# 莆田市2026届高中毕业班适应性练习数学

本试卷共4页，19小题，满分150分．考试时间120分钟．

注意事项：

**1**．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

**2**．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

**3**．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知$\mathrm{i}z=1+2\mathrm{i}$，则在复平面内，$z$所对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 已知集合$A=\left\{x\in\mathbf{R}\middle|y=\sqrt{x}\right\}$，$B=\{-1,0,1\}$，则$A\cap B$的元素个数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 已知角$\alpha$为第一象限角，且$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，则$\sin(\alpha+\pi)=$（　　）

A. $-\dfrac{4}{5}$　　B. -$\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

4. 已知函数$f(x)=e^{x+1}$，则曲线$y=f(x)$在点$(-1,1)$处的切线方程为（　　）

A. $x-y-2=0$　　B. $x-y+2=0$　　C. $x+y-2=0$　　D. $x+y+2=0$

5. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=$（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

6. 若直线$y=x-1$交抛物线$y^2=4x$于$A,B$两点，则$|AB|=$（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. 4　　C. $4\sqrt{2}$　　D. 8

7. 已知等比数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n,S_3=7,S_6=63$，则函数$f(n)=\dfrac{n-1}{a_n}$的最大值为（　　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{3}{8}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

8. 已知定义域为$(0,+\infty)$的函数$f(x)$满足：对任意$x>0$，都有$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$，则（　　）

A. $f(x)$是奇函数

B. $f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)<0$

C. $f(x)$在$(0,+\infty)$上具有单调性

D. 若$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$f(m)+f(2m-1)>0$，则$m>1$

**二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．**

9. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，离心率为$e$．点$P(x_1,y_1)(y_1\geq 0)$为$C$上的动点，且$|PF_1|$的取值范围为$[1,3]$，则（　　）

A. $e=\frac{1}{2}$

B. $\triangle PF_1F_2$的周长为 8

C. 存在点$P$，使得$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$

D. 当$x_1=1$时，$\triangle PF_1F_2$的内心坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

10. 设函数$f(x)=(x-1)^2(x+2)$，则（　　）

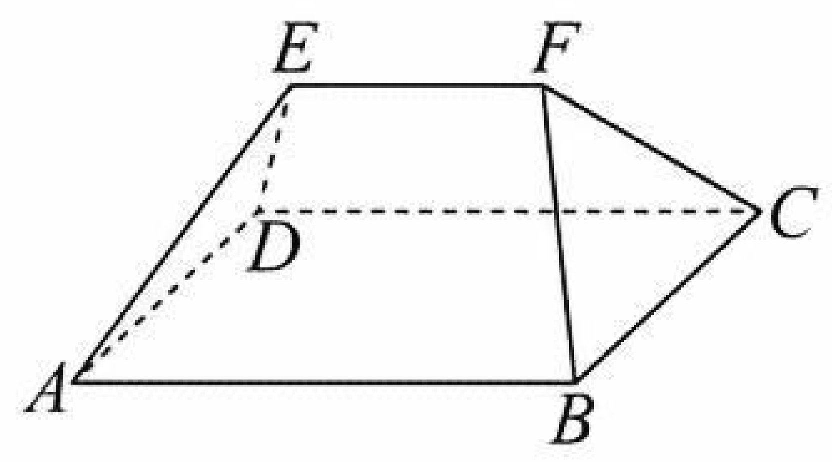
A. $f(x)$有三个零点

B. $x=1$是$f(x)$的极小值点

C. 当$x\in(-\infty,-1)$时，$f(x)<f(1-x)$

D. 曲线$y=f(x)$上存在无数多对互相平行的切线

11. 如图，木块$\Omega$的底面$ABCD$为矩形，$EF//$平面$ABCD$，四边形$ABFE$，$CDEF$是两个全等的等腰梯形，$EF=FB=BC=\frac{1}{2}AB=2\text{dm}$，则（　　）




A. $DE \perp BF$

B. $\Omega$的体积为$\dfrac{10\sqrt{2}}{3}\mathrm{dm}^3$

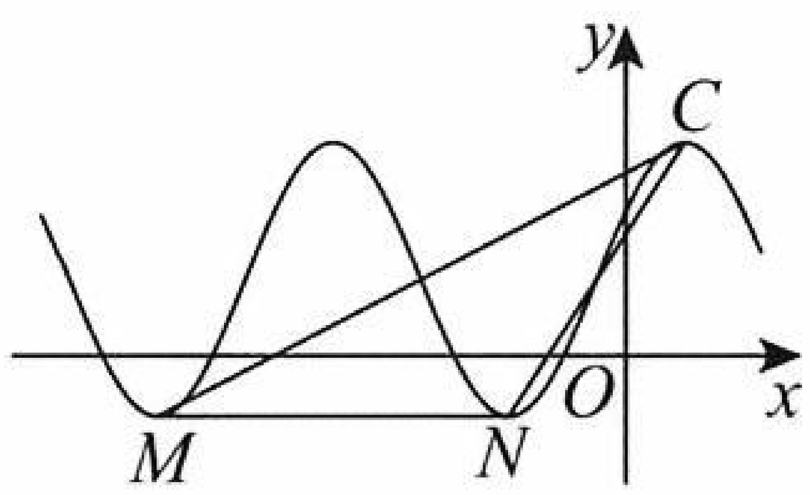
C. 沿$\Omega$的表面从$A$经过棱$BF$到$C$作任意线条，则该线条长度的最小值为$\sqrt{13}+\sqrt{3}\mathrm{dm}$

D. 将$\Omega$加工成一个球，则这个球半径的最大值为$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\mathrm{dm}$

**三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.**

12. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，且$a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}$，则$a_8=$__________.

13. 如图，为函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(\omega x+\varphi)+k\ (\omega>0)$的图象，$C$为最高点，$M$，$N$为最低点．若$|MN|=|NC|$，则$\omega=$__________.




14. 有 6 个球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中每次随机取出一个，取出的球不放回，直到 6 个小球都取完为止．记第$n$次取出球的号码为$a_n\ (n=1,2,3,4,5,6)$，在$a_{i-1}$和$a_{i+1}$至少有一个大于$a_i\ (i=2,3,4,5)$的条件下，数列$\{a_n\}$是递增数列的概率为__________.

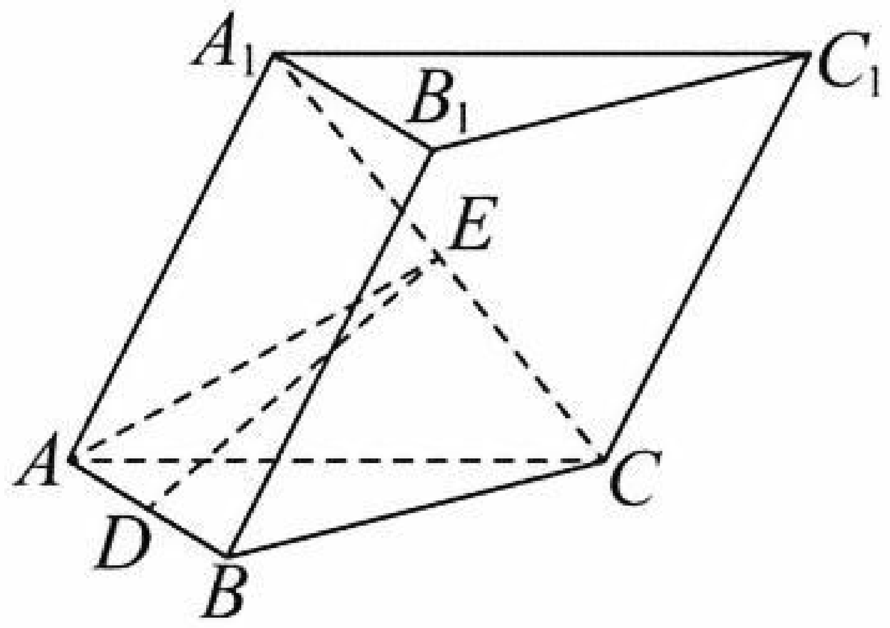
**四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15. 在$\triangle ABC$中，$\cos C=\cos 2C$.

（1）求$C$；

（2）若$5\sin A=3\sin B, BC=3$，求$\triangle ABC$的周长.

16. 如图，在斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp AB$，$AB\perp BC$，$AA_1=BC=2$，$AB=1$，$D$，$E$分别为$AB$，$A_1C$的中点.



（1）证明：$DE//$平面$BCC_1B_1$；

（2）若$DE=\sqrt{3}$，求平面$ADE$与平面$ACC_1A_1$的夹角的余弦值.

17. 篮球运动员甲做分组投篮训练，投篮 5 次为一组，投中一次得 1 分，未投中一次得-1 分．假设甲每次投中的概率为$p\left(0<p<1\right)$.

（1）若$p=\dfrac{1}{2}$，求甲在一组投篮训练中累计得分为 1 分的概率；

（2）收集甲以往 100 组训练数据，分别计算每组累计得分，如下表所示：

| 累计得分 | -5 | -3 | -1 | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 频数 | 1 | 8 | 24 | 34 | 26 | 7 |

（i）求表中累计得分的平均数；

（ii）用$X$表示一组投篮训练的累计得分．将（$i$）中的平均数作为$X$的数学期望的估计值，求$P$的值.

18. 已知函数$f(x)=3\ln x+\frac{a}{x}-\frac{1}{2}x^2$有两个不同的极值点$x_1$，$x_2$.

（1）求实数$a$的取值范围；

（2）证明：$f(x_1)+f(x_2)<3$ ；

（3）证明：$3\ln(n!)+4\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\le\frac{n^2+7n}{2}(n\in\mathrm{N}^*)$.

19. 已知双曲线$C$:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,\ b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1\left(-2,0\right)$，$F_2\left(2,0\right)$，$F_1$到$C$的一条渐近线的距离为$\sqrt{3}$.

（1）求$C$的方程；

（2）点$M\left(x_0,y_0\right)\left(y_0\ne0\right)$为$C$上的动点，点$P$，$Q$分别位于直线$l_1$：$x=-\dfrac{1}{2}$与直线$l_2$：$x=\dfrac{1}{2}$上，且$PF_1\perp MF_1$，$QF_2\perp MF_2$.

（i）记直线$PF_1$，$PF_2$，$QF_1$，$QF_2$的斜率分别为$k_{PF_1}$，$k_{PF_2}$，$k_{QF_1}$，$k_{QF_2}$，证明：$k_{PF_1}k_{QF_1}=k_{PF_2}k_{QF_2}$；

（ii）若$\triangle MPF_1$与$\triangle PQF_2$的面积相等，求$x_0$．

# 莆田市 2026 届高中毕业班适应性练习数学

本试卷共 **4** 页，**19** 小题，满分 **150** 分．考试时间 **120** 分钟．

注意事项：

**1**．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

**2**．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

**3**．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知 $\mathrm{i}z = 1 + 2\mathrm{i}$，则在复平面内，$z$ 所对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【详解】因为 $\mathrm{i}z = 1 + 2\mathrm{i}$，所以 $z = \dfrac{1+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = 2 - \mathrm{i}$，所以 $z$ 对应的点为 $(2,-1)$，位于第四象限.

2. 已知集合 $A = \left\{x \in \mathbf{R} \middle| y = \sqrt{x}\right\}$，$B = \{-1,0,1\}$，则 $A \cap B$ 的元素个数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】首先根据函数的定义域求出集合 $A$，然后根据交集的定义即可求解.

【详解】集合 $A$ 是函数 $y = \sqrt{x}$ 的定义域，根据二次根式的要求，被开方数非负，得 $x \geq 0$，

即 $A = \left\{x \in \mathbf{R} \middle| x \geq 0\right\}$，故 $A \cap B = \{0,1\}$，共有 2 个元素.

3. 已知角 $\alpha$ 为第一象限角，且 $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$，则 $\sin(\alpha + \pi) =$（　　）

A. $-\dfrac{4}{5}$　　B. - $\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据同角三角函数基本关系求出 $\sin\alpha$，再根据诱导公式求解.

【详解】$Q\cos\alpha=\dfrac{3}{5},\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 且 $\alpha$ 为第一象限角，

$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$，

$\therefore \sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$.

4. 已知函数 $f\left(x\right)=e^{x+1}$，则曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $(-1,1)$ 处的切线方程为（　　）

A. $x-y-2=0$　　B. $x-y+2=0$　　C. $x+y-2=0$　　D. $x+y+2=0$

【答案】B

【解析】

【详解】曲线 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=e^{x+1}$，则在 $(-1,1)$ 的切线斜率为 $f'(-1)=1$，

由点斜式求得切线方程为 $y-1=1\times(x-(-1))$，

化成一般式为 $x-y+2=0$.

5. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1,\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}$，则 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【答案】A

【解析】

【详解】由 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1,\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}$，

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=3$，得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$.

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=1+2\cdot(-\dfrac{1}{2})+1=1$.

故 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=1$.

6. 若直线 $y=x-1$ 交抛物线 $y^2=4x$ 于 $A,B$ 两点，则 $\left|AB\right|=$（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. 4　　C. $4\sqrt{2}$　　D. 8

【答案】D

【解析】

【详解】已知抛物线方程 $y^2=4x$，则焦点 $F\left(1,0\right)$，准线为 $x=-1$，

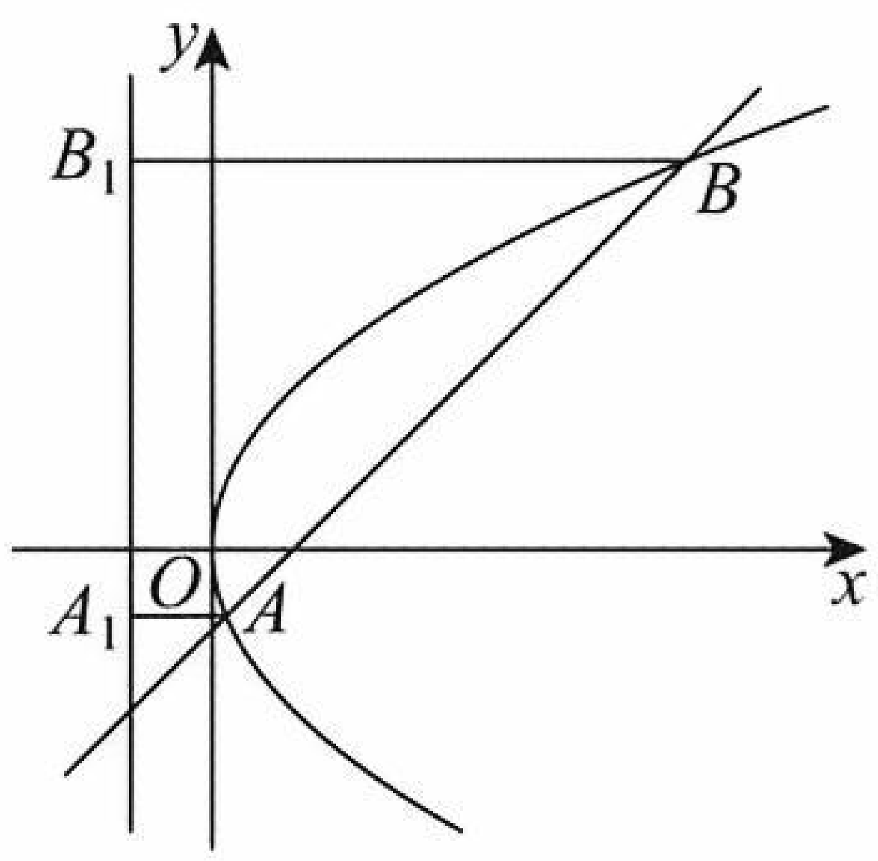
设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

联立直线方程与抛物线方程 $\begin{cases} y=x-1 \\ y^2=4x \end{cases}$ 得 $x^2-6x+1=0$，

则 $x_1+x_2=6$，

因为直线 $y=x-1$ 过焦点 $F\left(1,0\right)$，

所以由抛物线焦点弦的性质可得 $\left|AB\right|=x_1+x_2+2=6+2=8$．




7. 已知等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n,S_3=7,S_6=63$，则函数 $f\left(n\right)=\dfrac{n-1}{a_n}$ 的最大值为（　　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{3}{8}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】求出公比和首项后得通项，再判断数列的单调性后可得最大值.

【详解】因为 $S_3=7,S_6=63$，故 $a_4+a_5+a_6=63-7=56$，而 $a_1+a_2+a_3=7$，

故 $q^3=8$，故 $q=2$，故 $a_1\left(1+q+q^2\right)=7a_1=7$，故 $a_1=1$，

故 $a_n=2^{n-1}$，故 $f\left(n\right)=\dfrac{n-1}{2^{n-1}}$.

而 $f\left(n+1\right)-f\left(n\right)=\dfrac{n}{2^n}-\dfrac{n-1}{2^{n-1}}=\dfrac{n-2n+2}{2^n}=\dfrac{2-n}{2^n}$，

故当 $n=1$ 时，$f\left(n+1\right)-f\left(n\right)>0$；当 $n=2$ 时，$f\left(n+1\right)-f\left(n\right)=0$；

当 $n\geq 3$ 时，$f\left(n+1\right)-f\left(n\right)<0$；故 $f\left(1\right)\left\langle f\left(2\right)=f\left(3\right)\right\rangle f\left(4\right)>\cdots>f\left(n\right)>\cdots$，

故 $f\left(n\right)_{\max}=\dfrac{2-1}{2^1}=\dfrac{1}{2}$.

8. 已知定义域为$\left(0,+\infty\right)$的函数$f\left(x\right)$满足：对任意$x>0$，都有$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f\left(x\right)$，则（　　）

A. $f\left(x\right)$是奇函数

B. $f\left(x\right)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)<0$

C. $f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上具有单调性

D. 若$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，且$f\left(m\right)+f\left(2m-1\right)>0$，则$m>1$

【答案】D

【解析】

【详解】A 选项错误，由于$f\left(x\right)$定义域为$\left(0,+\infty\right)$，所以不是奇函数.

B 选项错误，存在反例，若$\forall x\in(0,+\infty)$，$f\left(x\right)\equiv 0$，

则$f\left(x\right)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

C 选项错误，存在反例$f\left(x\right)=x,0<x<1$；$f(x)=0,x=1$；$f\left(x\right)=-\frac{1}{x},x>1$.

此时不具有单调性.

D 选项正确，由$f\left(m\right)+f\left(2m-1\right)>0$，得$f(2m-1)>-f(m)=f(\frac{1}{m})$.

由定义域$\left(0,+\infty\right)$得$m>0$，$2m-1>0$，即$m>\frac{1}{2}$.

由$f(x)$单调递增得$2m-1>\frac{1}{m}$，即$2m^2-m-1>0$解得$m>1$或$m<-\frac{1}{2}$（舍去）.

综上，$m>1$.

**二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．**

9. 已知椭圆$C$:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，离心率为$e$．点$P\left(x_1,y_1\right)\left(y_1\geq 0\right)$为$C$上的动点，且$\left|PF_1\right|$的取值范围为$\left[1,3\right]$，则（　　）

A. $e=\frac{1}{2}$

B. $\triangle PF_1F_2$的周长为8

C. 存在点$P$，使得$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{2}$

D. 当$x_1=1$时，$\triangle PF_1F_2$的内心坐标为$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

【答案】AD

【解析】

【分析】先根据椭圆上动点到焦点距离范围求出$a,c$，进而得到$b$，离心率和椭圆方程，再分别对各选项依据椭圆性质、均值不等式、勾股定理及内切圆半径公式等进行判断.

【详解】根据椭圆性质，椭圆上动点到左焦点的距离范围为$[a-c,a+c]$，

又因为$|PF_1|\in[1,3]$，所以$\begin{cases}a-c=1\\a+c=3\end{cases}$，解得$a=2,c=1$，

所以$b^2=a^2-c^2=3$，离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，

在A选项中，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，A正确，

在B选项中，$\triangle PF_1F_2$的周长为$|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=4+2=6\neq 8$，B错误，

在C选项中，若$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{2}$，设$|PF_1|=m,|PF_2|=n$，则$\begin{cases}m+n=2a=4\\m^2+n^2=(2c)^2=4\end{cases}$，

整理可得$mn=6$，由均值不等式$mn\le\left(\dfrac{m+n}{2}\right)^2=4<6$，相互矛盾，

所以不存在这样的点$P$，C错误，

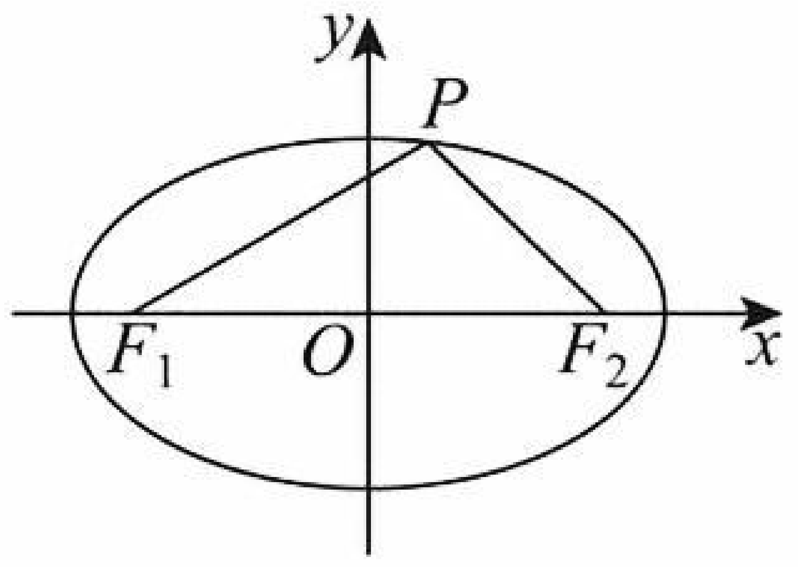
在D选项中，将$x_1=1$代入椭圆可得$y_1=\dfrac{3}{2}$，

即$P(1,\dfrac{3}{2})$，因为$|F_1F_2|=2,|PF_2|=\dfrac{3}{2},|PF_1|=\dfrac{5}{2}$，

$|F_1F_2|^2+|PF_2|^2=2^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}=|PF_1|^2$，所以$\triangle PF_1F_2$是直角三角形，

直角在$F_2(1,0)$，内切圆半径$r=\dfrac{|F_1F_2|+|PF_2|-|PF_1|}{2}=\dfrac{1}{2}$，

内心坐标为$(1-r,r)=(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，D正确.




10. 设函数 $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)$，则（　　）

A. $f\left(x\right)$有三个零点

B. $x=1$是$f\left(x\right)$的极小值点

C. 当$x\in\left(-\infty,-1\right)$时，$f\left(x\right)<f\left(1-x\right)$

D. 曲线$y=f\left(x\right)$上存在无数多对互相平行的切线

【答案】BCD

【解析】

【详解】对于 A，令$f\left(x\right)=0$，解得$x=1$或$x=-2$，所以$f\left(x\right)$有两个零点，A 错误；

对于 B，$f'\left(x\right)=2\left(x-1\right)\left(x+2\right)+\left(x-1\right)^2=3\left(x-1\right)\left(x+1\right)$，

所以当$x<-1$时，$f'\left(x\right)>0$，当$-1<x<1$时，$f'\left(x\right)<0$，当$x>1$时，$f'\left(x\right)>0$，

所以$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,-1\right)$上单调递增，在$\left(-1,1\right)$上单调递减，在$\left(1,+\infty\right)$上单调递增，

所以$x=1$是$f\left(x\right)$的极小值点，B 正确；

对于 C，$f\left(x\right)-f\left(1-x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)-\left(1-x-1\right)^2\left(1-x+2\right)$

$=\left(x^2-2x+1\right)\left(x+2\right)-x^2\left(3-x\right)=x^3-3x+2+x^3-3x^2=2x^3-3x^2-3x+2$

$=2\left(x+1\right)(x^2-x+1)-3x(x+1)=\left(x+1\right)(2x^2-5x+2)=\left(x+1\right)(x-2)(2x-1)$，

当$x\in\left(-\infty,-1\right)$时，$x+1<0,x-2<0,2x-1<0$，所以$f\left(x\right)-f\left(1-x\right)<0$，

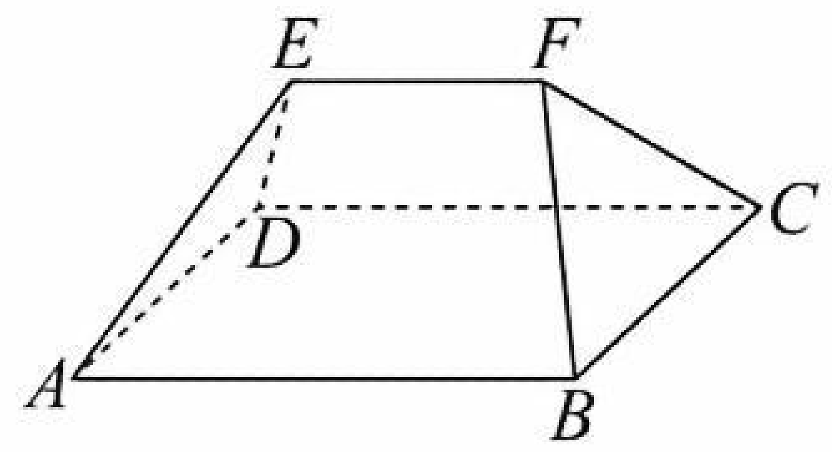
所以当$x\in\left(-\infty,-1\right)$时，$f\left(x\right)<f\left(1-x\right)$，C 正确；

对于 D，$f'\left(x\right)=3\left(x-1\right)\left(x+1\right)=3x^2-3\geq-3$，

所以对于任意$k>-3$的实数，$f'\left(x\right)=k$都有两个解，

所以曲线$y=f\left(x\right)$上存在无数多对互相平行的切线，D 正确.

11. 如图，木块$\Omega$的底面$ABCD$为矩形，$EF//$平面$ABCD$，四边形$ABFE$，$CDEF$是两个全等的等腰梯形，$EF=FB=BC=\frac{1}{2}AB=2\text{dm}$，则（　　）




A. $DE\perp BF$

B. $\Omega$的体积为$\frac{10\sqrt{2}}{3}\text{dm}^3$

C. 沿$\Omega$的表面从$A$经过棱$BF$到$C$作任意线条，则该线条长度的最小值为$\sqrt{13}+\sqrt{3}\text{dm}$

D. 将$\Omega$加工成一个球，则这个球半径的最大值为$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\text{dm}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】过$F$作$FH//DE$交$CD$于点$H$，连接$BH$，利用勾股定理计算可判断A；利用分割法求得体积可判断B；将$\triangle FBC$绕$BF$转动到$\triangle FBC'$使$\triangle FBC'$与侧面$ABFE$在同一个平面内，利用余弦定理可求得$AC'$判断C；作$FH//DE$交$CD$于$H$，过$F$作$FG//AE$交$AB$于$G$，可得$\Omega$内的最大球，即为四棱锥$F-BCHG$的内切球，进而求得球的最大半径即可判断D.

【详解】过$F$作$FH//DE$交$CD$于点$H$，连接$BH$，

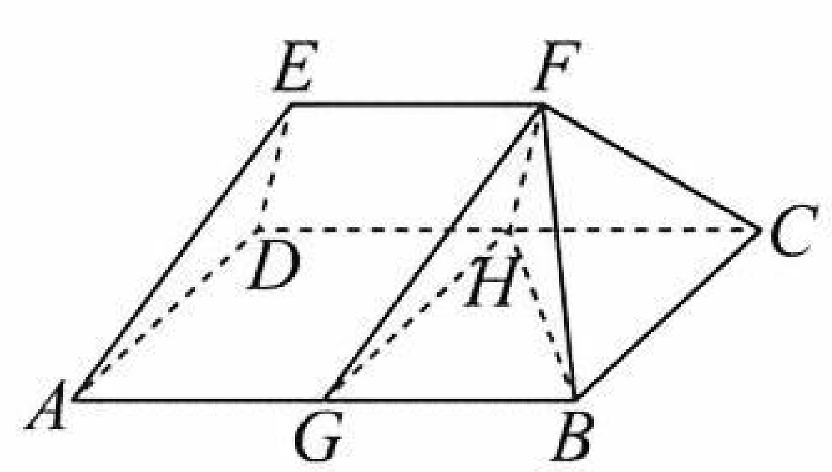
因为$CDEF$是等腰梯形，所以$CD//EF$，所以四边形$HDEF$是平行四边形，

所以$HF=DE=2$，$DH=EF=2$，所以$CH=CD-DH=2$，

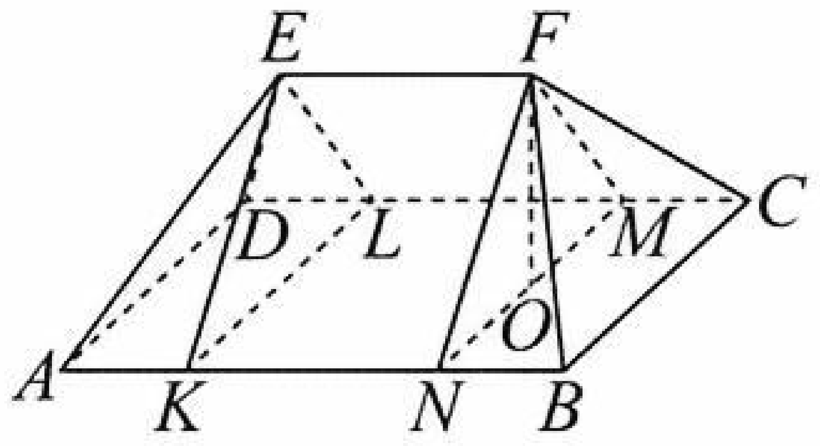
又因为底面$ABCD$为矩形，且$EF=FB=BC=2$，

所以$HB^2=HC^2+BC^2=4+4=8$，所以$FH^2+FB^2=4+4=8=HB^2$，

所以$\angle BFH=90°$，所以$FH\perp BF$，所以$DE\perp BF$，故A正确；




过$F$作$FN\perp AB$于$N$，过$F$作$FM\perp CD$于$M$，过$E$作$EK\perp AB$于$K$，




过 $E$ 作 $EL \perp CD$ 于 $L$，过 $F$ 作 $FO \perp MN$ 于 $O$，

因为 $AB//CD$，所以 $AB \perp FM$，又 $FN \cap FM = F$， $FN, FM \subset$ 平面 $FMN$，

所以 $AB \perp$ 平面 $FMN$，又 $AB \subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $ABCD \perp$ 平面 $FMN$，

又 $FO \subset$ 平面 $FMN$，所以 $FO \perp$ 平面 $ABCD$，

由题意可得 $FM = FN = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$，所以 $OM = ON = 1$，

$FO = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{2}$，

所以 $\Omega$ 的体积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} \times 2 + 2 \times \frac{1}{3} \times 1 \times 2 \times \sqrt{2} = \frac{10\sqrt{2}}{3}\,\text{dm}^3$，故 B 正确；

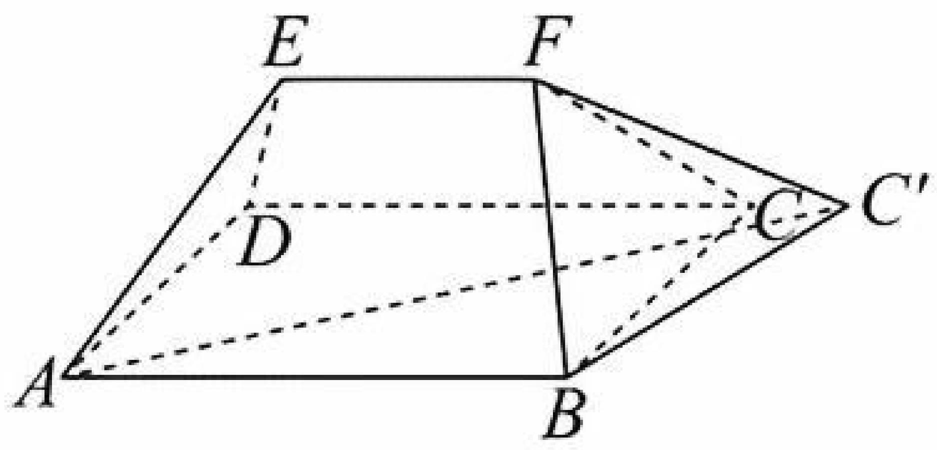
将 $\triangle FBC$ 绕 $BF$ 转动到 $\triangle FBC'$ 使 $\triangle FBC'$ 与侧面 $ABFE$ 在同一个平面内，如图所示：

由题意可得 $\angle ABC' = 120°$，

由余弦定理可得 $AC'^2 = AB^2 + BC'^2 - 2AB \times BC' \cos 120° = 16 + 4 - 2 \times 4 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 28$ ，

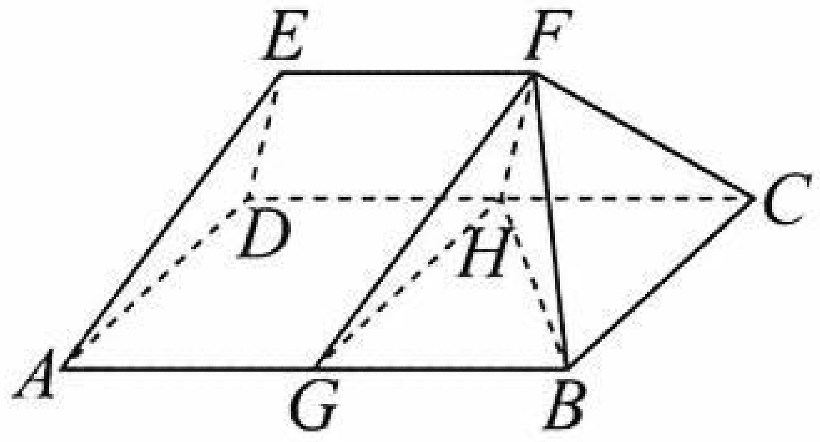
所以 $AC' = 2\sqrt{7}$，

所以沿 $\Omega$ 的表面从 $A$ 经过棱 $BF$ 到 $C$ 作任意线条，则该线条长度的最小值为 $2\sqrt{7}$，故 C 错误.




作 $FH//DE$ 交 $CD$ 于 $H$，过 $F$ 作 $FG//AE$ 交 $AB$ 于 $G$，

由题意可知四棱锥 $F-BCHG$ 为正四棱锥，




则可得 $\Omega$ 内的最大球，即为四棱锥 $F-BCHG$ 的内切球，

设内切球的半径为 $r$，由题意得 $V_{F-BCHG} = 4 \times \frac{1}{3} \times S_{\triangle FBC} \times r + \frac{1}{3} S_{BCHG} \times r = \frac{1}{3} S_{BCHG} \times \sqrt{2}$，

所以 $4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times r+\frac{1}{3}\times2\times2\times r=\frac{1}{3}\times2\times2\times\sqrt{2}$，即 $\frac{4\sqrt{3}}{3}r+\frac{4}{3}r=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，

解得 $r=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，

所以将 $\Omega$ 加工成一个球，则这个球半径的最大值为 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\mathrm{dm}$，故 D 正确.

**三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.**

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，且 $a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$，则 $a_8=$__________.

【答案】$\frac{1}{2}$ ##0.5

【解析】

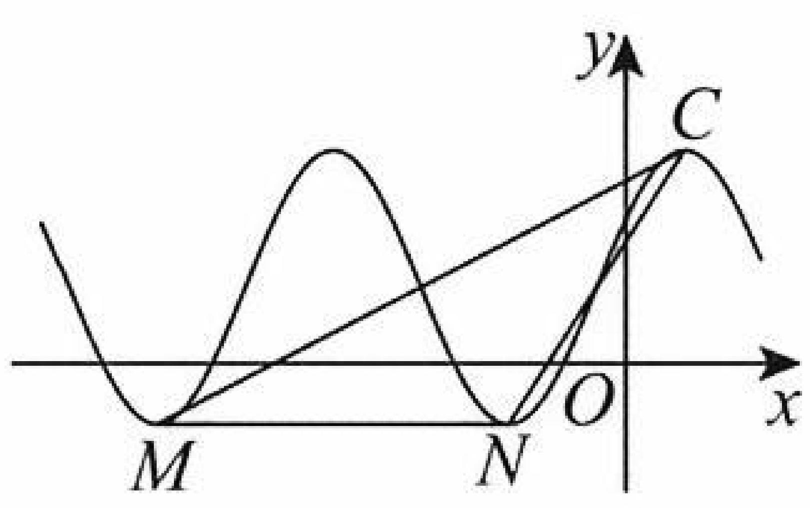
【分析】利用代入法，求出数列前几项，进而判断该数列是周期数列，运用数列的周期进行求解即可.

【详解】因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，且 $a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$，

所以 $a_2=1-\frac{1}{a_1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$， $a_3=1-\frac{1}{a_2}=1-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-1$， $a_4=1-\frac{1}{a_3}=1-\frac{1}{-1}=2$，

所以该数列的周期为 $3$，因此 $a_8=a_{3\times2+2}=a_2=\frac{1}{2}$.

13. 如图，为函数 $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\omega x+\varphi\right)+k\left(\omega>0\right)$ 的图象，$C$ 为最高点，$M$，$N$ 为最低点．若 $\left|MN\right|=\left|NC\right|$，则 $\omega=$__________.




【答案】π

【解析】

【详解】因为函数 $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\omega x+\varphi\right)+k\left(\omega>0\right)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，

所以$\left|MN\right|=\frac{2\pi}{\omega}$，又因为$\left|NC\right|=\sqrt{\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+k-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+k\right)\right]^2}=\sqrt{\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2+3}$，

又因为$\left|MN\right|=\left|NC\right|$，所以$\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2=\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2+3$，所以$\omega=\pi$.

14. 有 6 个球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中每次随机取出一个，取出的球不放回，直到 6 个小球都取完为止．记第$n$次取出球的号码为$a_n\left(n=1,2,3,4,5,6\right)$，在$a_{i-1}$和$a_{i+1}$至少有一个大于$a_i\left(i=2,3,4,5\right)$的条件下，数列$\left\{a_n\right\}$是递增数列的概率为__________.

【答案】$\frac{1}{32}$

【解析】

【分析】设事件$A$为“在$a_{i-1}$和$a_{i+1}$至少有一个大于$a_i\left(i=2,3,4,5\right)$”，事件$B$为“数列$\left\{a_n\right\}$是递增数列””，根据组合数可求数列$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6$的种数，再由条件概率公式可求题设中的概率.

【详解】设事件$A$为“在$a_{i-1}$和$a_{i+1}$至少有一个大于$a_i\left(i=2,3,4,5\right)$”，

事件$B$为“数列$\left\{a_n\right\}$是递增数列”，则$P\left(AB\right)=P\left(B\right)=\frac{1}{\mathrm{A}_6^6}$，

因为在$a_{i-1}$和$a_{i+1}$至少有一个大于$a_i\left(i=2,3,4,5\right)$，

故数列$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6$是先减后增或递增或递减数列，

考虑排列1左侧的元素的个数及种类，则不同的排列有$\mathrm{C}_5^0+\mathrm{C}_5^1+\cdots+\mathrm{C}_5^5=2^5=32$，

故$P\left(A\right)=\frac{32}{\mathrm{A}_6^6}$，故$P\left(B\mid A\right)=\frac{\frac{1}{\mathrm{A}_6^6}}{\frac{32}{\mathrm{A}_6^6}}=\frac{1}{32}$.

## 四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 在$\triangle ABC$中，$\cos C=\cos 2C$.

（1）求$C$；

（2）若$5\sin A=3\sin B, BC=3$，求$\triangle ABC$的周长.

【答案】（1）$\frac{2\pi}{3}$

（2）15

【解析】

【分析】（1）运用余弦二倍角公式，结合三角形内角的性质、余弦函数的性质进行求解即可；

（2）运用正弦定理和余弦定理进行求解即可；

【小问 1 详解】

$\cos C=\cos 2C \Rightarrow \cos C=2\cos^2 C-1$，解得 $\cos C=1$，或 $\cos C=-\dfrac{1}{2}$，

因为 $C\in(0,\pi)$，所以方程 $\cos C=1$ 无实数解；

由 $\cos C=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow C=\dfrac{2\pi}{3}$；

【小问 2 详解】

设 $\angle A,\angle B,\angle C$ 所对的边分别为 $a,b,c$，

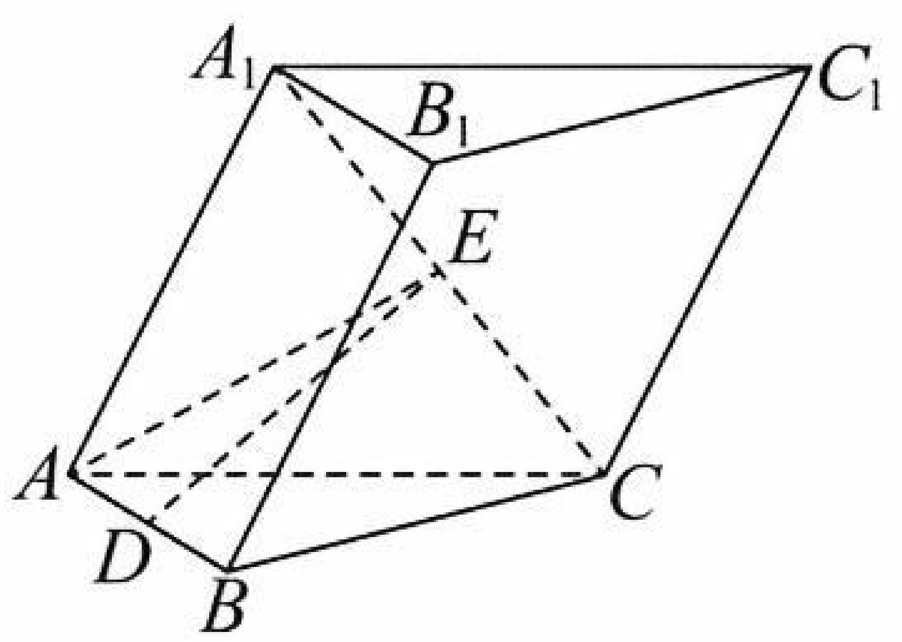
因为 $a=BC=3$，

所以根据正弦定理，由 $5\sin A=3\sin B \Rightarrow 5a=3b \Rightarrow 5\times 3=3b \Rightarrow b=5$，

由余弦定理，得 $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{9+25-2\times 3\times 5\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=7$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=3+5+7=15$.

16. 如图，在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp AB$，$AB\perp BC$，$AA_1=BC=2$，$AB=1$，$D$，$E$ 分别为 $AB$，$A_1C$ 的中点.




（1）证明：$DE//$ 平面 $BCC_1B_1$；

（2）若 $DE=\sqrt{3}$，求平面 $ADE$ 与平面 $ACC_1A_1$ 的夹角的余弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

【解析】

【分析】(1）连接 $BC_1$，延长 $AE$，得出 $DE$ 是$\triangle ABC_1$的中位线，根据线面平行的判定定理结合中位线的性质即可证明.

（2）以 $B$ 为原点，分别以$BA,BC,Bz$ 所在直线为$x,y,z$ 轴建立空间直角坐标系，根据 $DE=\sqrt{3}$ 求出点 $A_1$ 的坐标，然后求出平面 $ADE$ 和平面 $ACC_1A_1$ 的法向量，最后根据平面与平面夹角的向量公式即可求解.

【小问 1 详解】

连接 $BC_1$，延长 $AE$，因为斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 $ACC_1A_1$ 是平行四边形，

对角线 $A_1C$ 与 $AC_1$ 互相平分，又 $E$ 是 $A_1C$ 的中点，因此 $E$ 是 $AC_1$ 的中点.

又因为 $D$ 是 $AB$ 中点，所以在$\triangle ABC_1$中，$DE$ 是中位线，故 $DE//BC_1$，

又$DE\not\subset$ 平面 $BCC_1B_1$，$BC_1\subset$平面 $BCC_1B_1$，因此 $DE//$平面 $BCC_1B_1$.

【小问 2 详解】

以 $B$ 为原点，分别以$BA,BC,Bz$ 所在直线为$x,y,z$ 轴建立空间直角坐标系，

由已知条件得：$B(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$C(0,2,0)$，

设$A_1(1,y,z)$，由 $AA_1=2$ 得 $y^2+z^2=4$，

$D$ 是 $AB$ 中点，故$D(\frac{1}{2},0,0)$；$E$ 是 $A_1C$ 中点，故$E(\frac{1}{2},\frac{y+2}{2},\frac{z}{2})$.

由 $DE=\sqrt{3}$，得$(\frac{y+2}{2})^2+(\frac{z}{2})^2=3$，代入 $y^2+z^2=4$ 解得 $y=1$，$z=\sqrt{3}$，即$A_1(1,1,\sqrt{3})$.

向量$\overrightarrow{AD}=(-\frac{1}{2},0,0)$，$\overrightarrow{DE}=(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

设平面 $ADE$ 的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$.

由$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$得$\begin{cases}x_1=0\\ 3y_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$,

取 $y_1=1$ 得$\overrightarrow{n_1}=(0,1,-\sqrt{3})$，$|\overrightarrow{n_1}|=2$.

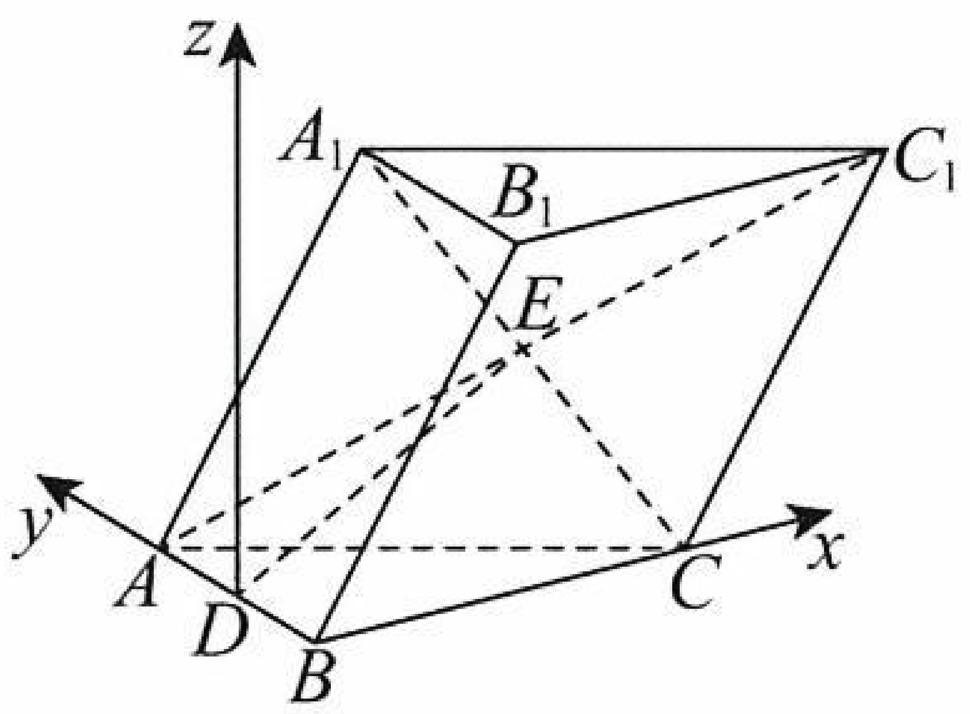
向量$\overrightarrow{AA_1}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(-1,2,0)$.

设平面 $ACC_1A_1$ 的法向量为$n_2=(x_2,y_2,z_2)$.

由$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$得$\begin{cases}y_2+\sqrt{3}z_2=0\\ x_2=2y_2\end{cases}$,

取 $y_2=\sqrt{3}$ 得$\overrightarrow{n_2}=(2\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$，$|\overrightarrow{n_2}|=4$.

设平面 $ADE$ 与平面 $ACC_1A_1$ 的夹角为 $\theta$，则 $\cos\theta=\frac{\left|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right|\left|\vec{n_2}\right|}=\frac{\left|0\times2\sqrt{3}+1\times\sqrt{3}+(-\sqrt{3})\times(-1)\right|}{2\times4}=\frac{2\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.




17. 篮球运动员甲做分组投篮训练，投篮 5 次为一组，投中一次得 1 分，未投中一次得-1 分．假设甲每次投中的概率为 $p\left(0<p<1\right)$．

（1）若 $p=\frac{1}{2}$，求甲在一组投篮训练中累计得分为 1 分的概率；

（2）收集甲以往 100 组训练数据，分别计算每组累计得分，如下表所示：

| 累计得分 | -5 | -3 | -1 | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 频数 | 1 | 8 | 24 | 34 | 26 | 7 |

（i）求表中累计得分的平均数；

（ii）用 $X$ 表示一组投篮训练的累计得分．将（$i$）中的平均数作为 $X$ 的数学期望的估计值，求 $p$ 的值．

【答案】（1）$\frac{5}{16}$

（2）（i）0.94；

（ii）0.594.

【解析】

【小问 1 详解】

设甲在一组投篮训练中累计得分为 1 分为事件 A，则甲在一组训练中，投中 3 次，未投中 2 次，

则 $P(A)=\mathrm{C}_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$.

【小问 2 详解】

（i）设累计得分的平均数为 $\overline{x}$，则 $\overline{x}=\frac{(-5)\times1+(-3)\times8+(-1)\times24+1\times34+3\times26+5\times7}{100}=0.94$.

（ii）设投中次数为 $Y$，则 $Y\sim B(5,p)$，所以 $E\left(Y\right)=5p$，

累计得分 $X=Y\times1+(5-Y)\times(-1)=2Y-5$，

所以$E(X)=E(2Y-5)=2E(Y)-5=2\times5p-5=10p-5$

又因为$E(X)=0.94$，所以$10p-5=0.94$，解得$p=0.594$.

18. 已知函数$f(x)=3\ln x+\frac{a}{x}-\frac{1}{2}x^2$有两个不同的极值点$x_1$，$x_2$.

（1）求实数$a$的取值范围；

（2）证明：$f(x_1)+f(x_2)<3$；

（3）证明：$3\ln(n!)+4\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\le\frac{n^2+7n}{2}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$.

【答案】（1）$a\in(0,2)$　　（2）证明见解析　　（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）先求导得$f'(x)=-\frac{x^3-3x+a}{x^2}$，将问题转化为$x^3-3x+a=0$ 在$(0,+\infty)$有两正根，再通过研究函数$q(x)=x^3-3x+a$ 的单调性和极值确定$a$范围.

（2）由韦达定理和极值点关系得到$x_1^2+x_2^2=3-x_1x_2$，将$f(x_1)+f(x_2)$化简为关于$x_1x_2$的表达式，令$t=x_1x_2$，可得$h(t)=3\ln t+\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}$，$0<t<1$，利用求导判断函数单调性即可证明.

（3）令$g(x)=3\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{2}x^2(x>0)$，求导判断其单调性，即得当$x\ge1$时，$3\ln x+\frac{2}{x}\le\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$，令$x=\sqrt{n}$代入并运用累加法与对数的运算性质即可得证.

【小问1详解】

已知$f(x)=3\ln x+\frac{a}{x}-\frac{1}{2}x^2$，其定义域为$(0,+\infty)$，

对$f(x)$求导可得：$f'(x)=\frac{3}{x}-\frac{a}{x^2}-x=-\frac{x^3-3x+a}{x^2}$，

因为函数$f(x)$有两个不同的极值点$x_1,x_2$，

所以$f'(x)=0$在$(0,+\infty)$上有两个不同的正根，

令$q(x)=x^3-3x+a,x>0$，对$q(x)$求导可得：$q'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，

当$0<x<1$时，$q'(x)<0$，$q(x)$单调递减，当$x>1$时，$q'(x)>0$，$q(x)$单调递增，

所以$q(x)$在$x=1$处取得极小值，也是最小值，$q(x)_{\min}=q(1)=1-3+a=a-2$，

又因为当$x\to0^+$时，$q(x)\to a$，当$x\to+\infty$时，$q(x)\to+\infty$，

要使$x^3-3x+a=0$ 在$\left(0,+\infty\right)$上有两个不同的正根，则需$\begin{cases}q(1)=a-2<0\\ q(0)=a>0\end{cases}$，

解得$0<a<2$，因此$a$的取值范围是$\left(0,2\right)$.

【小问 2 详解】

由（1）可知，$x_1,x_2$是$x^3-3x+a=0$ 的两个不相等的正根，

即$a=-x_1^3+3x_1=-x_2^3+3x_2$，可得$(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3)=0$，则$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=3$，

（由三次方程韦达定理：$x_1+x_2+x_3=0$，$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3$，$x_1x_2x_3=a$，

因$0<a<2$，则其中必有一根为负，记为$x_3<0$，则$x_1+x_2=-x_3>0$，$x_1x_2=-\frac{a}{x_3}$），

则$f(x_1)+f(x_2)=3\ln x_1+\frac{a}{x_1}-\frac{1}{2}x_1^2+3\ln x_2+\frac{a}{x_2}-\frac{1}{2}x_2^2$，

$=3\ln(x_1x_2)+a(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$ （*），

由$a=-x_1^3+3x_1=x_1(3-x_1^2)$，得$\frac{a}{x_1}=3-x_1^2$，同理可得$\frac{a}{x_2}=3-x_2^2$，

则$a(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})=3-x_1^2+3-x_2^2=6-(x_1^2+x_2^2)$，

将其代入（*）可得：$f(x_1)+f(x_2)=3\ln(x_1x_2)+6-(x_1^2+x_2^2)-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$，

$=3\ln(x_1x_2)+6-\frac{3}{2}(x_1^2+x_2^2)$，

又因为$x_1\neq x_2$，则$x_1^2+x_2^2=3-x_1x_2>2x_1x_2$，可得$0<x_1x_2<1$，

则$f(x_1)+f(x_2)=3\ln(x_1x_2)+6-\frac{3}{2}(3-x_1x_2)=3\ln(x_1x_2)+\frac{3}{2}x_1x_2+\frac{3}{2}$，

令$t=x_1x_2$，则$h(t)=3\ln t+\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}$，$0<t<1$，

求导得$h'(t)=\frac{3}{t}+\frac{3}{2}=\frac{3(2+t)}{2t}>0$，则$h\left(t\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递增，

故有$h(t)<h(1)=3\ln 1+\frac{3}{2}\times 1+\frac{3}{2}=3$，即$f(x_1)+f(x_2)<3$.

【小问 3 详解】

令$g(x)=3\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{2}x^2(x>0)$，求导可得：

$g'(x)=\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-x=\frac{3x-2-x^3}{x^2}=-\frac{(x-1)^2(x+2)}{x^2}\leq 0$，

所以$g\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减，

则当$x\geq 1$时，$g(x)\leq g(1)=3\ln 1+\frac{2}{1}-\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{3}{2}$，

即 $3\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{2}x^2\le\frac{3}{2}$，移项可得 $3\ln x+\frac{2}{x}\le\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x^2$，

令$x=\sqrt{n}$，$n\in N^*$，则 $3\ln\sqrt{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}$，即$\frac{3}{2}\ln n+\frac{2}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}$.

因$\frac{3}{2}\ln 1+\frac{2}{\sqrt{1}}\le\frac{1}{2}\times 1+\frac{3}{2}$，$\frac{3}{2}\ln 2+\frac{2}{\sqrt{2}}\le\frac{1}{2}\times 2+\frac{3}{2}$，…，$\frac{3}{2}\ln n+\frac{2}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}$，

将以上 $n$ 个不等式左右相加得：$\frac{3}{2}(\ln 1+\ln 2+\cdots\ln n)+2(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}})\le\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)+\frac{3}{2}n$

（**），

又因 $\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n=\ln(n!)$ ，$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，

则（**）为$\frac{3}{2}\ln(n!)+2(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}})\le\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{3}{2}n=\frac{n^2+7n}{4}$，

两边乘以 2 可得：$3\ln(n!)+4(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}})\le\frac{n^2+7n}{2}$，

故得 $3\ln(n!)+4(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}})\le\frac{n^2+7n}{2}(n\in N^*)$ 得证.

19. 已知双曲线 $C$：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,\ b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 $F_1\left(-2,0\right)$，$F_2\left(2,0\right)$，$F_1$ 到 $C$ 的一条渐近线的距离为 $\sqrt{3}$.

（1）求 $C$ 的方程；

（2）点 $M\left(x_0,y_0\right)\left(y_0\ne 0\right)$ 为 $C$ 上的动点，点 $P$，$Q$ 分别位于直线 $l_1$：$x=-\frac{1}{2}$ 与直线 $l_2$：$x=\frac{1}{2}$ 上，且 $PF_1\perp MF_1$，$QF_2\perp MF_2$.

（i）记直线 $PF_1$，$PF_2$，$QF_1$，$QF_2$ 的斜率分别为 $k_{PF_1}$，$k_{PF_2}$，$k_{QF_1}$，$k_{QF_2}$，证明：$k_{PF_1}k_{QF_1}=k_{PF_2}k_{QF_2}$；

（ii）若 $\triangle MPF_1$ 与 $\triangle PQF_2$ 的面积相等，求 $x_0$.

【答案】(1) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

（2）（i）证明见解析；

（ii）$x_0=-\frac{2+\sqrt{5}}{2}$.

【解析】

【分析】（1）利用点到直线的距离公式可以求得 $b$ 和 $c$ 的关系，代入计算即可；

（2）（i）设出点坐标，直接计算直线斜率，然后求得乘积即可；

（ii）利用点坐标计算直线方程，再根据点到直线的距离公式以及三角形的面积公式求出两个三角形的面积，使其相等即可求解.

【小问 1 详解】

由题可得：$c=2$，双曲线的渐近线方程为：$bx\pm ay=0$，则 $F_1$ 到渐近线的距离为：

$\frac{|-2b\pm 0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2b}{c}=\sqrt{3}$，所以 $b=\frac{\sqrt{3}}{2}c=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$，

则 $b^2=3$，$a^2=c^2-b^2=4-3=1$，因此曲线 $C$ 方程为：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

（i）设 $P\left(-\frac{1}{2},y_p\right)$，$Q\left(\frac{1}{2},y_Q\right)$，

则 $k_{PF_1}=\frac{y_p-0}{-\frac{1}{2}-(-2)}=\frac{2y_p}{3}$，$k_{PF_2}=\frac{y_p-0}{-\frac{1}{2}-2}=-\frac{2y_p}{5}$，

$k_{QF_1}=\frac{y_Q-0}{\frac{1}{2}-(-2)}=\frac{2y_Q}{5}$，$k_{QF_2}=\frac{y_Q-0}{\frac{1}{2}-2}=-\frac{2y_Q}{3}$，

所以 $k_{PF_1}k_{QF_1}=\frac{2y_p}{3}\times\frac{2y_Q}{5}=\frac{4y_py_Q}{15}$，$k_{PF_2}k_{QF_2}=\left(-\frac{2y_P}{5}\right)\times\left(-\frac{2y_Q}{3}\right)=\frac{4y_py_Q}{15}$，

所以 $k_{PF_1}k_{QF_1}=k_{PF_2}k_{QF_2}$，即得证.

（ii）由题可知：$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，$P\left(-\frac{1}{2},y_p\right)$，$Q\left(\frac{1}{2},y_Q\right)$，$M(x_0,y_0)$，所以

${y_0}^2=3\left({x_0}^2-1\right)$，

因为 $PF_1\perp MF_1$，$QF_2\perp MF_2$，所以 $\begin{cases}k_{PF_1}\cdot k_{MF_1}=-1\\ k_{QF_2}\cdot k_{MF_2}=-1\end{cases}$，即：$\begin{cases}\frac{y_p-0}{-\frac{1}{2}+2}\cdot\frac{y_0-0}{x_0+2}=-1\\ \frac{y_Q-0}{\frac{1}{2}-2}\cdot\frac{y_0-0}{x_0-2}=-1\end{cases}$，

化简得：$\begin{cases} y_P = -\dfrac{3(x_0+2)}{2y_0} \\ y_Q = \dfrac{3(x_0-2)}{2y_0} \end{cases}$，所以$P\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3(x_0+2)}{2y_0}\right)$，$Q\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3(x_0-2)}{2y_0}\right)$，则

$$k_{PQ}=\frac{\dfrac{3(x_0-2)}{2y_0}-\left(-\dfrac{3(x_0+2)}{2y_0}\right)}{\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\frac{3x_0}{y_0},$$

所以直线$PQ$方程为：$y-\left(-\dfrac{3(x_0+2)}{2y_0}\right)=\dfrac{3x_0}{y_0}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$，化简得：$3x_0x-y_0y-3=0$.

因此点$F_2$到直线$PQ$距离为：$d_1=\dfrac{|6x_0-3|}{\sqrt{9{x_0}^2+{y_0}^2}}$，而

$$|PQ|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3(x_0-2)}{2y_0}+\frac{3(x_0+2)}{2y_0}\right)^2}=\frac{\sqrt{9{x_0}^2+{y_0}^2}}{|y_0|},$$

所以$S_{\triangle PQF_2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{9{x_0}^2+{y_0}^2}}{|y_0|}\times\dfrac{|6x_0-3|}{\sqrt{9{x_0}^2+{y_0}^2}}=\dfrac{3|2x_0-1|}{2|y_0|}$.

又因为$MF_1=\sqrt{(x_0+2)^2+{y_0}^2}=\sqrt{(x_0+2)^2+3({x_0}^2-1)}=|2x_0+1|$，

$$PF_1=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2+\left(-\frac{3(x_0+2)}{2y_0}\right)^2}=\frac{3}{2}\frac{|2x_0+1|}{|y_0|},$$

所以$S_{\triangle MPF_1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\dfrac{|2x_0+1|}{|y_0|}\times|2x_0+1|=\dfrac{3(2x_0+1)^2}{4|y_0|}$，

因为$S_{\triangle PQF_2}=S_{\triangle MPF_1}$，所以$\dfrac{3|2x_0-1|}{2|y_0|}=\dfrac{3(2x_0+1)^2}{4|y_0|}$，即：$(2x_0+1)^2=2|2x_0-1|$.

当$2x_0-1<0$时，$(2x_0+1)^2=2(1-2x_0)$，化简得：$4{x_0}^2+8x_0-1=0$，

解得：$x_0=\dfrac{-2\pm\sqrt{5}}{2}$，又因为定义域为${x_0}^2\geq 1$，所以舍去$x_0=\dfrac{-2+\sqrt{5}}{2}$，因此$x_0=-\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$；

当$2x_0-1>0$时，$(2x_0+1)^2=2(2x_0-1)$，化简得：$4{x_0}^2+3=0$，无实数解.

综上所述，$x_0$的取值为$-\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$.