

高三数学 2 月联考试卷

注意事项:

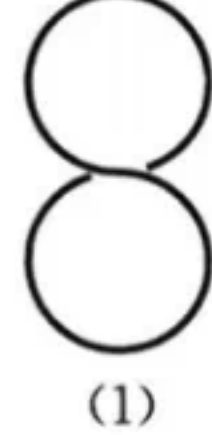
1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。厦门中学生助手微信公众号
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | (2x-1)(x+2) \leq 0\}$, $B = \{x | x \leq 0\}$, 则 $A \cup B =$
A. $(-\infty, 2]$ B. $(0, \frac{1}{2}]$ C. $(-\infty, \frac{1}{2}]$ D. $(-2, 0]$
2. $(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}x)^6$ 的展开式中 x^5 的系数为
A. -6 B. $-\frac{6}{5}$ C. 6 D. $\frac{6}{5}$
3. 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 为线段 AB 的中点, 且 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, 则
A. F 为线段 AD 的中点 B. F 为线段 BC 的中点
C. F 为线段 CD 的中点 D. F 为线段 BD 的中点
4. 若 $\frac{z}{1-i} = \frac{3-i}{1-2i}$, 则 厦门中学生助手微信公众号
A. z 为实数 B. $|z| = 1$
C. z 为纯虚数 D. $\bar{z} = 1-i$
5. 已知 a, b 为常数, 且非常数函数 $f(x) = 5^x + a \cdot b^x$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 则 $a+b =$
A. $-\frac{4}{5}$ B. $\frac{6}{5}$ C. $-\frac{5}{4}$ D. 4
6. 若函数 $y = 2\sin x \cos x$ ($0 < x < \varphi$) 的值域为 $(0, 1]$, 则 φ 的取值范围是
A. $(0, \frac{\pi}{4}]$ B. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ C. $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ D. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$
7. 抛物线 $y = x^2 - 4x$ 的顶点到抛物线 $y = -4x^2$ 的准线的距离为
A. 3 B. $\frac{31}{16}$ C. 5 D. $\frac{65}{16}$

【高三数学 第 1 页(共 4 页)】

8. 下面四个绳结中, 可以无损伤地变为右图中的绳结的个数是



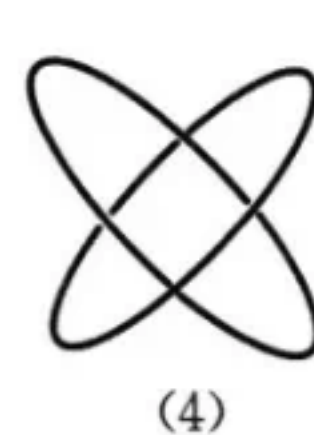
(1)



(2)



(3)



(4)

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分。厦门中学生助手微信公众号

9. 已知曲线 $C: y = \sqrt{1-x^2}$ 与圆 $D: (x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$ ($r > 0$), 则
A. 曲线 C 为半个圆 B. 当 $r=5$ 时, 曲线 C 与圆 D 有两个公共点
C. 当曲线 C 与圆 D 相切时, $r=4$ D. 当 $r > 4\sqrt{2}$ 时, 曲线 C 在圆 D 的内部
10. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别为棱 BB_1, BC, AB 上一点, 且 $B_1E = BF = BG$, 则
A. $FG \parallel$ 平面 A_1C_1D
B. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的表面积为 16π
C. 四面体 $BEFG$ 的体积的最大值为 $\frac{16}{81}$
D. 当 EG 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值为 2 时, $FG = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
11. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(y) = f(xy - x - y + 2)$ 对任意 $x, y \in (1, +\infty)$ 恒成立, 且 $f(5) = 2$, 则
A. $f(2) = -1$
B. $f(3) = 1$
C. $y = f(x+1)$ 可能为对数函数
D. 存在 $a \in \mathbf{R}$, 使得 $g(x) = f(ax - \frac{a}{2}) - f(x)$ ($x > 1$) 为常数函数

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。厦门中学生助手微信公众号

12. 若数据 $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ 的极差为 3, 方差为 4, 则数据 $2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{20}$ 的极差为 , 方差为 .
13. 已知角 α 的终边经过点 $A(2, \cos \alpha)$, 则 $\sin \alpha =$.
14. 在正方形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FC}$, 则以点 E, F 为焦点且经过点 A 的椭圆的离心率为 .

【高三数学 第 2 页(共 4 页)】

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) 厦门中学生助手微信公众号
已知福建某地生产的罐装岩茶的净含量的均值为 250 克, 且每罐岩茶的净含量 M (单位: 克) 服从正态分布 $N(250, \sigma^2)$, $P(M > 253) = 0.04$.
(1) 求 $P(M \leq 250)$, $P(247 \leq M \leq 253)$;
(2) 若甲从该地生产的罐装岩茶中随机购买 7 罐, 求恰有 3 罐的净含量不大于 250 克的概率;
(3) 若乙从该地生产的罐装岩茶中随机购买 100 罐, 设这 100 罐岩茶中净含量在 $[247, 253]$ 内的罐数为 X , 求 X 的数学期望。

16. (15 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{n+1} = 2a_n - \frac{5}{3^{n+1}}$.

- (1) 若 a_1, a_2, a_3 依次成等差数列, 求 a_1 ;
- (2) 若 $a_1 = \frac{4}{3}$, 证明数列 $\{a_n - \frac{1}{3^n}\}$ 为等比数列;
- (3) 若 $a_1 = \frac{4}{3}$, 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

17. (15 分) 厦门中学生助手微信公众号

已知双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}x$, 左、右焦点分别为 $F_1(-\sqrt{6}, 0)$, $F_2(\sqrt{6}, 0)$.

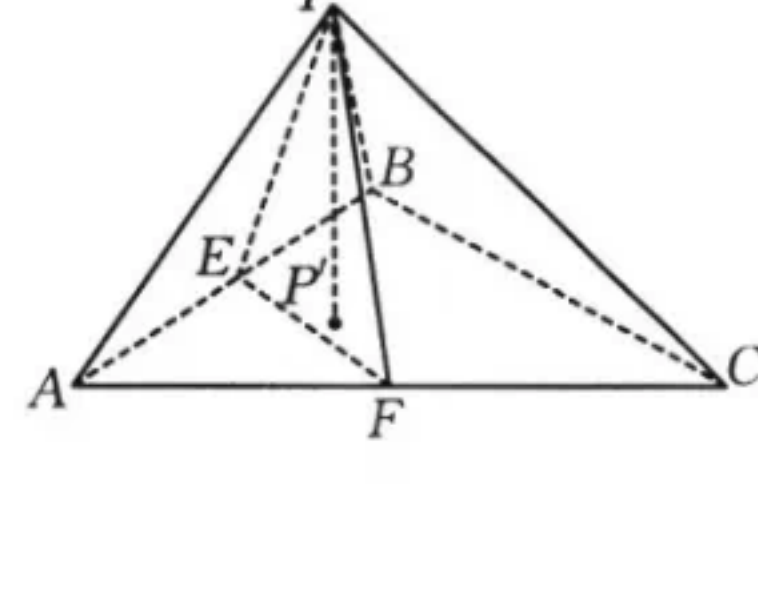
- (1) 求 C 的方程;
- (2) 若直线 $l: y = \frac{1}{3}x + 1$ 与 C 交于 A, B 两个不同的点, 求 $|AB|$;
- (3) 已知点 $M(0, m)$ ($m > 0$), 且直线 F_1M 与 C 只有一个公共点 N , 求点 N 的横坐标.

【高三数学 第 3 页(共 4 页)】

18. (17 分)

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 PBC , 且 $AB=5, AC=8, PA=2\sqrt{5}$.

- (1) 求 PB, PC .
- (2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$, 且 $\angle BAC < 90^\circ$, 证明: $PB \perp$ 平面 APC .
- (3) 过点 P 作底面 ABC 的垂线, 垂足 P' 在 $\triangle ABC$ 的内部, 且 $PP' = \frac{\sqrt{33}}{3}$, E, F 分别为 AB, AC 的中点, 平面 PBC 与平面 PEF 所成的角为 θ , 求 $|\cos \theta|$.



19. (17 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{e^x}$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 若 $\forall x \in (0, +\infty)$, $e^x f(x) \geq 4 - 4x + a \ln x^2$, 求 a 的值;
- (3) 若函数 $h(x) = f(f(x) - m)$ 恰有 8 个零点, 求 m 的取值范围.

参考数据: $e^2 \approx 4, 54 < e^4 < 55$.

【高三数学 第 4 页(共 4 页)】

厦门中学生助手微信公众号

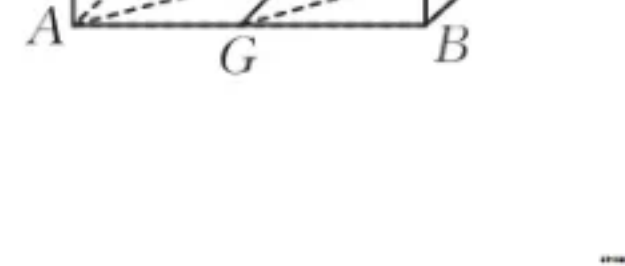


厦门中学生助手微信公众号
弥封线内不要答题

高三数学 2 月联考试卷

参考答案

- C 因为 $A = [-2, \frac{1}{2}]$, $B = (-\infty, 0]$, 所以 $A \cup B = (-\infty, \frac{1}{2}]$.
- B $(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}x)^6$ 的展开式中 x^5 的系数为 $C_6^5(-\frac{1}{\sqrt{5}})^5 = -\frac{6}{5}$. 厦门中学生助手微信公众号
- C 因为 E 为线段 AB 的中点, 且 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, 所以 $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, 所以 F 为线段 CD 的中点.
- A 因为 $\frac{z}{1-i} = \frac{3-i}{1-2i}$, 所以 $z = \frac{(1-i)(3-i)}{1-2i} = \frac{2-4i}{1-2i} = 2$, 所以 z 为实数, $|z| = 2, \bar{z} = 2$.
- A 依题意可得 $f(0) = 1 + a = 0$, 得 $a = -1$, 由 $f(-1) = -f(1)$, 得 $b = \frac{1}{5}$ 或 5 , 当 $b = 5$ 时, $f(x) = 0$ 为常数函数, 不符合题意, 则 $f(x) = 5^x - 5^{-x}$, 易证此函数为奇函数, 所以 $a + b = -\frac{4}{5}$.
- D 因为 $y = \sin 2x (0 < 2x < 2\varphi)$ 的值为 $(0, 1]$, 所以 $\frac{\pi}{2} < 2\varphi \leq \pi$, 得 $\frac{\pi}{4} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.
- D 因为 $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$, 所以抛物线 $y = x^2 - 4x$ 的顶点为 $(2, -4)$, 由 $y = -4x^2$, 得 $x^2 = -\frac{1}{4}y$, 所以抛物线 $y = -4x^2$ 的准线方程为 $y = \frac{1}{16}$, 故抛物线 $y = x^2 - 4x$ 的顶点到抛物线 $y = -4x^2$ 的准线的距离为 $\frac{1}{16} - (-4) = \frac{65}{16}$.
- A 题图中的绳结是两个相扣的圆环, 而 (1) 与 (3) 中的绳结由一根绳子扭成, (4) 中的绳结由两个没有相扣的圆环构成, 都不可能扭成题图中的绳结. (2) 中的绳结可以无损伤地变为题图中的绳结. 故这四个绳结中, 可以无损伤地变为题图中的绳结的个数是 1. 厦门中学生助手
- ACD 由 $y = \sqrt{1-x^2}$, 得 $x^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$, 所以曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 表示圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的上半部分, A 正确. 易知圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆心为坐标原点 O , 半径为 1, 圆 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2 (r > 0)$ 的圆心为 $A(3, 4)$, 半径为 r . 当 $r = 5$ 时, 曲线 C 与圆 D 只有 1 个公共点, B 错误. 因为曲线 C 与圆 D 相切, 所以 $|OA| = 1 + r$, 则 $5 = 1 + r$, 得 $r = 4$, C 正确. 因为在曲线 C 的所有点中, 离圆心 A 最远的是点 $M(-1, 0)$, $|AM| = 4\sqrt{2}$, 所以当 $r > 4\sqrt{2}$ 时, 曲线 C 在圆 D 的内部, D 正确. 厦门中学生助手微信公众号
- AC 因为 $BG = BF$, 所以 $\frac{BG}{BA} = \frac{BF}{BC}$, 连接 AC , 可得 $FG \parallel AC \parallel A_1C_1$.
又 $FG \subset$ 平面 A_1C_1D , $A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1D , 所以 $FG \parallel$ 平面 A_1C_1D ,
A 正确. 因为正方体外接球的直径 $2R = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$, 所以外接球的表面积为 $4\pi R^2 = 12\pi$, B 错误. 设 $BG = x \in [0, 2]$, 则 $BE = 2 -$



【高三数学·参考答案 第 1 页(共 5 页)】

- 四面体 $BEFG$ 的体积 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle GBF} \cdot BE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} x^2 (2-x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (2-x) \leq \frac{2}{3} (\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 2-x}{3})^3 = \frac{16}{81}$, 当且仅当 $\frac{x}{2} = 2-x$, 即 $x = \frac{4}{3}$ 时, 等号成立, C 正确. 因为 $BG \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $\angle GEB$ 为直线 EG 与平面 BCC_1B_1 所成的角, 则 $\tan \angle GEB = \frac{GB}{BE} = 2$, 所以 $B_1E = GB = 2BE$, 所以 $B_1E = \frac{2}{3} BB_1 = \frac{4}{3}$, $FG = \sqrt{2} GB = \sqrt{2} B_1E = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, D 错误.
- BCD 令 $x = y = 2$, 得 $f(2) + f(2) = f(2)$, 则 $f(2) = 0$, A 错误. 令 $x = y = 3$, 得 $f(3) + f(3) = f(5) = 2$, 则 $f(3) = 1$, B 正确. 取 $f(x) = \log_2(x-1)$, 得 $f(x) + f(y) = f(xy-x-y+2)$, $y = f(x+1) = \log_2 x$, C 正确. 令 $y = 3$, 得 $f(x) + f(3) = f(3x-x-3+2)$, 即 $f(x) + 1 = f(2x-1)$, 即 $f(2x-1) - f(x) = 1$, 故存在 $a = 2$, 使得 $g(x) = f(ax - \frac{a}{2}) - f(x) (x > 1)$ 为常数函数, D 正确. 厦门中学生助手微信公众号
- 6; 16 因为 $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ 的极差为 3, 方差为 4, 所以数据 $2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{20}$ 的极差为 $2 \times 3 = 6$, 方差为 $2^2 \times 4 = 16$.
- $\sqrt{2} - 1$ 因为 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{2}$, 所以 $\cos^2 \alpha = 2 \sin \alpha$, 则 $1 - \sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha$, 解得 $\sin \alpha = -1 \pm \sqrt{2}$, 又 $\sin \alpha \in [-1, 1]$, 所以 $\sin \alpha = \sqrt{2} - 1$.
- $\frac{\sqrt{130} - \sqrt{10}}{12}$ 如图, 过点 F 作 $FG \perp AB$, 垂足为 G , 连接 FA, FE . 设 $AB = 3$, 则 $AE = EG = 1, DF = 2, AD = FG = 3$, 所以 $AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{13}, EF = \sqrt{EG^2 + FG^2} = \sqrt{10}$, 则所求椭圆的离心率为 $\frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \frac{EF}{AE + AF} = \frac{\sqrt{10}}{1 + \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{10}(\sqrt{13} - 1)}{12} = \frac{\sqrt{130} - \sqrt{10}}{12}$. 厦门中学生助手微信公众号
- (1) 因为 M 服从正态分布 $N(250, \sigma^2)$, 且 $P(M > 253) = 0.04$, 所以 $P(M \leq 250) = 0.5$, ... 1 分
 $P(247 \leq M \leq 253) = 1 - P(M < 247) - P(M > 253) = 1 - 2P(M > 253) = 0.92$ 5 分
(2) 因为 $P(M \leq 250) = 0.5$, 所以恰有 3 罐的净含量不大于 250 克的概率为 $C_3^3 \times 0.5^3 \times (1 - 0.5)^4 = \frac{35}{128}$ (或 $0.273\ 437\ 5$). 9 分
(3) 依题意可得 $X \sim B(100, 0.92)$, ... 11 分
所以 $E(X) = 100 \times 0.92 = 92$ 13 分
- (1) 解: $a_2 = 2a_1 - \frac{5}{9}, a_3 = 2a_2 - \frac{5}{27} = 4a_1 - \frac{35}{27}$ 2 分
因为 a_1, a_2, a_3 依次成等差数列, 所以 $2a_2 = a_1 + a_3$, ... 3 分
即 $2(2a_1 - \frac{5}{9}) = a_1 + 4a_1 - \frac{35}{27}$, 解得 $a_1 = \frac{5}{27}$ 4 分

【高三数学·参考答案 第 2 页(共 5 页)】

- (2) 证明: 因为 $a_{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}} = 2a_n - \frac{5}{3^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} = 2a_n - \frac{6}{3^{n+1}} = 2a_n - \frac{2}{3^n} = 2(a_n - \frac{1}{3^n})$, ... 8 分
且 $a_1 - \frac{1}{3} = 1$, 所以 $\{a_n - \frac{1}{3^n}\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列. 10 分
(3) 解: 由 (2) 可得 $a_n - \frac{1}{3^n} = 2^{n-1}$, 则 $a_n = 2^{n-1} + \frac{1}{3^n}$ 12 分
 $S_n = (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1}) + (\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}) = \frac{1-2^n}{1-2} + \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}}$ 14 分
 $= 2^n - \frac{1}{2 \times 3^n} - \frac{1}{2}$ 15 分
- (1) 依题意设 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, ... 1 分
则 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}, c^2 = a^2 + b^2 = 6$, ... 3 分
解得 $a^2 = 5, b^2 = 1$, 所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{5} - y^2 = 1$ 4 分
(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 联立 $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 1, \\ \frac{x^2}{5} - y^2 = 1, \end{cases}$
得 $2x^2 - 15x - 45 = 0$, ... 6 分
则 $x_1 + x_2 = \frac{15}{2}, x_1 x_2 = -\frac{45}{2}$, ... 7 分
 $|AB| = \sqrt{1 + (\frac{1}{3})^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{5\sqrt{26}}{2}$ 9 分
(3) 直线 F_1M 的方程为 $\frac{x}{-\sqrt{6}} + \frac{y}{m} = 1$, 即 $y = \frac{m}{\sqrt{6}}x + m (m > 0)$, ... 10 分
代入 C 的方程得 $\frac{x^2}{5} - (\frac{m}{\sqrt{6}}x + m)^2 = 1$, 即 $(\frac{1}{5} - \frac{m^2}{6})x^2 - \frac{2m^2}{\sqrt{6}}x - m^2 - 1 = 0$ 11 分
当 $\frac{1}{5} - \frac{m^2}{6} \neq 0$ 时, $\Delta = \frac{4m^4}{6} + 4(\frac{1}{5} - \frac{m^2}{6})(m^2 + 1) = \frac{4}{5} + \frac{2}{15}m^2 > 0$, 方程有两个解, 不符合题意. 13 分
当 $\frac{1}{5} - \frac{m^2}{6} = 0$, 即 $m^2 = \frac{6}{5}$ 时, 方程 $(\frac{1}{5} - \frac{m^2}{6})x^2 - \frac{2m^2}{\sqrt{6}}x - m^2 - 1 = 0$ 即 $-\frac{2\sqrt{6}}{5}x - \frac{11}{5} = 0$, 方程只有一个解 $x = -\frac{11\sqrt{6}}{12}$, 符合题意. 厦门中学生助手微信公众号
故点 N 的横坐标为 $-\frac{11\sqrt{6}}{12}$ 15 分

【高三数学·参考答案 第 3 页(共 5 页)】

- (1) 解: 因为 $PA \perp$ 平面 PBC , 且 $PB, PC \subset$ 平面 PBC , 所以 $PA \perp PB, PA \perp PC$, ... 1 分
所以 $PB = \sqrt{AB^2 - PA^2} = \sqrt{5}, PC = \sqrt{AC^2 - PA^2} = 2\sqrt{11}$ 3 分
(2) 证明: 因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = 20 \sin \angle BAC = 10\sqrt{3}$, 所以 $\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 因为 $\angle BAC < 90^\circ$, 所以 $\angle BAC = 60^\circ$, ... 4 分
由余弦定理得 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = 49$, 所以 $BC = 7$ 5 分
注意到 $PB^2 + PC^2 = BC^2$, 因此 $PB \perp PC$ 6 分
因为 $PA \cap PC = P$, 所以 $PB \perp$ 平面 APC 7 分
(3) 解: 连接 $P'A, P'B, P'C$, 依题意可得 $PP' \perp$ 平面 ABC , 则 PP' 与 $P'A, P'B, P'C$ 均垂直. 因为 $PP' = \frac{\sqrt{33}}{3}$, 所以 $AP' = \frac{7\sqrt{3}}{3}, BP' = \frac{2\sqrt{3}}{3}, CP' = \frac{11\sqrt{3}}{3}$ 8 分
设 $\angle BAP' = \alpha, \angle CAP' = \beta$, 由余弦定理计算得 $\cos \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}, \cos \beta = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ 9 分
则 $\sin \alpha = \frac{1}{7}, \sin \beta = \frac{11}{14}, \cos \angle BAC = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}$, ... 10 分
由余弦定理得 $BC = 7$, 由 (2) 知, $PB \perp PC$, 则 PA, PB, PC 两两垂直. 11 分
以 P 为坐标原点, $\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $P(0, 0, 0), B(\sqrt{5}, 0, 0),$
 $C(0, 2\sqrt{11}, 0), A(0, 0, 2\sqrt{5}), E(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0, \sqrt{5}), F(0, \sqrt{11}, \sqrt{5}), \overrightarrow{PE}$
 $= (\frac{\sqrt{5}}{2}, 0, \sqrt{5}), \overrightarrow{PF} = (0, \sqrt{11}, \sqrt{5})$ 13 分
设平面 PEF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PE} = \frac{\sqrt{5}}{2}x + \sqrt{5}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PF} = \sqrt{11}y + \sqrt{5}z = 0, \end{cases}$ 14 分
令 $y = \sqrt{5}$, 得 $\mathbf{n} = (2\sqrt{11}, \sqrt{5}, -\sqrt{11})$ 15 分
易知平面 PBC 的一个法向量为 $\overrightarrow{PA} = (0, 0, 2\sqrt{5})$, ... 16 分
则 $|\cos \theta| = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{PA} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{PA}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{165}}{30}$ 17 分
- (1) 解: $f'(x) = \frac{-x^3 + 4x^2 + 2x - 8}{e^x}$, ... 1 分
 $f'(0) = -8, f(0) = 4$, ... 2 分
所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = -8x + 4$ 3 分
(2) 因为 $\forall x \in (0, +\infty), e^x f(x) \geq 4 - 4x + a \ln x^2$, 所以 $\forall x \in (0, +\infty), x^3 - x^2 - 2a \ln x \geq 0$ 4 分
令 $g(x) = x^3 - x^2 - 2a \ln x$, 则 $g(x) \geq 0$ 恒成立. 厦门中学生助手微信公众号
由 $g(1) = 0$, 可得 $g'(1) = 0$ 5 分

【高三数学·参考答案 第 4 页(共 5 页)】

- $g'(x) = 3x^2 - 2x - \frac{2a}{x}, g'(1) = 1 - 2a = 0$, 得 $a = \frac{1}{2}$ 6 分
当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $g'(x) = 3x^2 - 2x - \frac{1}{x} = (x-1)\frac{3x^2 + x + 1}{x}$,
当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增, 当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减,
所以 $g(x) \geq g(1) = 0$, 即 $g(x) \geq 0$ 恒成立. 8 分
故 a 的值为 $\frac{1}{2}$ 9 分
(3) $f'(x) = \frac{(x-4)(2-x^2)}{e^x}$.
当 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 或 $x > 4$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x < -\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2} < x < 4$ 时, $f'(x) > 0$.
可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{2})$ 和 $(\sqrt{2}, 4)$ 上是增函数, 在 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 和 $(4, +\infty)$ 上是减函数, ... 10 分
所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(\sqrt{2}) = \frac{2-2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} \approx \frac{2-2\sqrt{2}}{4} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \approx -0.207$, ... 11 分
极大值为 $f(-\sqrt{2})$ 和 $f(4)$, 且 $f(-\sqrt{2}) = (2+2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \approx 8(1+\sqrt{2}) \approx 19.3, f(4) = \frac{36}{e^4} \in (\frac{36}{55}, \frac{36}{54})$, 即 $f(4) \in (\frac{36}{55}, \frac{2}{3})$ 12 分
当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$; 当 $x > 4$ 时, $f(x) > 0$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$ 13 分
令 $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{e^x} = 0$, 得 $(x-1)(x^2 - 4) = 0$,
解得 $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 2$.
令 $h(x) = f(f(x) - m) = 0$, 得 $f(x) - m = -2$ 或 $f(x) - m = 1$ 或 $f(x) - m = 2$,
即 $f(x) = m - 2$ 或 $f(x) = m + 1$ 或 $f(x) = m + 2$ 14 分
因为 $x_2 - x_1 = 3, x_3 - x_2 = 1, 0 < f(4) - (-0.207) < 1, 19.3 - f(4) > 3$, ... 15 分
且 $h(x) = f(f(x) - m)$ 恰有 8 个零点, 厦门中学生助手微信公众号
所以 $\begin{cases} 0 < m - 2 < \frac{36}{e^4}, \\ \frac{36}{e^4} < m + 1 < (2+2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}, \\ \frac{36}{e^4} < m + 2 < (2+2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}, \end{cases}$ 16 分
解得 $2 < m < \frac{36}{e^4} + 2$, 即 m 的取值范围为 $(2, \frac{36}{e^4} + 2)$ 17 分



【高三数学·参考答案 第 5 页(共 5 页)】