\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$

解得$a=1$……………………………………………………………………………………2 分

当$a=1$时，$f'(x) = \cos x + \cos 3x = 2\cos x\cos 2x = 2\cos x(2\cos^2 x - 1)$ ……………………3 分

x	$(0,\dfrac{\pi}{4})$	$\dfrac{\pi}{4}$	$(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$		极大	

……………………………………………………………………………………………………4 分

所以$f(x)$在$\dfrac{\pi}{4}$取得极大值………………………………………………………………5 分

注：若用$f''(\dfrac{\pi}{4}) = -2\sqrt{2} < 0$，则$f(x)$在$\dfrac{\pi}{4}$取得极大值，扣 1 分.

（2） $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}(\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x)$

$=a\sin x+\frac{1}{3}(3\sin x-4\sin^3 x)=(a+1)\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x$ ……………………………………6 分

令 $t=\sin x$ ，则 $t\in[-1,1]$ ，

$g(t)=(a+1)t-\frac{4}{3}t^3,t\in[-1,1]$ ……………………………………………………………7 分

$g'(t)=a+1-4t^2,t\in[-1,1]$ ，

当 $a\geq 3$ 时， $g'(t)\geq 0$ ，所以 $g(t)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，

$g(t)_{\max}=g(1)=a-\frac{1}{3}$ ………………………………………………………………8 分

由 $(a+1)^3-(3a-1)^2=a(a-3)^2\geq 0$ ，可得 $a-\frac{1}{3}\leq\frac{(a+1)^{\frac{3}{2}}}{3}$ ，所以 $f(x)\leq\frac{(a+1)^{\frac{3}{2}}}{3}$ ………9 分

当 $0\leq a<3$ 时，

$g(t)$ 在 $(-1,-\frac{\sqrt{a+1}}{2})$ 递减， $(-\frac{\sqrt{a+1}}{2},\frac{\sqrt{a+1}}{2})$ 递增， $(\frac{\sqrt{a+1}}{2},1)$ 递减，

$g(t)_{\max}=\max\{g(-1),g(\frac{\sqrt{a+1}}{2})\}$

$g(-1)=-a+\frac{1}{3}$， $(a+1)^3-(3a-1)^2=a(a-3)^2\geq 0$ ，所以 $g(-1)\leq\frac{(a+1)^{\frac{3}{2}}}{3}$ ，

$g(\frac{\sqrt{a+1}}{2})=\frac{(a+1)^{\frac{3}{2}}}{2}-\frac{4}{3}\frac{(a+1)^{\frac{3}{2}}}{8}=\frac{(a+1)^{\frac{3}{2}}}{3}$ ，

综上：当 $a\geq 0$ 时， $f(x)\leq\frac{(a+1)^{\frac{3}{2}}}{3}$. ……………………………………11 分

(3) 令 $h(x)=k\ln(x+1)-\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x,x\geq 0$

$h'(x)=\frac{k}{x+1}-\cos x-\cos 3x,x\geq 0$

$h'(0)=k-2$ ，

当 $k<2$ 时， $h'(0)<0$ ， $\exists\delta_1>0$ ，当 $x\in(0,\delta_1)$ 时， $h'(x)<0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $(0,\delta_1)$ 单调递减， $h(x)<h(0)=0$ ，不合题意舍去……………………13 分

故 $k \geq 2$．

当 $k=2$ 时，$h(x)=2\ln(x+1)-\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x, x \geq 0$

$h'(x)=\frac{2}{x+1}-\cos x-\cos 3x, x \geq 0$

$h''(x)=-\frac{2}{(x+1)^2}+\sin x+3\sin 3x, x \geq 0$

$h''(0)=-2$

所以 $\exists \delta_2>0$，当 $x \in (0,\delta_2)$ 时，$h''(x)<0$，

则 $h'(x)$ 在 $(0,\delta_2)$ 上单调递减，$h'(x)<h'(0)=0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,\delta_2)$ 上单调递减，$h(x)<h(0)=0$，不合题意舍去……………………15 分

当 $k=3$ 时，$h(x)=3\ln(x+1)-\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x, x \geq 0$

$h'(x)=\frac{3}{x+1}-\cos x-\cos 3x, x \geq 0$

当 $x \in [0,\frac{1}{2}]$ 时，$h'(x) \geq 2-\cos x-\cos 3x \geq 0$，

所以 $h(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上单调递增，$h(x) \geq h(0)=0$，符合题意；

当 $x \in (\frac{1}{2},+\infty)$ 时，

由（2）可知，$\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x \leq \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}$

所以 $h(x) \geq 3\ln(\frac{3}{2})-\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}>1-(\frac{8}{9})^{\frac{1}{2}}>0$

综上，整数 k 的最小值为 3. ……………………………………………………17 分