（在此卷上答题无效）

2025-2026学年福州市高三年级三月质量检测

数学试题

（完卷时间：120分钟；满分：150分）

友情提示:请将所有答案填写到答题卡上！请不要错位、越界答题！

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合$A=\{x\in\mathbf{N}\mid 0<x<3\}$，则集合$A$的子集个数为

A．2　　B．3　　C．4　　D．8

2．某种高科技产品开发的支出成本x（单位：万元）与市场销售额y（单位：万元）之间有如下表所示的线性相关关系，y与x的经验回归方程为$\hat{y}=6.5x+27.5$，则支出成本为8万元时，其残差（观测值减去预测值称为残差）为

x	2	4	5	6	8
y	40	50	70	60	80

A．-1.5　　B．1.5　　C．-0.5　　D．0.5

3．设$x\in\mathbf{R}$，则“$x>1$”是“$x^2>1$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．已知椭圆C的两个焦点分别为$F_1(-8,0)$，$F_2(8,0)$，点$(0,6)$在C上.若C上一点M与F_1的距离为6，则M与F_2的距离为

A．10　　B．14　　C．20　　D．26

5．已知$\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$，$\tan\alpha=3\tan\beta$，则$\sin(\alpha-\beta)=$

A．$-\frac{2}{3}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$-\frac{1}{6}$　　D．$\frac{1}{6}$

6．已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy+1$，$f(1)=0$，则$f(6)=$

A．34　　B．35　　C．36　　D．37

7．当$x\in[0,2\pi)$时，函数$f(x)=2\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin x$的零点个数为

A．3　　B．4　　C．6　　D．8

8．甲、乙两人各有三张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字$2,3,5$，乙的卡片上分别标有数字$4,6,10$．两人进行三轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，若两个数字互质，则甲得1分，否则乙得1分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用）．记三轮比赛后甲的总得分为X，则$E(X)=$

A．1　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．2

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9．在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$\angle DAB=\angle DAA_1=\angle BAA_1=60°$，$AB=AD=AA_1=3$，则

A．$A_1D\perp AC$

B．$BD\perp$平面ACC_1A_1

C．直线A_1B_1与直线BC所成角为$60°$

D．点A_1到平面$ABCD$的距离为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

10．设函数$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$，则

A．函数$y=f(x+1)+10$是奇函数

B．$f(x)$在区间$(-1,1)$上单调递增

C．直线$y=0$，$y=6$与曲线$y=f(x)$的公共点个数不相等

D．斜率为-12的直线与曲线$y=f(x)$有且仅有一个公共点

11．已知抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，直线l：$x=my-2$与C交于A,B两点，l与x轴交于点P，则

A．$|PA|\cdot|PB|$的取值范围为$(8,+\infty)$

B．$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}$的取值范围为$\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{1}{2}\right)$

C．若$\angle AFB=90°$，则$\triangle AFB$的面积为9

D．若$\angle AFB=90°$，则$\triangle AFB$的周长为$15+3\sqrt{21}$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12．若$(x-2\mathrm{i})\mathrm{i}=y+\mathrm{i}$（$x,y\in\mathbf{R}$，i为虚数单位），则$x+y=$__________．

13．已知圆锥的顶点为P，底面圆心为O，PA,PB为圆锥的母线，$\angle AOB=120°$，且二面角$P-AB-O$为$60°$．若$\triangle PAB$的面积等于$6\sqrt{3}$，则圆锥的体积为__________．

14．已知向量$\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,1)$，$\boldsymbol{c}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$．若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}]$（其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数，如：$[3.1]=3$，$[-1.7]=-2$），则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$的取值范围为__________．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）

记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$S_9=90$，$a_3=14$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设函数$f(x)=2^{x+2}-2^{-x-2}+1$，记$b_n=f(a_n)$，求数列$\{b_n\}$的前 21 项和T_{21}．

16．（15 分）

已知函数$f(x)=(4x+2)\ln x+a$．

（1）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,1)$处的切线方程；

（2）若函数$g(x)=(x+2)^2-f(x)$有且仅有一个零点，求a的值．

17．（15 分）

已知双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右顶点为$A$．请从条件①、②、③中选择两个条件作为已知，使得$C$存在且唯一．

条件①：C的离心率为2；

条件②：C的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$；

条件③：C的右焦点与点A的距离为1．

（1）求C的方程；

（2）若过点$P(2,3)$的直线l交C的右支于点M，且$\triangle AMP$的面积为3，求l的方程．

注：如果选择的条件不符合要求，第（1）问得 0 分；如果选择多组符合要求的条件分别解答，按第一组解答计分．

18.（17 分）

如图 1，圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\triangle BCD$ 为等腰直角三角形，且 $\angle BCD=90^\circ$，$AB=\sqrt{6}$，$AD=\sqrt{2}$.

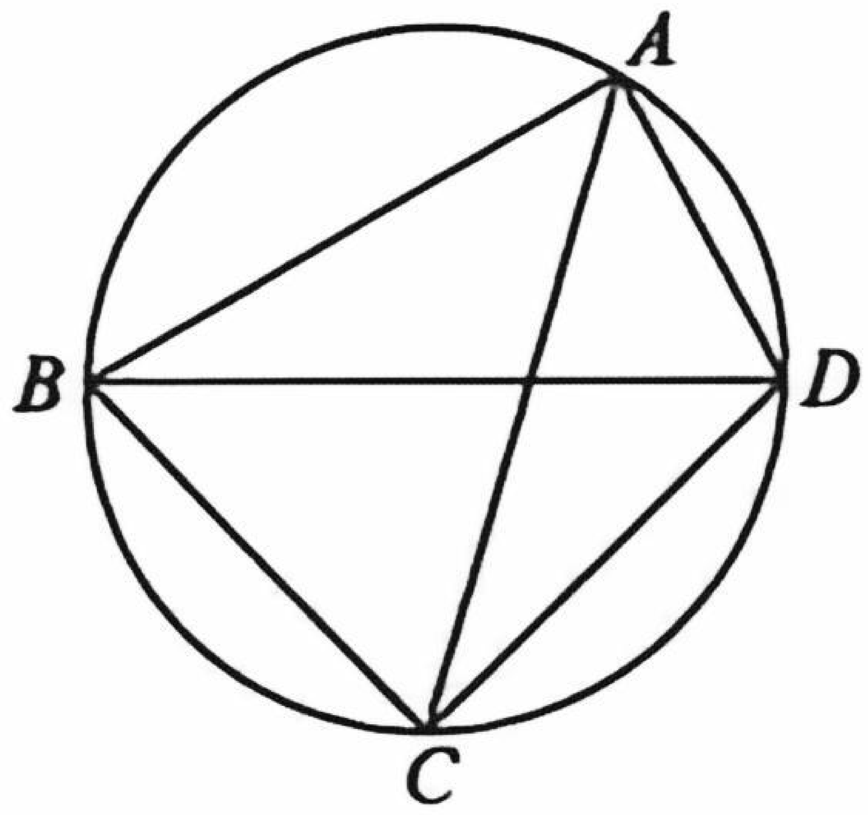


图 1

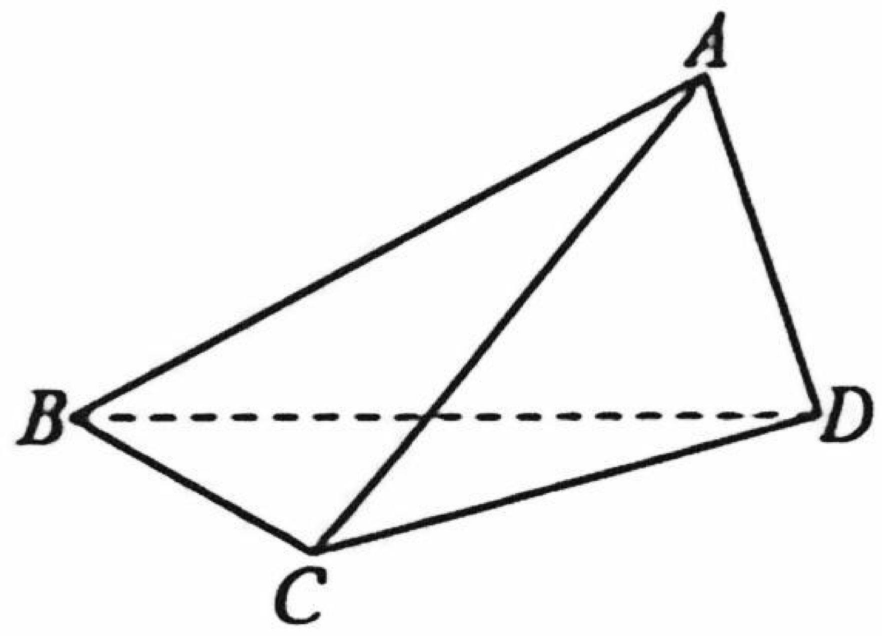


图 2

（1）求 AC 的长；

（2）如图 2，将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折，形成四面体 $ABCD$，当 $AC=\sqrt{6}$ 时，

（i）求直线 AD 与平面 BCD 所成角的正弦值；

（ii）找出一组依次排列的四个相互平行的平面 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，使得 $A\in\alpha_1, D\in\alpha_2$，$C\in\alpha_3, B\in\alpha_4$，且其中每相邻两个平面间的距离都相等，并求出相邻两个平面间的距离.

19.（17 分）

在全球化的现代社会中，物流网络已成为支撑经济发展、促进区域协同的关键基础设施. 物流能否准时送达，将影响到消费者的购物体验，而物流提前送达往往能够超越客户预期，显著提升满意度. 某物流公司每天需要从干线枢纽发送包裹至目的地城市. 从干线枢纽到目的地城市，有三种方案供选择：

方案 A：选择高速支线，物流提前送达的概率为 $\dfrac{3}{4}$；

方案 B：选择高速干线，物流提前送达的概率为 $\dfrac{4}{5}$；

方案 C：选择国道线路，物流提前送达的概率为 $\dfrac{2}{3}$.

（1）物流公司每次随机选择一种方案，求物流提前送达的概率；

（2）物流公司研发了一套智能自适应调度系统，这套系统的核心算法如下：

① 第 1 次，随机选择一种方案；

② 从第 2 次起，若前一次物流提前送达，则沿用此方案；若前一次未提前送达，则在三种方案中随机选择一种.

记第 n 次选择方案 A，B，C 的概率分别为 a_n,b_n,c_n.

（i）求 a_2，b_2，并证明：数列 $\left\{a_n+\dfrac{4}{5}b_n-\dfrac{2}{3}\right\}$ 为等比数列；

（ii）判断智能自适应调度系统能否提高物流提前送达的概率.

2025-2026 学年福州市高三年级三月质量检测

数学试题参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1-8　C　D　A　B　D　B　C　B

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. BC　　10. ACD　　11. BCD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 3　　13. 12π　　14. $\left(\sqrt{5},\sqrt{2}+1\right]$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. （13 分）

记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_9=90$，$a_3=14$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设函数 $f\left(x\right)=2^{x+2}-2^{-x-2}+1$，记 $b_n=f\left(a_n\right)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 21 项和 T_{21}.

【考查意图】本小题主要考查等差数列的通项公式与前 n 项和公式，数列求和等基础知识，考查运算求解能力等，考查化归与转化思想、数形结合思想等，考查直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．满分 13 分．

【解析】（方法一）

（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $\begin{cases}S_9=9a_1+36d=90,\\ a_3=a_1+2d=14,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a_1=18,\\ d=-2,\end{cases}$

所以 $a_n=a_1+d(n-1)=18-2(n-1)=-2n+20$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

（2）因为 $f(x)=2^{x+2}-2^{-x-2}+1$，

所以 $b_n=f(a_n)=f(-2n+20)=2^{-2n+22}-2^{2n-22}+1$，

所以

$T_{21}=b_1+b_2+\cdots+b_{21}$

$=(2^{20}-2^{-20}+1)+(2^{18}-2^{-18}+1)+\cdots+(2^{-18}-2^{18}+1)+(2^{-20}-2^{20}+1)$

$=(2^{20}+2^{18}+\cdots+2^{-18}+2^{-20})-(2^{-20}+2^{-18}+\cdots+2^{18}+2^{20})+21$

$=21\cdot$

（方法二）（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 $S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=90$，所以 $a_5=10$，

因为 $a_3=14$，所以 $a_5-a_3=2d=-4$，所以 $d=-2$，

因为 $a_3=a_1+2d$，所以 $a_1-4=14$，所以 $a_1=18$，

所以 $a_n=a_1+d(n-1)=18-2(n-1)=-2n+20$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

（2）因为 $f(x)=2^{x+2}-2^{-x-2}+1$，

所以 $b_n=f(a_n)=f(-2n+20)=2^{-2n+22}-2^{2n-22}+1$，

所以

$T_{21}=b_1+b_2+\cdots+b_{21}$

$=(2^{20}-2^{-20}+1)+(2^{18}-2^{-18}+1)+\cdots+(2^{-18}-2^{18}+1)+(2^{-20}-2^{20}+1)$

$=(2^{20}+2^{18}+2^{16}+\cdots+2^{-20})-(2^{-20}+2^{-18}+2^{-16}+\cdots+2^{20})+21$

$=\dfrac{2^{20}-2^{-22}}{1-2^{-2}}-\dfrac{2^{-20}-2^{22}}{1-2^{2}}+21$

$=\dfrac{2^{22}-2^{-20}}{2^{2}-1}+\dfrac{2^{-20}-2^{22}}{2^{2}-1}+21=21$.

（方法三）（1）同方法一，略.

（2）因为 $f(x)=2^{x+2}-2^{-x-2}+1$，所以 $f(-x-4)=2^{-x-2}-2^{x+2}+1$，

所以 $f(x)+f(-x-4)=2$，所以曲线 $y=f(x)$ 关于点 $(-2,1)$ 中心对称，

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 $a_1+a_{21}=2a_{11}=-4$，

因为 $f(x)$ 的对称中心为 $(-2,1)$，所以 $b_1+b_{21}=f(a_1)+f(a_{21})=2$，

同理可得：$b_2+b_{20}=b_3+b_{19}=\cdots=b_{10}+b_{12}=b_{11}+b_{11}=2$，

所以 $T_{21}=b_1+b_2+\cdots+b_{21}=2\times10+1=21$.

16. （15 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\left(4x+2\right)\ln x+a$.

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,1\right)$ 处的切线方程;

（2）若函数 $g\left(x\right)=\left(x+2\right)^2-f\left(x\right)$ 有且仅有一个零点，求 a 的值.

【考查意图】本小题主要考查函数的图象与性质、函数单调性与极值等基础知识，考查逻辑推理能力、直观想象能力、运算求解能力和创新能力等，考查函数与方程思想、化归与转化思想、数形结合思想等，考查逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．满分 15 分.

【解析】

（方法一）（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=(4x+2)\ln x+1$，

$$f'(x)=4\ln x+\frac{4x+2}{x},$$

得 $f'(1)=6$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y-1=6(x-1)$，

即 $6x-y-5=0$.

（2）$g(x)=(x+2)^2-(4x+2)\ln x-a$，$x\in(0,+\infty)$，

$$g'(x)=2(x+2)-4\ln x-\frac{4x+2}{x}=2(x-\frac{1}{x}-2\ln x),$$

令 $q(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，得 $q'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant 0$，

故 $q(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增，又 $q(1)=0$，

则当 $x\in(0,1)$，$q(x)<0$，得 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$，$q(x)>0$，得 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

从而 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，同时也是最小值，

最小值为 $g(1)=9-a$.

又当 $x>0$ 且 $x\to 0$ 时，$g(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，

由函数 $g(x)$ 有且仅有一个零点，可得 $g(1)=9-a=0$，

则 a 的值为 9.

（方法二）（1）同方法一，略.

（2）$g(x)=(x+2)^2-(4x+2)\ln x-a$，$x\in(0,+\infty)$，

令 $g(x)=0$ 得 $a=(x+2)^2-(4x+2)\ln x$，

令 $h(x)=(x+2)^2-(4x+2)\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，

则 $h'(x)=2(x+2)-4\ln x-\dfrac{4x+2}{x}=2(x-\dfrac{1}{x}-2\ln x)$，

令 $q(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，得 $q'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant 0$，

故 $q(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增，又 $q(1)=0$，

则当 $x\in(0,1)$，$q(x)<0$，得 $h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$，$q(x)>0$，得 $h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

从而 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，同时也是最小值，

最小值为 $h(1)=9$.

又当 $x>0$ 且 $x\to 0$ 时，$h(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$，

由函数 $g(x)$ 有且仅有一个零点，可得 $a=g(1)=9$，

则 a 的值为 9.

17. （15 分）

已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右顶点为 A. 请从条件①、②、③中选择两个条件作为已知，使得 C 存在且唯一.

条件①：C 的离心率为 2；

条件②：C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$；

条件③：C 的右焦点与点 A 的距离为 1.

（1）求 C 的方程；

（2）若过点 $P(2,3)$ 的直线 l 交 C 的右支于点 M，且 $\triangle AMP$ 的面积为 3，求 l 的方程.

注：如果选择的条件不符合要求，第（1）问得 0 分；如果选择多组符合要求的条件分别解答，按第一组解答计分.

【考查意图】本小题主要考查圆锥曲线的方程、图象与性质、直线与圆锥曲线的位置关系等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力等，考查函数与方程思想、化归与转化思想、数形结合思想等，考查数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．满分 15 分．

【解析】（方法一）

（1）选择条件①和③：

因为 C 的离心率为 2，点 A 到 C 的右焦点的距离为 1，所以 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=2,\\ c-a=1.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\ c=2.\end{cases}$

又因为 $c^2=a^2+b^2$，所以 $b^2=c^2-a^2=3$，

所以 C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

选择条件②和③：

因为 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，点 A 到 C 的右焦点的距离为 1，

所以由 $\begin{cases}\dfrac{b}{a}=\sqrt{3},\\ c-a=1,\\ c^2=a^2+b^2.\end{cases}$

可得 $\begin{cases}a=1,\\ b=\sqrt{3}.\end{cases}$

所以 C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）由（1）知，点 A 坐标为 $(1,0)$.

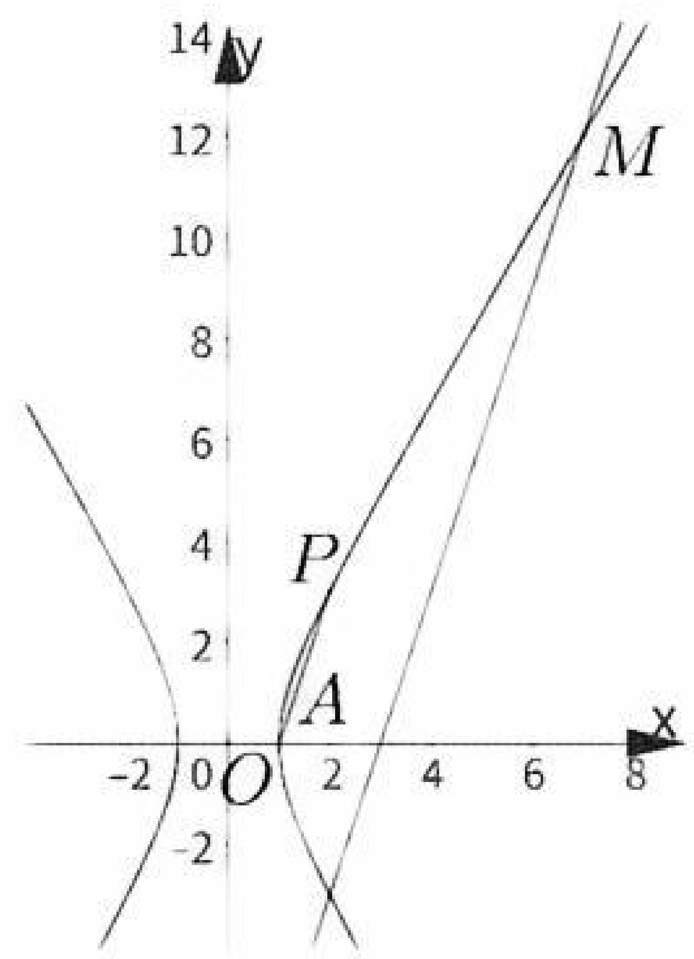
又由 $P(2,3)$ 可得直线 PA 的方程为 $3x-y-3=0$，且 $|PA|=\sqrt{10}$.

设点 M 到直线 PA 的距离为 d，因为 $\triangle AMP$ 面积为 3，所以

$S=\frac{1}{2}|PA|\cdot d=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\cdot d=3$，所以 $d=\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

设过点 M 且与直线 PA 平行的直线为 n：$3x-y+m=0$.

则 n 与直线 PA 的距离为 $\frac{3\sqrt{10}}{5}$，故 $\frac{|m+3|}{\sqrt{1+9}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$，



解得 $m=3$ 或 $m=-9$，

所以直线 n 方程为 $3x-y-9=0$ 或 $3x-y+3=0$，

直线 $3x-y+3=0$ 与直线 PA 关于原点中心对称，

与双曲线左支有两个交点，不合题意，舍去.

由 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{3}=1,\\3x-y-9=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=7,\\y=12.\end{cases}$

故点 M 坐标为 $(2,-3)$ 或 $(7,12)$，

所以直线 l 的方程为 $x=2$ 或 $9x-5y-3=0$.

（方法二）（1）同方法一，略.

（2）由（1）知，点 A 坐标为 $(1,0)$，且点 $P(2,3)$ 在 C 上.

当直线 l 斜率不存在时，$M(2,-3)$，$\triangle AMP$ 面积为 3，直线 l 的方程为 $x=2$，符合题意.

当直线 l 斜率存在时，设其方程为 $y-3=k(x-2)$.

由 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{3}=1,\\y-3=k(x-2),\end{cases}$ 得 $(3-k^2)x^2+(4k^2-6k)x-4k^2+12k-12=0$，

设 $M(x_1,y_1)$（$x_1>1$），

则 $x_1+2=\frac{4k^2-6k}{k^2-3}$，$x_1=\frac{4k^2-6k}{k^2-3}-2=\frac{2k^2-6k+6}{k^2-3}$，

故 $|PM|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-2|=\sqrt{1+k^2}\left|\frac{-6k+12}{k^2-3}\right|$，

又因为 A 到直线 l 的距离 $d=\frac{|-k+3|}{\sqrt{1+k^2}}$，

故 $\triangle AMP$ 面积为 $S=\frac{1}{2}|PM|\cdot d=\left|\frac{(3k-6)(k-3)}{k^2-3}\right|$.

所以 $\left|\frac{(3k-6)(k-3)}{k^2-3}\right|=3$，解得 $k=\frac{9}{5}$，$k=\frac{3}{2}$ 或 $k=1$，

经检验，$k=\frac{3}{2}$ 或 $k=1$ 时不合题意，舍去，

故直线 l 的方程为 $y=\frac{9}{5}x-\frac{3}{5}$.

综上，直线 l 的方程为 $x=2$ 或 $9x-5y-3=0$.

18. 如图 1，圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\triangle BCD$ 为等腰直角三角形，且 $\angle BCD=90^\circ$，$AB=\sqrt{6}$，$AD=\sqrt{2}$.

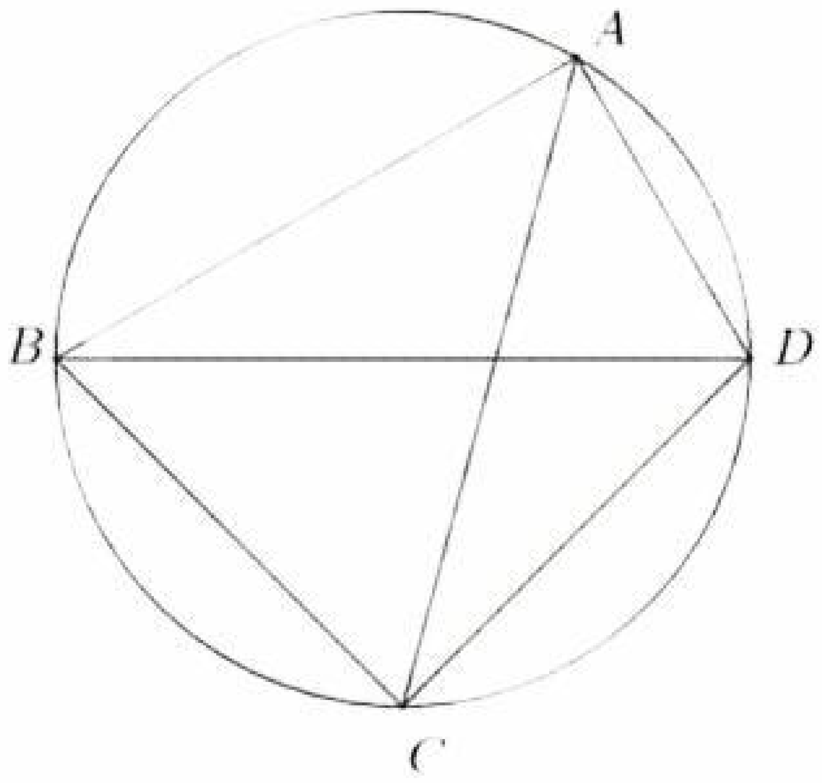


图 1

图 2

（1）求 AC 的长；

（2）如图 2，将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折，形成四面体 $ABCD$，当 $AC=\sqrt{6}$ 时，

（i）求直线 AD 与平面 BCD 所成角的正弦值；

（ii）找出一组依次排列的四个相互平行的平面 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，使得 $A\in\alpha_1,D\in\alpha_2$，$C\in\alpha_3,B\in\alpha_4$，且其中每相邻两个平面间的距离都相等，并求出相邻两个平面间的距离.

【考查意图】本小题主要考查正弦定理、余弦定理解三角形、线面成角、面面距离、空间向量等基础知识，考查直观想象能力、逻辑推理能力、运算求解能力和创新能力等，考查数形结合思想、化归与转化思想等，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性、创新性．满分 17 分

【解析】（方法一）

（1）在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\triangle BCD$ 为等腰直角三角形，$\angle BCD=90°$，

所以 $\angle BAD=90$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，因为 $AB=\sqrt{6}$，$AD=\sqrt{2}$，所以 $\angle ABD=30$，

$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{6+2}=2\sqrt{2}$，所以 $BC=CD=2$.

在 $\triangle ABC$ 中，$\cos\angle ABC=\cos(\angle ABD+\angle CBD)=\cos(30+45)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC$

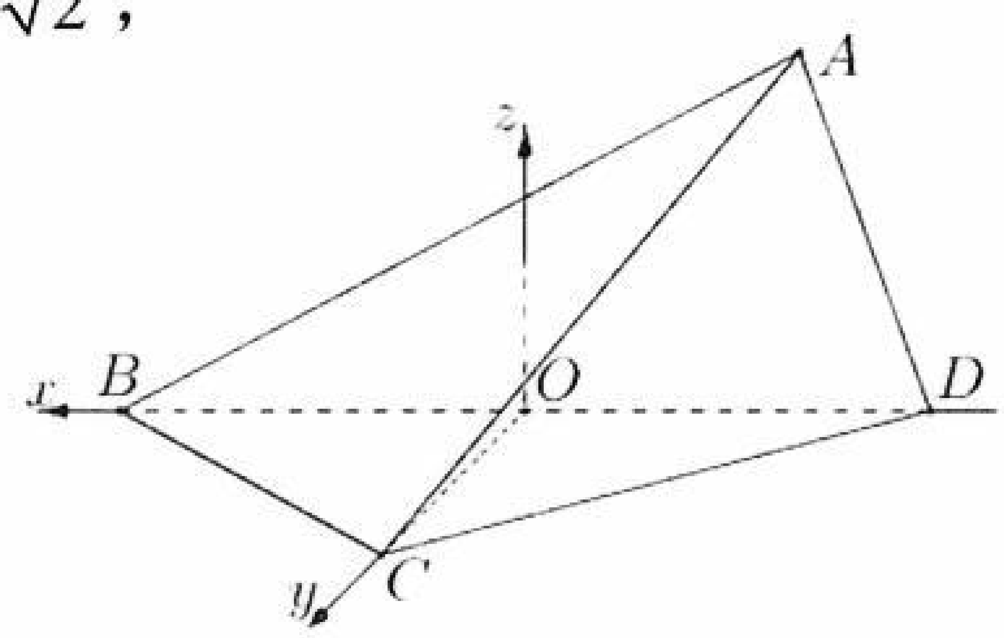
$$=6+4-2\times\sqrt{6}\times2\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2,$$

所以 $AC=\sqrt{3}+1$.

（2）以 BD 的中点 O 为原点，以 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 方向为 x,y 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $B\left(\sqrt{2},0,0\right)$，$C\left(0,\sqrt{2},0\right)$，$D\left(-\sqrt{2},0,0\right)$.

（i）设 $A(x,y,z)$，由（1）可知，$AB=\sqrt{6}$，$AD=\sqrt{2}$，

又因为 $AC=\sqrt{6}$，



所以$\begin{cases}\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2+z^2=6,\\ x^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2+z^2=6,\\ \left(x+\sqrt{2}\right)^2+y^2+z^2=2,\end{cases}$

解得 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$z=1$，即 $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，

则 $\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$.

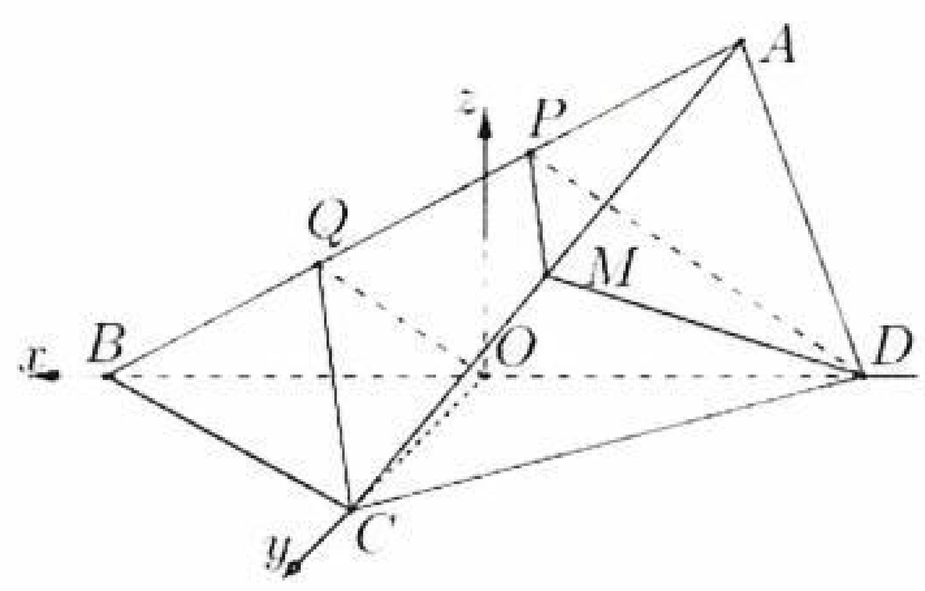
取平面 BCD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，设直线 AD 与平面 BCD 所成角为 θ，

所以 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{AD},\boldsymbol{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以直线 AD 与平面 BCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（ii）如图所示，取 AB 的三等分点 P,Q，AC 的中点 M，

过三点 D,P,M 作平面 α_2，过三点 O,Q,C 作平面 α_3，



因为 $DP/\!/OQ$，$DP\not\subset$ 平面 α_3，$OQ\subset$ 平面 α_3，

所以 $DP/\!/$ 平面 α_3，同理 $PM/\!/$ 平面 α_3，

又因为 $DP\cap PM=P$，所以平面 $\alpha_2/\!/$平面 α_3，

再过点 A,C 分别作平面 α_1,α_4 与平面 α_2 平行，

那么四个平面 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 依次相互平行，

由线段 AB 被平行平面 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 截得的线段相等知，其中每相邻两个平面间的距离相等，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为所求平面.

由（i）可知 $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，$B\left(\sqrt{2},0,0\right)$，$C\left(0,\sqrt{2},0\right)$，

所以 $\overrightarrow{OC}=\left(0,\sqrt{2},0\right)$，

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\left(\sqrt{2},0,0\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{1}{3}\right).$$

设平面 OCQ 的法向量 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OQ}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}\sqrt{2}b=0,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{\sqrt{2}}{6}b+\frac{1}{3}c=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=\left(\sqrt{2},0,-3\right)$，

所以点 B 到平面 OCQ 的距离 $d=\frac{\left|\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{m}\right|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{11}}=\frac{2\sqrt{11}}{11}$，

故相邻两个平面间的距离为 $\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

（方法二）（1）在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\triangle BCD$ 为等腰直角三角形，$\angle BCD=90°$，

所以 BD 是圆的直径，$\angle BAD=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AB=\sqrt{6}$，$AD=\sqrt{2}$，所以

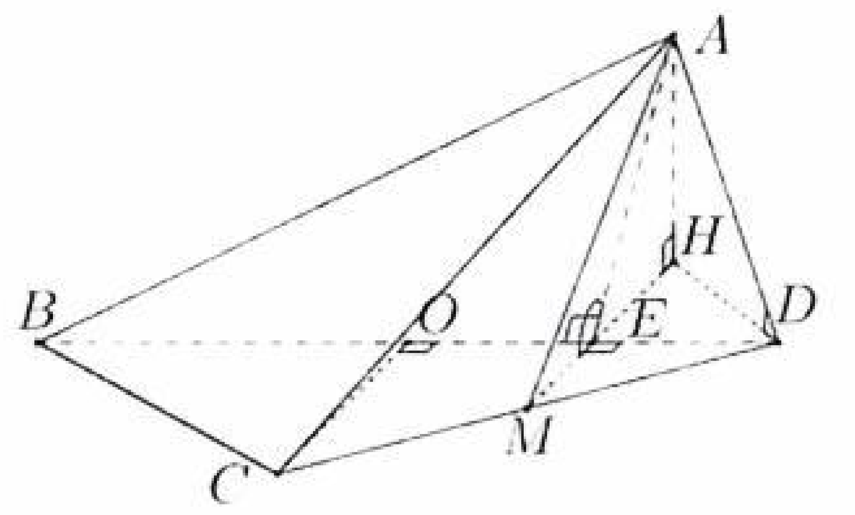
$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{6+2}=2\sqrt{2}$，$\angle ABD=30°$，$\angle ADB=60°$，

$\sin\angle ABC=\sin(\angle ABD+\angle CBD)=\sin(30°+45°)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{\sin\angle BCA}$，又 $\angle BCA=\angle ADB=60°$，故

$AC=\dfrac{AB\sin\angle ABC}{\sin\angle BCA}=\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$.

（2）（i）设 BD 的中点为 O，OD 的中点为 E，CD 的中点为 M，连接 CO，AE，AM，ME.



由（1）知 $CO\perp BD$，$ME/\!/OC$，则 $ME\perp BD$，又因为 $AE\perp BD$，$ME\cap AE=E$，所以 $BD\perp$ 平面 AME，所以平面 $BCD\perp$ 平面 AME. 过点 A 作 $AH\perp ME$ 交直线 ME 于点 H，连接 DH，又因为平面 $BCD\cap$ 平面 $AME=ME$，平面 $BCD\perp$ 平面 AME，$AH\subset$ 平面 AME，所以 $AH\perp$ 平面 BCD，则 DH 为直线 AD 在平面 BCD 上的射影，$\angle ADH$ 为直线 AD 与平面 BCD 所成角.

由（1）知 $CD=2$，$AE=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$OC=\sqrt{2}$，则 $MD=1$，$ME=\dfrac{1}{2}CO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为 $AC=\sqrt{6}$，$AD=\sqrt{2}$，所以 $AC^2=AD^2+CD^2$，

所以 $\angle ADC=90°$，则 $AM=\sqrt{AD^2+MD^2}=\sqrt{3}$.

在 $\triangle AME$ 中，$\cos\angle AEM=\dfrac{AE^2+ME^2-AM^2}{2AE\cdot ME}=\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-3}{2\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以 $\cos\angle AEH=-\cos\angle AEM=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\sin\angle AEH=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

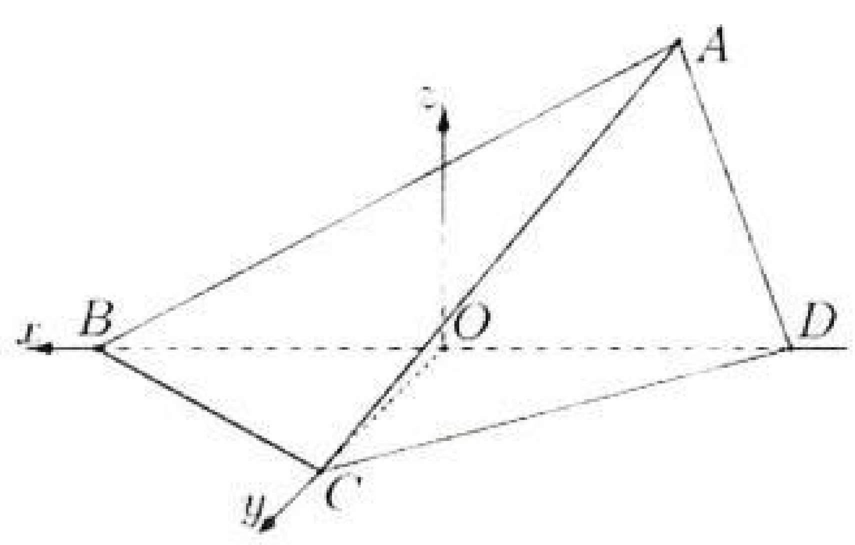
所以 $AH=AE\sin\angle AEH=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=1$，得 $\sin\angle ADH=\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以直线 AD 与平面 BCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（ii）以 O 为原点，以 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 方向为 x,y 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $B\left(\sqrt{2},0,0\right)$，$C\left(0,\sqrt{2},0\right)$，$D\left(-\sqrt{2},0,0\right)$.

设平面 α_1 的法向量 $\boldsymbol{m}=\left(a,b,c\right)$，



由（i）可知$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，

所以$\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)$.

由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$两两平行且每相邻两个平面间的距离都相等，

可得$\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot \boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{|\overrightarrow{CD}\cdot \boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{|\overrightarrow{BC}\cdot \boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}$，

从而$\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b-c\right|=\left|-\sqrt{2}a-\sqrt{2}b\right|=\left|-\sqrt{2}a+\sqrt{2}b\right|$，

由$\left|-\sqrt{2}a-\sqrt{2}b\right|=\left|-\sqrt{2}a+\sqrt{2}b\right|$可得$a=0$或$b=0$.

若$a=0$，由$\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b-c\right|=\left|-\sqrt{2}a-\sqrt{2}b\right|$得$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}b-c\right|=\left|-\sqrt{2}b\right|$，

从而$c=-\frac{\sqrt{2}}{2}b$或$c=\frac{3\sqrt{2}}{2}b$.

若$b=0$，由$\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b-c\right|=\left|-\sqrt{2}a-\sqrt{2}b\right|$得$\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}a-c\right|=\left|-\sqrt{2}a\right|$，

从而$c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$或$c=-\frac{3\sqrt{2}}{2}a$.

综上，可得$\boldsymbol{m}=\left(0,b,-\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$，或$\boldsymbol{m}=\left(0,b,\frac{3\sqrt{2}}{2}b\right)$，

或$\boldsymbol{m}=\left(a,0,\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$，或$\boldsymbol{m}=\left(a,0,-\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)$.

当$\boldsymbol{m}=\left(0,b,-\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$或$\boldsymbol{m}=\left(0,b,\frac{3\sqrt{2}}{2}b\right)$时，由于$\overrightarrow{BD}=\left(-2\sqrt{2},0,0\right)$，此时$\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{m}=0$，

从而点B在点D与$\boldsymbol{m}$所确定的平面上，与条件矛盾，舍去；

当$\boldsymbol{m}=\left(a,0,\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$，由于$\overrightarrow{AC}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2},-1\right)$，此时$\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}=0$，

从而点A在点C与$\boldsymbol{m}$所确定的平面上，与条件矛盾，舍去；

当$\boldsymbol{m}=\left(a,0,-\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)$，可求点$A$到平面$\alpha_2$的距离$d=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{|\sqrt{2}a|}{\sqrt{a^2+\frac{9}{2}a^2}}=\frac{2\sqrt{11}}{11}$，

此时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$分别为过$A,D,C,B$，且以$\boldsymbol{m}$为法向量的平面，

所以相邻两个平面间的距离为$\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

19. （17 分）

在全球化的现代社会中，物流网络已成为支撑经济发展、促进区域协同的关键基础设施. 物流能否准时送达，将影响到消费者的购物体验，而物流提前送达往往能够超越客户预期，显著提升满意度. 某物流公司每天需要从干线枢纽发送包裹至目的地城市. 从干线枢纽到目的地城市，有三种方案供选择：

方案 A：选择高速支线，物流提前送达的概率为$\frac{3}{4}$；

方案 B：选择高速干线，物流提前送达的概率为$\frac{4}{5}$；

方案 C：选择国道线路，物流提前送达的概率为$\frac{2}{3}$.

（1）物流公司每次随机选择一种方案，求物流提前送达的概率；

（2）物流公司研发了一套智能自适应调度系统，这套系统的核心算法如下：

① 第 1 次，随机选择一种方案；

② 从第 2 次起，若前一次物流提前送达，则沿用此方案；若前一次未提前送达，则在三种方案中随机选择一种.

记第 n 次选择方案 A，B，C 的概率分别为 a_n,b_n,c_n .

（i）求 a_2， b_2，并证明：数列$\left\{a_n+\frac{4}{5}b_n-\frac{2}{3}\right\}$为等比数列；

（ii）判断智能自适应调度系统能否提高物流提前送达的概率.

【考查意图】本小题主要考查全概率公式，数列的递推关系，数列通项公式等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力和创新能力等，考查化归与转化思想、特殊与一般思想、必然与或然思想等，考查逻辑推理、数学运算、数据分析等核心素养，体现基础性、综合性、应用性、创新性. 满分 17 分.

【解析】（1）设选择方案 A，B，C 分别为事件 A,B,C ，物流提前送达为事件 Z ，

则 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，

$P(Z|A)=\frac{3}{4}$， $P(Z|B)=\frac{4}{5}$， $P(Z|C)=\frac{2}{3}$，

根据全概率公式

$$P(Z)=P(A)P(Z|A)+P(B)P(Z|B)+P(C)P(Z|C)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{133}{180}.$$

（2）（i）由①知道 $a_1=b_1=c_1=\frac{1}{3}$.

由②根据全概率公式

$$a_2=\left(\frac{3}{4}\times1+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)\times a_1+\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\right)\times b_1+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times c_1=\frac{91}{270},$$

$$b_2=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)\times a_1+\left(\frac{4}{5}\times1+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\right)\times b_1+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times c_1=\frac{191}{540}.$$

设第 n 次车辆选择方案 A，B，C 为事件 A_n,B_n,C_n，第 n 次物流提前送达为事件 Z_n，

则 $a_n=P\left(A_n\right),b_n=P\left(B_n\right),c_n=P\left(C_n\right)$，因为 $a_n+b_n+c_n=1$，所以 $c_n=1-a_n-b_n$，

所以

$$P\left(Z_n\right)=\frac{3}{4}a_n+\frac{4}{5}b_n+\frac{2}{3}c_n=\frac{3}{4}a_n+\frac{4}{5}b_n+\frac{2}{3}\left(1-a_n-b_n\right)=\frac{1}{12}a_n+\frac{2}{15}b_n+\frac{2}{3}.$$

由②根据全概率公式 $P\left(A_{n+1}\right)=P\left(A_n\right)P\left(A_{n+1}\middle|A_n\right)+P\left(B_n\right)P\left(A_{n+1}\middle|B_n\right)+P\left(C_n\right)P\left(A_{n+1}\middle|C_n\right)$，

注意到 $P\left(A_{n+1}\middle|B_n\right)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$，$P\left(A_{n+1}\middle|C_n\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，而 $P\left(A_{n+1}\middle|A_n\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times1=\frac{5}{6}$，

所以

$$a_{n+1}=\frac{5}{6}a_n+\frac{1}{15}b_n+\frac{1}{9}c_n=\frac{5}{6}a_n+\frac{1}{15}b_n+\frac{1}{9}\left(1-a_n-b_n\right)=\frac{13}{18}a_n-\frac{2}{45}b_n+\frac{1}{9},$$

同理

$$b_{n+1}=\frac{1}{12}a_n+\frac{13}{15}b_n+\frac{1}{9}c_n=\frac{1}{12}a_n+\frac{13}{15}b_n+\frac{1}{9}\left(1-a_n-b_n\right)=-\frac{1}{36}a_n+\frac{34}{45}b_n+\frac{1}{9}.$$

注意到

$$\begin{aligned}a_{n+1}+\frac{4}{5}b_{n+1}-\frac{2}{3}&=\left(\frac{13}{18}a_n-\frac{2}{45}b_n+\frac{1}{9}\right)+\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{36}a_n+\frac{34}{45}b_n+\frac{1}{9}\right)-\frac{2}{3}\\&=\frac{7}{10}a_n+\frac{14}{25}b_n-\frac{7}{15}=\frac{7}{10}\left(a_n+\frac{4}{5}b_n-\frac{2}{3}\right),\end{aligned}$$

且 $a_1+\frac{4}{5}b_1-\frac{2}{3}=-\frac{1}{15}\neq0$，所以 $a_n+\frac{4}{5}b_n-\frac{2}{3}\neq0$，

故 $\dfrac{a_{n+1}+\frac{4}{5}b_{n+1}-\frac{2}{3}}{a_n+\frac{4}{5}b_n-\frac{2}{3}}=\frac{7}{10}$ 为定值，

即 $\left\{a_n+\frac{4}{5}b_n-\frac{2}{3}\right\}$ 是以 $-\frac{1}{15}$ 为首项，$\frac{7}{10}$ 为公比的等比数列.

（ii） 由（i）可求 $a_n+\frac{4}{5}b_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{15}\times\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}$，

同理

$$\begin{aligned}a_{n+1}-2b_{n+1}+\frac{1}{2}&=\left(\frac{13}{18}a_n-\frac{2}{45}b_n+\frac{1}{9}\right)-2\left(-\frac{1}{36}a_n+\frac{34}{45}b_n+\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{2}\\&=\frac{7}{9}a_n-\frac{14}{9}b_n+\frac{7}{18}=\frac{7}{9}\left(a_n-2b_n+\frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

所以 $a_n-2b_n+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$，

联立解得

$$a_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{21}\times\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}-\frac{1}{21}\times\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}，\quad b_n=\frac{5}{12}-\frac{5}{84}\times\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}-\frac{1}{42}\times\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}，$$

所以 $P(Z_n)=\frac{1}{12}a_n+\frac{2}{15}b_n+\frac{2}{3}=\frac{3}{4}-\frac{1}{252}\times\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}-\frac{1}{140}\times\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}$.

随着 n 的增大，$P(Z_n)$ 增大，注意到 $P(Z_1)=\frac{133}{180}$，所以当 $n\geq 2$ 时，$P(Z_n)>P(Z_1)=\frac{133}{180}$，

因此从第 2 次起，智能自适应调度系统能逐步提高物流提前送达的概率.