莆田市2025届高中毕业班第二次教学质量检测试卷

数　学

本试卷共5页，19小题，满分150分．考试时间120分钟．

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共**8**小题，每小题**5**分，共**40**分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设$z(1-\mathrm{i})=2$，则$|\overline{z}|=$

A．1　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

2．已知$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{4}$，则$\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=$

A．$-\frac{\sqrt{15}}{4}$　　B．$-\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{15}}{4}$

3．已知向量$\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，则$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$方向上的投影向量为

A．$\boldsymbol{b}$　　B．$2\boldsymbol{b}$　　C．$\sqrt{2}\boldsymbol{b}$　　D．$2\sqrt{2}\boldsymbol{b}$

4．设$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，则“$q>1$”是“$\{a_n\}$为递增数列”的

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

5．曲线$y=x\mathrm{e}^x-x$在点P处切线的斜率为-1，则P的坐标为

A．$(-1,-1)$　　B．$(-1,1-\frac{1}{\mathrm{e}})$　　C．$(1,\mathrm{e}-1)$　　D．$(1,2\mathrm{e}-1)$

6．已知函数$f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$（$\omega>0$），$x=\frac{\pi}{6}$是$y=f(x)$图象的一条对称轴，且$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{12}\right)$上单调，则$\omega$为

A．2　　B．5　　C．8　　D．11

7. 为了解女儿身高与其母亲身高的关系，随机抽取5对母女的身高数据如下：

母亲身高 x (cm)	164	166	166	166	168
女儿身高 y (cm)	165	165	166	167	167

根据最小二乘法（即$\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y}_i)^2$取最小），$y$关于$x$的回归直线方程为

A. $\hat{y}=x-1$　　B. $\hat{y}=x+1$　　C. $\hat{y}=\frac{1}{2}x+83$　　D. $\hat{y}=166$

8. 设正方形$ABCD$的四条边分别经过点$(2,0)$，$(0,2)$，$(-2,0)$，$(0,-2)$，则该正方形与圆O：$x^2+y^2=8$的公共点至多有

A. 0个　　B. 4个　　C. 8个　　D. 16个

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9. 已知双曲线C: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$的左右焦点分别是$F_1$，$F_2$，过$F_2$的直线交$C$于$A$，$B$两点，下列结论正确的是

A. $F_1(-4,0)$　　B. 渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

C. $|AB|$的最小值为4　　D. $\triangle AF_1F_2$内切圆圆心在直线$x=\pm 2$上

10. 在三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$平面ABC，$\angle ABC=90^\circ$，$AP=AC=2$，E，F，G分别为AB，BC，PC中点，下列结论正确的是

A. $\triangle PBC$为直角三角形　　B. $PE/\!/$平面AFG

C. 三棱锥$P-ABC$的体积最大值为$\frac{2}{3}$　　D. 三棱锥$P-ABC$外接球的半径为定值

11. 已知函数$f(x)=ax^3-3x^2+16$，下列结论正确的是

A. 当$a<0$时，$x=0$是$f(x)$的极大值点

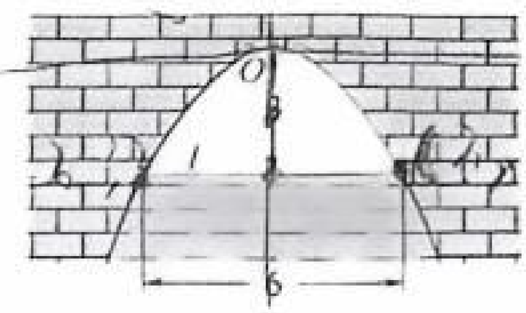
B. 存在实数a，使得$f(x)+f(4-x)=16$成立

C. 若$f(x)$在区间$(0,2)$上单调递减，则a的取值范围是$(-\infty,1)$

D. 若$f(x)$存在唯一的零点x_0，且$x_0>0$，则a的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$

三、填空题：本题共 **3** 小题，每小题 **5** 分，共 **15** 分．

12．$\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^3$ 的展开式中的常数项为________．



13．右图是抛物线形拱桥，当水面在 l 时，拱顶 O 离水面 3 m，水面宽 6 m．水面上升 1 m 后，水面宽度是________m．

14．在 $\triangle ABC$ 中，$AC=3BC$，$\triangle ABC$ 的面积为 3，则 AB 的最小值为________．

四、解答题：本题共 **5** 小题，共 **77** 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）

记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．已知 $2a_4=a_3+14$，$S_3=15$．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

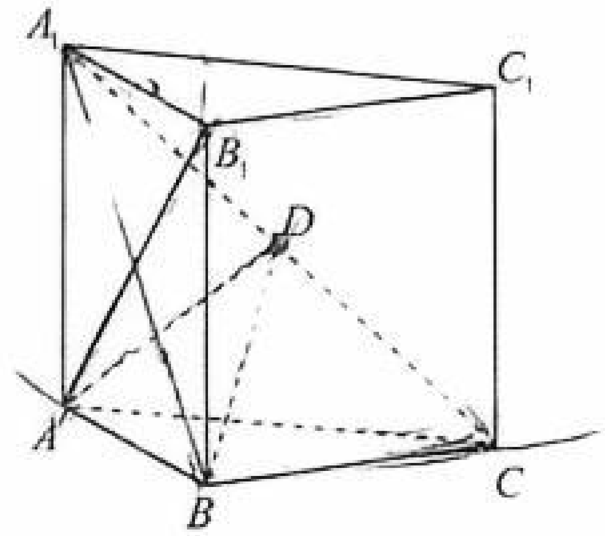
（2）记集合 $A=\{x\mid x=a_n,\ n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x\mid x=2^n+1,\ n\in\mathbf{N}^*\}$，将 $A\cup B$ 中的元素从小到大依次排列，得到新数列 $\{b_n\}$，求 $\{b_n\}$ 的前 20 项和．

16.（本小题满分 15 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，$AA_1=AB=BC$，D 为 A_1C 的中点．

（1）证明：$BC\perp AB_1$；

（2）求直线 A_1C 与平面 ABD 所成角的正弦值．



17.（本小题满分 15 分）

在某人工智能的语音识别系统开发中，每次测试语音识别成功的概率受环境条件（安静或嘈杂）的影响．

（1）已知在安静环境下，语音识别成功的概率为 0.9；在嘈杂环境下，语音识别成功的概率为 0.6．某天进行测试，已知当天处于安静环境的概率为 0.3，处于嘈杂环境的概率为 0.7．

（i）求测试结果为语音识别成功的概率；

（ii）已知测试结果为语音识别成功，求当天处于安静环境的概率；

（2）已知当前每次测试成功的概率为 0.8，每次测试成本固定，现有两种测试方案：

方案一：测试 4 次；方案二：先测试 3 次，如果这 3 次中成功次数小于等于 2 次，则再测试 2 次，否则不再测试．为降低测试成本，以测试次数的期望值大小为决策依据，应选择哪种方案？

18．（本小题满分 17 分）

已知椭圆 E_1： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，点 $P(0,1)$ 在 E 上．

（1）求 E_1 的方程；

（2）设椭圆 E_2： $\frac{x^2}{4}+y^2=m\,(m>1)$．若过 P 的直线 l 交 E_1 于另一点 Q，l 交 E_2 于 A，B 两点，且 A 在 x 轴上方．

（i）证明：$|AP|=|BQ|$；

（ii）O 为坐标原点，C 为 E_2 右顶点．设 A 在第一象限内，$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$，是否存在实数 m 使得 $\triangle OBP$ 的面积与 $\triangle CPA$ 的面积相等？若存在，求 m 的值；若不存在，说明理由．

19．（本小题满分 17 分）

若函数 $f(x)$ 在区间 D 上有意义，且存在正实数 t，使得 $\forall x\in D$，均有 $f(x+t)\leqslant f(x)$，则称 $f(x)$ 在 D 上具有性质 $P(t)$．设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$．

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）判断 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上是否具有性质 $P(2)$，并说明理由；

（3）当 $a\in(1,\mathrm{e})$ 时，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上具有性质 $P(t)$，证明：$t>2\left(\frac{a}{\ln a}-a\right)$．

莆田市2025届高中毕业班第二次教学质量检测

数学试题参考解答及评分标准

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则．
2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．
3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．
4．只给整数分数．单项选择题和单空填空题不给中间分．

一、选择题：每小题5分，满分40分．

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
答 案	C	C	A	D	B	B	C	B

二、选择题：每小题6分，满分18分．（本题为多项选择题，每小题中，全部选对得6分，部分选对的得部分分，有选错得0分）

题 号	9	10	11
答 案	ACD	ACD	ABD

三、填空题：每小题5分，满分15分．

12． 12　　13． $2\sqrt{6}$　　14． 4

四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．本小题主要考查等差数列、等比数列及数列求和等基础知识；考查运算求解能力，逻辑推理能力等；考查化归与转化思想，分类与整合思想，函数与方程思想等；考查逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性和综合性．满分13分．

解：（1）解法一：依题意，设数列$\{a_n\}$的公差为d，

因为$S_3=15$，所以$a_1+a_2+a_3=15$，则$3a_1+3d=15$，即$a_1+d=5$①，……………1分

因为$2a_4=a_3+14$，即$2(a_1+3d)=a_1+2d+14$，所以$a_1+4d=14$②，……………2分

由①②，得$a_1=2$，……………3分

$d=3$．……………4分

所以 $a_n=2+(n-1)\times 3$． ………………………………………………………………5 分

所以 $a_n=3n-1$． ………………………………………………………………………6 分

（2）因为数列 $\{2^n+1\}$ 的前 5 项为 3，5，9，17，33， ………………………………7 分

数列 $\{a_n\}$ 的前 17 项为 2，5，8，11，14，17，20，…，50， …………………………8 分

其中 5 和 17 为数列 $\{2^n+1\}$ 的前 5 项与 $\{a_n\}$ 的前 17 项的公共项，……………………10 分

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 20 项和为

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{20}$

$=(3+5+9+17+33)+(a_1+a_2+\cdots+a_{17})-5-17$ ……………………………………11 分

$=67+2\times 17+\dfrac{17\times 16}{2}\times 3-5-17$． ………………………………………………12 分

$=487$． ……………………………………………………………………………………13 分

解法二：（1）依题意，设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

因为 $S_3=15$，所以 $\dfrac{3(a_1+a_3)}{2}=3a_2=15$，所以 $a_2=5$， ……………………………1 分

又因为 $2a_4=a_3+14$，所以 $a_3+a_5=a_3+14$，所以 $a_5=14$， ……………………………2 分

所以 $3d=a_5-a_2=9$，解得 $d=3$． ……………………………………………………3 分

所以 $a_1=a_2-d=2$． ……………………………………………………………………4 分

所以 $a_n=2+(n-1)\times 3$． ………………………………………………………………5 分

$=3n-1$． ………………………………………………………………………………6 分

（2）设 $c_n=2^n+1$，

因为 $a_{20}=3\times 20-1=59$， ……………………………………………………………7 分

所以由 $c_n=2^n+1\leqslant 59$ 可得 $n\leqslant 5$， ………………………………………………8 分

因为 $c_1=3, c_2=5, c_3=9, c_4=17, c_5=33,$ ……………………………………………9 分

其中 $c_2=5=a_2$， $c_4=17=a_6$， ………………………………………………………10 分

所以数列$\{b_n\}$的前20项和为

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{20}$

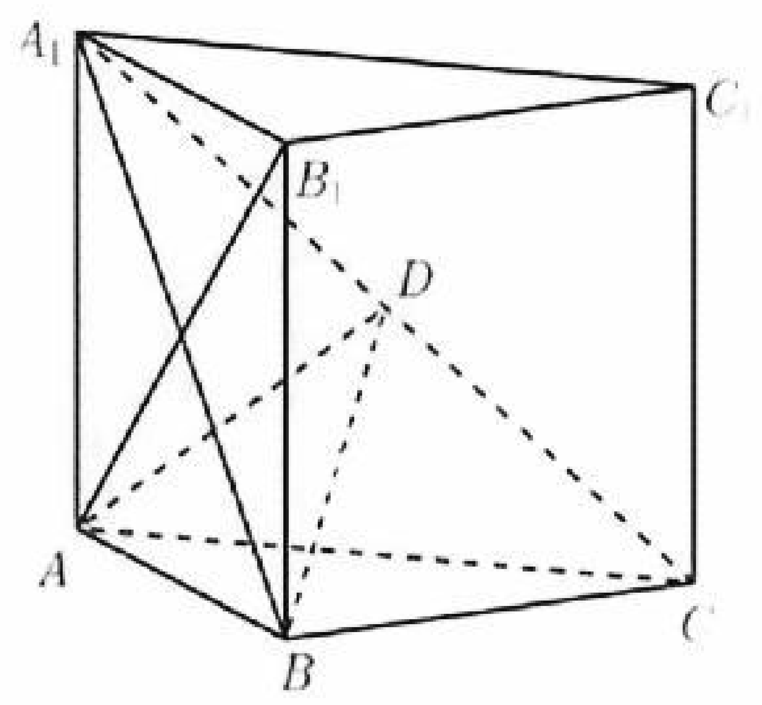
$=(c_1+c_3+c_5)+(a_1+a_2+\cdots+a_{17})$ ……………………………………………………11 分

$=(3+9+33)+2\times17+\dfrac{17\times16}{2}\times3$ ……………………………………………… 12 分

$=487$. ……………………………………………………………………………………13 分

16．本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，空间角等基础知识；考查空间想象能力，逻辑推理能力，运算求解能力等；考查化归与转化思想，数形结合思想等；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性和综合性．满分 15 分．

解：(1)如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，因为$AA_1\perp$平面ABC，



$AB\subset$平面ABC，所以$AA_1\perp AB$. ………………………… 1 分

又因为$AA_1=AB$，所以四边形AA_1B_1B是正方形， ……2 分

所以$AB_1\perp A_1B$. ……………………………………………3 分

又平面$A_1BC\perp$平面ABB_1A_1，平面$A_1BC\cap$平面$ABB_1A_1=A_1B$，

所以$AB_1\perp$平面A_1BC. ……………………………………………………………… 4 分

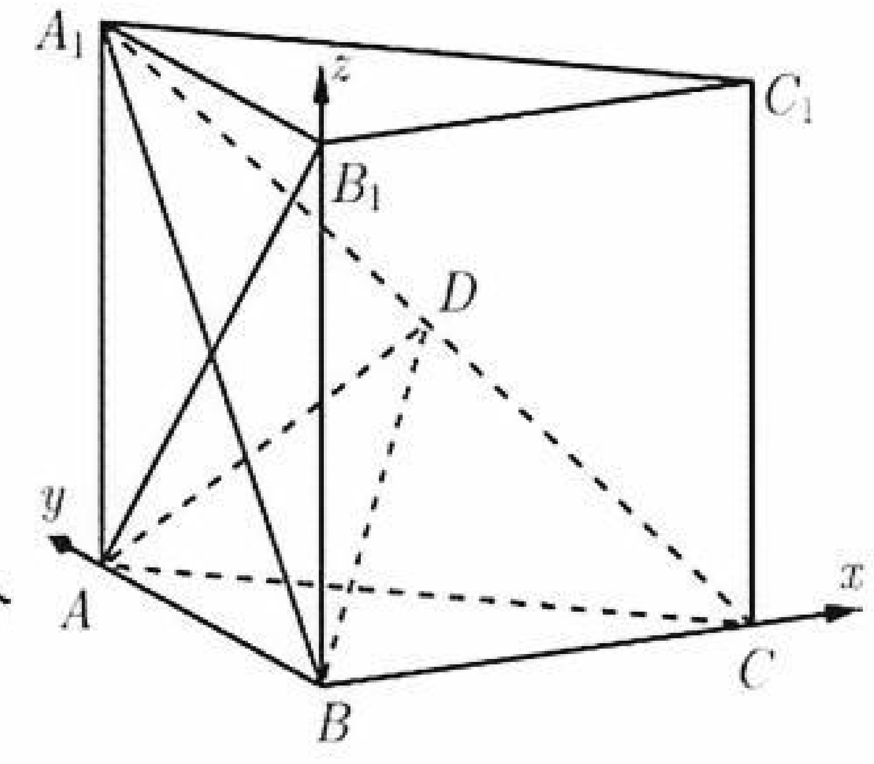
又因为$BC\subset$平面A_1BC，所以$AB_1\perp BC$． …………………………………………… 5 分

(2)解法一：因为$BB_1\perp$平面ABC，$BC\subset$平面ABC，所以$BB_1\perp BC$． ……………… 6 分

又$AB_1\perp BC$，$AA_1\cap AB_1=A$，$AA_1\subset$平面AA_1B_1B，$AB_1\subset$平面AA_1B_1B，

所以$BC\perp$平面AA_1B_1B， ……………………………………………………………… 7 分

所以BC，BA，BB_1两两垂直，以B为原点，以$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BB_1}$的方向分别为x，y，z轴的正方向，建立空间直角坐标系. ………………………………… 8 分



不妨设$AA_1=AB=BC=2$，则$B(0,0,0)$，$A(0,2,0)$，$A_1(0,2,2)$，

$C(2,0,0)$，$D(1,1,1)$， …………………………………………… 9 分

所以$\overrightarrow{BD}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(2,-2,-2)$． ……… 10 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 ABD 的法向量，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x+y+z=0,\\ 2y=0.\end{cases}$ ……………………………………………………11 分

取 $x=1$，则 $z=-1$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$ 是平面 ABD 的一个法向量. ……………… 12 分

设直线 A_1C 与平面 ABD 所成角为 θ，则

$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{A_1C},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{A_1C}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{A_1C}||\boldsymbol{n}|}$ ……………………………………………………13 分

$=\dfrac{|2\times1+(-2)\times0+(-2)\times(-1)|}{\sqrt{12}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$， ……………………………………………14 分

所以直线 A_1C 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …………………………………………15 分

解法二：不妨设 $AA_1=AB=BC=2$，

因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC， $BC\subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp BC$. ……………………………… 6 分

又 $AB_1\perp BC$， $AA_1\cap AB_1=A$， $AA_1\subset$ 平面 AA_1B_1B， $AB_1\subset$ 平面 AA_1B_1B，

所以 $BC\perp$ 平面 AA_1B_1B，即 BC， BA， BB_1 两两垂直.……………………………………… 7 分

在 $\triangle A_1AC$ 中， $A_1A\perp AC$， $A_1C=2\sqrt{3}$.

D 为 A_1C 的中点，所以 $AD=CD=\dfrac{1}{2}A_1C=\sqrt{3}$， ………………………………………… 8 分

同理 $BD=\dfrac{1}{2}A_1C=\sqrt{3}$， ……………………………………………………………………… 9 分

所以 $\triangle ABD$ 的面积 $S=\sqrt{2}$. ……………………………………………………………………10 分

所以三棱锥 $D-ABC$ 的体积 $V_{D-ABC}=\dfrac{1}{2}V_{A_1-ABC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times2\times2=\dfrac{2}{3}$. ……………………11 分

设点 C 在平面 ABD 的投影为 C'，则 $V_{D-ABC}=V_{C-ABD}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{2}\times CC'=\dfrac{2}{3}$， …………12 分

所以 $CC'=\sqrt{2}$， ……………………………………………………………………………13 分

设直线 A_1C 与平面 ABD 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{CC'}{CD}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………………………………………14 分

所以直线 A_1C 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………15 分

17. 本小题主要考查条件概率与全概率公式，分布列与数学期望等基础知识；考查数据处理能力，运算求解能力，逻辑推理能力等；考查统计与概率思想，分类与整合思想等；考查逻辑推理，数学运算，数据分析，数学建模等核心素养；体现基础性，综合性和应用性．满分 15 分．

解：(1) 记事件 $A=$ “某天进行测试时处于安静环境”，$\overline{A}=$ “某天进行测试时处于嘈杂环境”，

事件 $B=$ “测试结果语音识别成功”. ……………………………………1 分

根据题意得，$P(A)=0.3$，$P(\overline{A})=0.7$，$P(B\mid A)=0.9$，$P(B\mid \overline{A})=0.6$. ……………2 分

(i) 由全概率公式，得

$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})$ ……………………………………3 分

$=0.3\times0.9+0.7\times0.6$ ……………………………………4 分

$=0.69$. ……………………………………5 分

(ii) “已知测试结果语音识别成功，当天处于安静环境的概率”，就是在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率. ……………………………………6 分

$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}$ ……………………………………7 分

$=\frac{0.3\times0.9}{0.69}=\frac{9}{23}$. ……………………………………8 分

(2) 方案一的测试次数的数学期望为 4. ……………………………………9 分

用 X 表示“方案二测试的次数”，由题意得 X 的可能取值为 3，5. ……………………10 分

则 $P(X=3)=0.8^3=0.512$， ……………………………………11 分

$P(X=5)=1-P(X=3)=1-0.512=0.488$. ……………………………………12 分

所以方案二测试次数的数学期望为 $E(X)=3\times0.512+5\times0.488=3.976$， ……………13 分

又因为 $E(X)<4$， ……………………………………14 分

所以，以测试次数的期望值大小为决策依据，应选择方案二. ……………………………15 分

18．本小题主要考查椭圆的标准方程及简单几何性质，直线与椭圆的位置关系，面积公式等基础知识；考查逻辑推理能力，运算求解能力和创新意识等；考查数形结合思想，化归与转化思想，函数与方程思想等；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性，综合性与创新性．满分 17 分．

解：（1）由已知，得$b=1$，……1 分

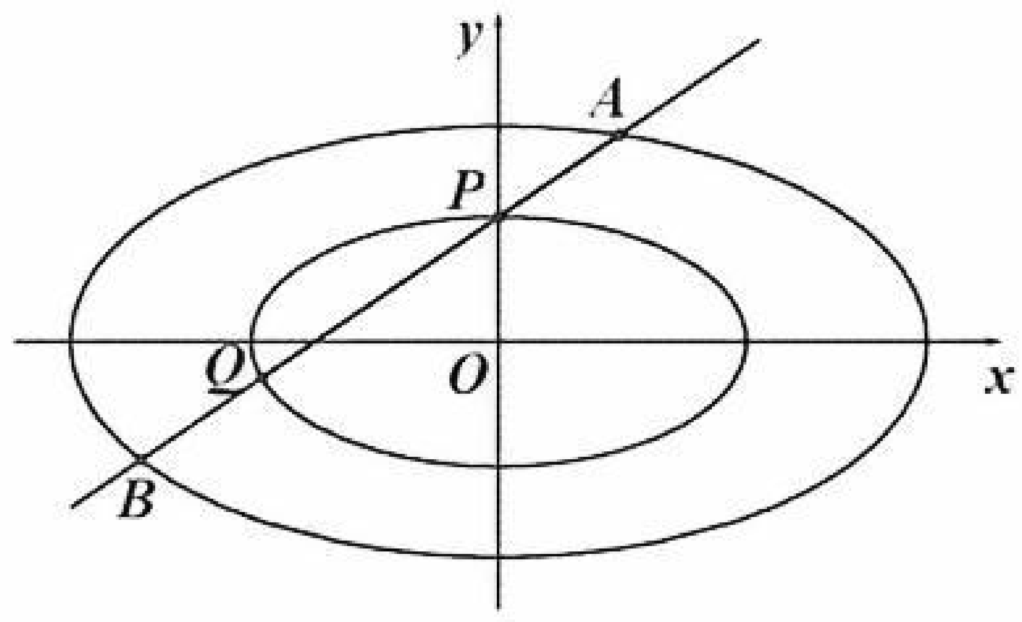
因为$a^2=b^2+c^2$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，……2 分

所以$a=2$．……3 分

所以E_1的方程为:$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．……4 分

（2）**解法一：**

（i）证明：



要证$|AP|=|BQ|$，只须证明弦AB的中点与弦PQ的中点重合.

当l垂直于x轴时，弦AB，PQ的中点都是坐标原点O，故它们的中点重合，

此时$|AP|=|BQ|$．……5 分

当l不垂直于x轴时，设直线l的方程为$y=kx+1(k\neq 0)$，$P(x_P，y_P)$，$Q(x_Q，y_Q)$，

$A(x_A，y_A)$，$B(x_B，y_B)$．

由$\begin{cases} y=kx+1, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=m, \end{cases}$得$(1+4k^2)x^2+8kx+4-4m=0$，……6 分

则$x_A+x_B=\dfrac{-8k}{1+4k^2}$，

所以弦AB中点的横坐标为$\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-4k}{1+4k^2}$，……7 分

同理可得$x_P+x_Q=\dfrac{-8k}{1+4k^2}$，……8 分

所以弦PQ中点的横坐标为$\dfrac{x_P+x_Q}{2}=\dfrac{-4k}{1+4k^2}$，……9 分

所以弦AB的中点与弦PQ的中点重合.此时$|AP|=|BQ|$.

综上所述，$|AP|=|BQ|$．……10 分

（ii）因为$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$，所以$-x_B=2x_A$，又因为点$A$在第一象限内,$k>0$,…………11 分

由（i）知，$x_A+x_B=\dfrac{-8k}{1+4k^2}$，所以$\begin{cases}x_A=\dfrac{8k}{1+4k^2},\\ x_B=\dfrac{-16k}{1+4k^2},\end{cases}$ ……………………………………12 分

又$x_Ax_B=\dfrac{4-4m}{1+4k^2}$，所以$\dfrac{8k}{1+4k^2}\cdot\dfrac{-16k}{1+4k^2}=\dfrac{4-4m}{1+4k^2}$，化简得$m=\dfrac{1+36k^2}{1+4k^2}$ ①.………13 分

设O到l的距离为d_O，C到l的距离为d_C.

假设△OBP的面积与△CPA的面积相等，则$\dfrac{1}{2}|BP|\cdot d_O=\dfrac{1}{2}|PA|\cdot d_C$.

因为$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$，所以$\left|\overrightarrow{BP}\right|=2\left|\overrightarrow{PA}\right|$，所以$2d_O=d_C$.

又$d_O=\dfrac{|k\times 0+1|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，………………………………………………………14 分

因为$C(2\sqrt{m},0)$，所以$d_C=\dfrac{|k\times 2\sqrt{m}+1|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{2k\sqrt{m}+1}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以$k\sqrt{m}=\dfrac{1}{2}$ ②.………………………………………………………………15 分

由①②解得$\begin{cases}k^2=\dfrac{1}{12},\\ m=3,\end{cases}$经检验符合题意.………………………………………16 分

所以$m=3$.……………………………………………………………………………17 分

（2）解法二：

（i）证明：

当直线l垂直于x轴时，弦AB，PQ的中点都是坐标原点O，故它们的中点重合，此时$|AP|=|BQ|$.………………………………………………………………………… 5 分

当l不垂直于x轴时，设$P(x_P，y_P)$，$Q(x_Q，y_Q)$，$A(x_A，y_A)$，$B(x_B，y_B)$.

由$\begin{cases}\dfrac{{x_A}^2}{4}+{y_A}^2=m,\\ \dfrac{{x_B}^2}{4}+{y_B}^2=m,\end{cases}$得$\dfrac{{x_A}^2}{4}-\dfrac{{x_B}^2}{4}+{y_A}^2-{y_B}^2=0$，

所以$k_{AB}=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{x_A+x_B}{y_A+y_B}$.…………………………………………… 6 分

同理，$k_{PQ}=\dfrac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{x_P+x_Q}{y_P+y_Q}$. ……………………………………………………7 分

因为 P，Q，A，B 四点共线，所以 $k_{AB}=k_{PQ}$，所以 $-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{x_A+x_B}{y_A+y_B}=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{x_P+x_Q}{y_P+y_Q}$，

又 $\dfrac{x_P+x_Q}{y_P+y_Q}=\dfrac{x_P+x_Q}{k(x_P+x_Q)+2}$，$\dfrac{x_A+x_B}{y_A+y_B}=\dfrac{x_A+x_B}{k(x_A+x_B)+2}$，

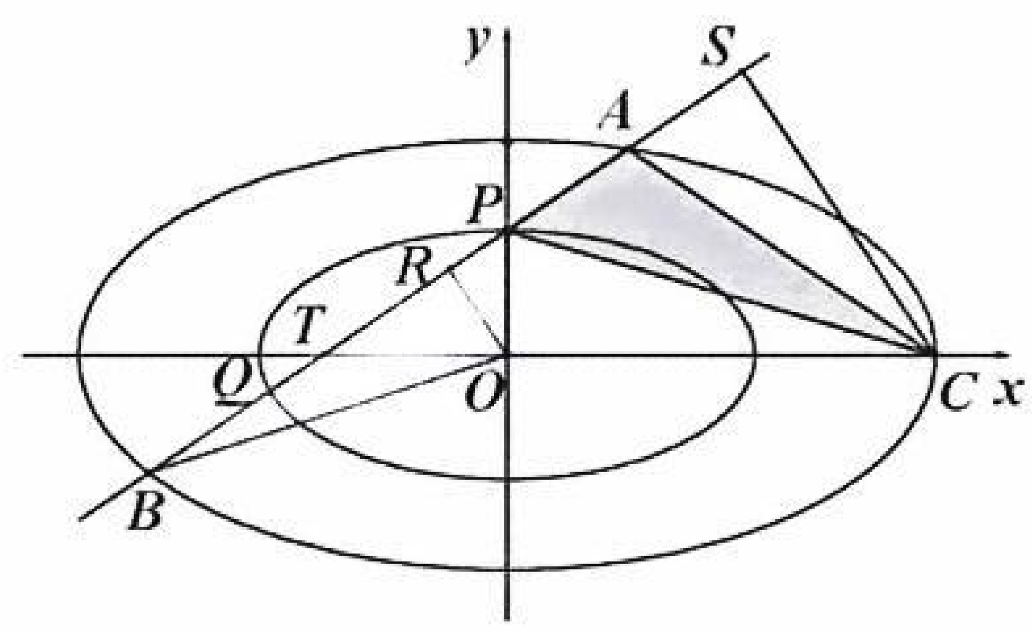
所以 $\dfrac{k(x_A+x_B)+2}{x_A+x_B}=\dfrac{k(x_p+x_Q)+2}{x_p+x_Q}$， ……………………………………………………8 分

化简得 $\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{x_p+x_Q}{2}$. ……………………………………………………………………9 分

所以弦 AB 的中点与弦 PQ 的中点重合.此时 $|AP|=|BQ|$.

综上所述，$|AP|=|BQ|$. ……………………………………………………………………10 分

（ii）过 O 作 l 的垂线，垂足为 R，过 C 作 l 的垂线，垂足为 S，设直线 l 交 x 轴于点 T.
假设△OBP 的面积与△CPA 的面积相等，



则 $\dfrac{1}{2}|BP||OR|=\dfrac{1}{2}|PA||CS|$.…………… 11 分

又因为 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$，所以 $|BP|=2|PA|$，

所以 $|OR|=\dfrac{1}{2}|CS|$， …………………… 12 分

所以 O 为 Rt △CST 斜边 CT 的中点. ……………………………………………………………13 分

此时 T 为 E_2 的左顶点，因此 T 与 B 重合，又因为点 $C(2\sqrt{m},0)$，所以 $B(-2\sqrt{m},0)$，

把 $B(-2\sqrt{m},0)$ 代入 l 的方程，得 $-2k\sqrt{m}+1=0$，即 $k\sqrt{m}=\dfrac{1}{2}$①， ……………………14 分

因为 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$，所以 $-x_B=2x_A$，所以 $x_A=\sqrt{m}$，所以 $A(\sqrt{m}，k\sqrt{m}+1)$，………15 分

把 $A(\sqrt{m}，k\sqrt{m}+1)$ 代入 E_2：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=m$，得 $(k\sqrt{m}+1)^2=\dfrac{3}{4}m$②， ……………16 分

由①②解得 $m=3$.经检验符合题意.

所以 $m=3$. ……………………………………………………………………………17 分

19．本小题主要考查函数单调性，函数的零点，导数及其应用，不等式等基础知识；考查逻辑推理能力，运算求解能力，直观想象能力和创新意识等；考查函数与方程思想，化归与转化思想，分类与整合思想等；考查直观想象，数学运算，逻辑推理等核心素养；体现基础性，综合性和创新性．满分 17 分．

解：（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$．…………1 分

由 $f'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$．…………2 分

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$．…………3 分

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\ \mathrm{e})$，单调递减区间为 $(\mathrm{e},+\infty)$．…………4 分

（2）解法一：

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上具有性质 $P(2)$．…………5 分

理由如下：

由（1）知，$f(x)$ 在 $(0,\ \mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减．

因为 $f(2)=f(4)$．…………6 分

所以，当 $x\in[2,\ \mathrm{e}]$ 时，$x+2\in[4,\ \mathrm{e}+2]$，此时 $f(x)\geqslant f(2)$，$f(x+2)\leqslant f(4)=f(2)$，

…………7 分

所以 $f(x+2)\leqslant f(x)$；…………8 分

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$x+2\in[\mathrm{e}+2,+\infty)$，此时 $f(x+2)\leqslant f(x)$．…………9 分

综上，$\forall x\in[2,+\infty)$，均有 $f(x+2)\leqslant f(x)$．

即 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上具有性质 $P(2)$．…………10 分

解法二：$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上具有性质 $P(2)$．…………5 分

证明如下：

欲证 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上具有性质 $P(2)$，

即证 $f(x+2)\leqslant f(x)$，$x\in[2,+\infty)$ 恒成立，

即证 $(x+2)\ln x-x\ln(x+2)\geqslant 0$，$x\in[2,+\infty)$ 恒成立．…………6 分

设 $g(x)=(x+2)\ln x-x\ln(x+2)$，$x\in[2,+\infty)$，

则 $g'(x)=\ln\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x}{x+2}$，…………7 分

令 $r=\dfrac{x}{x+2}\in[0.5,1)$，设 $h(r)=\ln r+\dfrac{1}{r}-r$， $r\in[0.5,1)$.

则 $h'(r)=\dfrac{-(r-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}}{r^2}<0$，所以 $h(r)$ 为减函数，

所以 $h(r)>h(1)=0$， …………………………………………………………………… 8 分

所以 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 为增函数. ……………………………………………… 9 分

所以 $g(x)\geqslant g(2)=0$，即 $(x+2)\ln x-x\ln(x+2)\geqslant 0$， $x\in[2,+\infty)$ 恒成立.

命题得证. …………………………………………………………………………………… 10 分

（3）**证明**：因为 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上具有性质 $P(t)$，

所以 $f(x+t)\leqslant f(x)$， $x\in[a,+\infty)$ 恒成立，

即 $(x+t)\ln x-x\ln(x+t)\geqslant 0$， $x\in[a,+\infty)$ 恒成立.

设 $g(x)=(x+t)\ln x-x\ln(x+t)$， $x\in[a,+\infty)$，

则 $g(x)\geqslant 0$， $x\in[a,+\infty)$ 恒成立， ………………………………………… 11 分

又 $g'(x)=\ln\dfrac{x}{x+t}+\dfrac{x+t}{x}-\dfrac{x}{x+t}$.

取 $r=\dfrac{x}{x+t}\in(0,1)$. 设 $h(r)=\ln r+\dfrac{1}{r}-r$， $r\in(0,1)$.

则 $h'(r)=\dfrac{-(r-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}}{r^2}<0$，所以 $h(r)$ 为减函数， …………………… 12 分

所以 $h(r)>h(1)=0$，所以 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 为增函数.

所以 $g(x)\geqslant g(a)=(a+t)\ln a-a\ln(a+t)\geqslant 0$， $a\in(1,\mathrm{e})$. ………………… 13 分

故原命题等价于：

当 $(a+t)\ln a-a\ln(a+t)\geqslant 0$， $a\in(1,\mathrm{e})$ 成立时，求 t 的取值范围. ………… 14 分

设 $I(t)=(a+t)\ln a-a\ln(a+t)$，则 $I(t)\geqslant 0$.

$I'(t)=\ln a-\dfrac{a}{a+t}$，由 $I'(t)=0$，得 $t=\dfrac{a}{\ln a}-a$，记作 t_0.

所以当 $0<t<t_0$ 时， $I'(t)<0$；当 $t>t_0$ 时， $I'(t)>0$.

所以 $I(t)$ 在 $(0,\ t_0)$ 上单调递减，在 $(t_0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………… 15 分

因为$I(0)=0$，所以$I(t_0)<0$，又$I\left(\dfrac{3\mathrm{e}}{\ln a}\right)>0$，所以$\exists t_1\in\left(t_0,\dfrac{3\mathrm{e}}{\ln a}\right)$，使得$I(t_1)=0$.

所以当$t\in(0,\ t_1)$时，$I(t)<0$，当$t\in(t_1,+\infty)$时，$I(t)>0$.……………………………16 分

又$I\left(2\left(\dfrac{a}{\ln a}-a\right)\right)=a\left[2-\ln\left(\dfrac{2a^2}{\ln a}-a^2\right)\right]<0$，所以$t_1>2\left(\dfrac{a}{\ln a}-a\right)$，

所以由$I(t)\geqslant 0$可知，$t>2\left(\dfrac{a}{\ln a}-a\right)$成立.………………………………………………17 分