莆田市2024届高中毕业班第四次教学质量检测试卷

数　　学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x-4\leqslant 0\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}|2-x>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{3,4\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{2,3,4\}$

2. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $P(m,4)$ 在抛物线 C 上，且 $|PF|=4$，则抛物线 C 的准线方程是

A. $y=-4$　　B. $y=-2$　　C. $x=-4$　　D. $x=-2$

3. 已知数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的平均数为 $\overline{x}$，方差为 s^2，数据 $3x_1-1,3x_2-1,3x_3-1,\cdots,3x_n-1$ 的平均数为 $\overline{x_1}$，方差为 s_1^2，则

A. $\overline{x_1}=3\overline{x}$，$s_1^2=9s^2$　　B. $\overline{x_1}=3\overline{x}$，$s_1^2=9s^2-1$

C. $\overline{x_1}=3\overline{x}-1$，$s_1^2=9s^2$　　D. $\overline{x_1}=3\overline{x}-1$，$s_1^2=9s^2-1$

4. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则"$\{a_n\}$ 是等差数列"是"$S_{11}=11a_6$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 若制作一个容积为 $\frac{4\pi}{3}$ 的圆锥形无盖容器（不考虑材料的厚度），要使所用材料最省，则该圆锥的高是

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{6}$　　D. 4

6. 已知圆 $C:(x-3)^2+y^2=16$，$A(-3,0)$，P 是圆 C 上的动点，线段 PA 的垂直平分线与直线 PC（点 C 是圆 C 的圆心）交于点 M，则点 M 的轨迹是

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 双曲线　　D. 抛物线

7. 已知 $a>1$，点 P 在曲线 $y=e^{ax}$ 上，点 Q 在曲线 $y=\frac{1}{a}\ln x$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值是

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$　　B. $\sqrt{2}a$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2a}(1+\ln a)$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{a}(\ln a+1)$

8. 已知定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足$f(x+1)=2f(x)+1$，且$f(1)=1$，则$f(100)=$

A. $2^{100}-1$　　B. $2^{100}+1$　　C. $2^{101}-1$　　D. $2^{101}+1$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 若z是非零复数，则下列说法正确的是

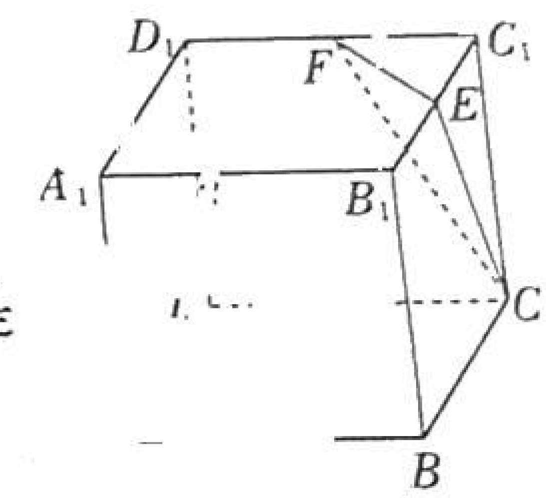
A. 若$z+\bar{z}=0$，则$\frac{\bar{z}}{z}= i$

B. 若$z\cdot\bar{z}=2|z|$，则$|z|=2$

C. 若$z_1=\bar{z}$，则$\overline{z_1}=z$

D. 若$|z+z_1|=0$，则$z_1\cdot\bar{z}+|z|^2=0$

10. 如图，在边长为 4 的正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，E,F分别是棱B_1C_1，C_1D_1的中点，P是正方形$A_1B_1C_1D_1$内的动点，则下列结论正确的是



A. 若DP∥平面CEF，则点P的轨迹长度为$2\sqrt{2}$

B. 若$AP=\sqrt{17}$，则点P的轨迹长度为2π

C. 若$AP=\sqrt{17}$，则直线AP与平面CEF所成角的正弦值的最小值是$\frac{2\sqrt{17}}{17}$

D. 若P是棱A_1B_1的中点，则三棱锥$P\text{-}CEF$的外接球的表面积是41π

11. 已知函数$f(x)=3\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$的图象既关于点$(-\frac{\pi}{2},0)$中心对称，也关于直线$x=\frac{3\pi}{4}$轴对称，且$f(x)$在$[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$上单调，则$\omega$的值可能是

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{6}{5}$　　C. 2　　D. $\frac{14}{5}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|=4$，且$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=5$，则向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$夹角的余弦值是___▲___.

13. 甲、乙等 5 人参加A,B,C这三项活动，要求每人只参加一项活动，且每项活动至少有 1 人参加，若甲、乙不参加同一项活动，且只有 1 人参加A活动，则他们参加活动的不同方案有___▲___种.

14. 古希腊著名数学家阿波罗尼斯发现：若动点M与两个定点A,B的距离之比为常数$\lambda(\lambda>0,\lambda\neq1)$，则点$M$的轨迹是圆. 后来，人们将这个圆以他的名字命名，称为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆. 已知$A(-1,0)$，$B(0,1)$，M是平面内一动点，且$\frac{|MA|}{|MB|}=\sqrt{2}$，则点$M$的轨迹方程为___▲___. 若点$P$在圆$O:(x-2)^2+y^2=36$上，则$2|PA|+|PB|$的最小值是___▲___.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）

在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$b(\cos C+1)=c(2-\cos B)$.

(1)证明：$a+b=2c$.

(2)若$a=6$，$\cos C=\frac{9}{16}$，求$\triangle ABC$的面积.

16.（15 分）

跑步是一种方便的体育锻炼方法，坚持跑步可以增强体质，提高免疫力. 某数学兴趣小组成员从某校大学生中随机抽取 100 人，调查他们是否喜欢跑步，得到的数据如表所示.

性别	跑步		合计
	喜欢	不喜欢	
男	40	20	60
女	15	25	40
合计	55	45	100

(1)依据$\alpha=0.005$的独立性检验，能否认为该校大学生是否喜欢跑步与性别有关？

(2)该数学兴趣小组成员为进一步调查该校大学生喜欢跑步的原因，采用分层抽样的方法从样本中喜欢跑步的大学生中随机抽取 11 人，再从这 11 人中随机抽取 4 人进行调查，记最后抽取的 4 人中，女大学生的人数为X，求X的分布列与数学期望.

参考公式：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+a)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

参考数据：

α	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	3.841	6.635	7.879	10.828

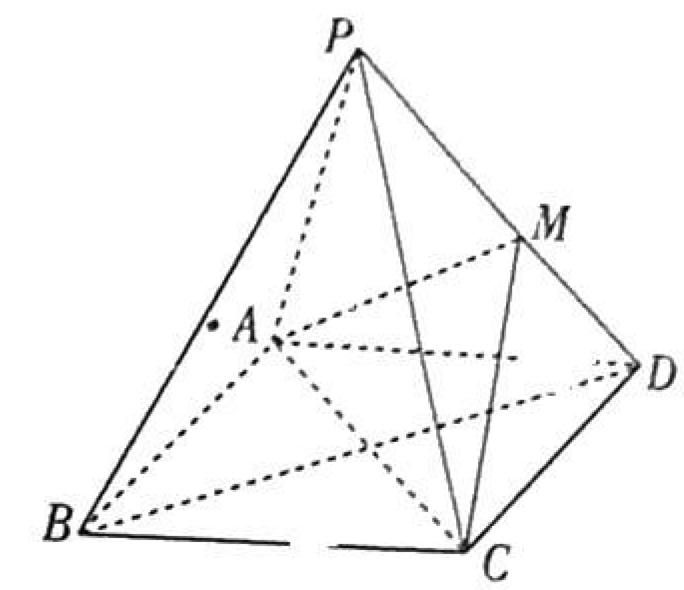
17.(15分)

如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 是正方形,$PA=PC=\sqrt{2}AD$,M 为侧棱 PD 上的点,$PD\perp$平面 MAC.

(1)证明:$PB\perp AC$.

(2)若 $PB=PD$,求二面角 $P\text{-}AC\text{-}M$ 的大小.

(3)在侧棱 PC 上是否存在一点 N,使得 $BN/\!/$平面 MAC? 若存在,求出 $PC:PN$ 的值;若不存在,请说明理由.



18.(17分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,$Q(1,1.5)$是 C 上一点,$\tan\angle F_1QF_2=\dfrac{4}{3}$.点 B_1,B_2 分别为 C 的上、下顶点,直线 $l_1:y=kx+1$ 与 C 相交于 M,N 两点,直线 MB_1 与 NB_2 相交于点 P.

(1)求 C 的标准方程;

(2)证明点 P 在定直线 l_2 上,并求直线 MB_1,NB_1,l_2 围成的三角形面积的最小值.

19.(17分)

已知函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}+a\ln x$,其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $x\in[1,+\infty)$时,$f(x)\geq 0$,求 a 的取值范围.

(2)若 $a<-2$,证明:$f(x)$有三个零点 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$,且:x_1,x_2,x_3 成等比数列.

(3)证明:$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ [illegible] $\ln(k+1)(n\in\mathbf{N}^*)$.

莆田市2024届高中毕业班第四次教学质量检测试卷

数学参考答案

1. B　由题意可得$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}|x<2\}$，则$A\cap B=\{0,1\}$.

2. D　由题可得$\begin{cases}m+\dfrac{p}{2}=4,\\2pm=4^2,\end{cases}$解得$p=4$，则抛物线$C$的准线方程是$x=-2$.

3. C　由题意可得$\overline{x_1}=3\overline{x}-1$，$s_1^2=9s^2$.

4. A　由$\{a_n\}$是等差数列，得$S_{11}=\dfrac{(a_1+a_{11})\times 11}{2}=11a_6$，反之，不成立，则"$\{a_n\}$是等差数列"是"$S_{11}=11a_6$"的充分不必要条件.

5. B　设该圆锥的高为h，底面圆的半径为r，则$\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{4\pi}{3}$，从而$r^2h=4$，即$r^2=\dfrac{4}{h}$，该圆锥的侧面积$S=\dfrac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot\sqrt{h^2+r^2}=\pi\cdot\sqrt{(h^2+r^2)r^2}=\pi\cdot\sqrt{4h+\dfrac{16}{h^2}}$. 因为$4h+\dfrac{16}{h^2}=2h+2h+\dfrac{16}{h^2}\geqslant 3\sqrt[3]{2h\times 2h\times\dfrac{16}{h^2}}=12$，当且仅当$\dfrac{16}{h^2}=2h$，即$h=2$时，等号成立，所以要使所用材料最省，则该圆锥的高是2.

6. C　由题意可得$C(3,0)$. 因为M是线段PA的垂直平分线，所以$|MA|=|MP|$，则$||MA|-|MC||=||MP|-|MC||=|CP|=4$. 因为$|AC|=6$，所以点$M$的轨迹是以$A$，$C$为焦点的双曲线.

7. D　因为函数$y=e^{ax}$与$y=\dfrac{1}{a}\ln x=\log_{e^a}x$互为反函数，所以$y=e^{ax}$与$y=\dfrac{1}{a}\ln x$的图象关于直线$y=x$对称，所以$|PQ|$的最小值为点$P$到直线$y=x$距离的最小值的两倍. 设$P(x_0,e^{ax_0})$，则$|PQ|=2\dfrac{|x_0-e^{ax_0}|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(e^{ax_0}-x_0)$. 设$f(x)=\sqrt{2}(e^{ax}-x)$，$f'(x)=\sqrt{2}ae^{ax}-\sqrt{2}$. 由$f'(x)=0$得$x=\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{a}$. 当$x\in(-\infty,\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{a})$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in(\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{a},+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以$f(x)\geqslant f(\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{a})=\dfrac{\sqrt{2}}{a}\ln(ae)$，则$|PQ|$的最小值是$\dfrac{\sqrt{2}}{a}(\ln a+1)$.

8. A　设在数列$\{a_n\}$中，$a_n=f(n)$，则$a_1=f(1)=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，从而$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，故$\{a_n+1\}$是首项和公比都是2的等比数列. 由等比数列的通项公式可得$a_n+1=2^n$，则$a_n=2^n-1$，故$f(100)=a_{100}=2^{100}-1$.

9. BCD　由$z+\overline{z}=0$，得$\dfrac{\overline{z}}{z}=-1$，则A错误. 因为$z\cdot\overline{z}=|z|^2$，所以$|z|^2=2|z|$，解得$|z|=2$或$|z|=0$(舍去)，则B正确. 设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R}$，且$ab\neq 0)$，则$z_1=\overline{z}=a-bi$，所以$\overline{z_1}=a+bi=z$，则C正确. 由$|z+z_1|=0$，得$z_1=-z$. 设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R}$，且$ab\neq 0)$，则$z_1\cdot\overline{z}=-z\cdot\overline{z}-$

(a^2+b^2)，$|z|^2=a^2+b^2$，从而 $z_1\cdot\overline{z}+|z|^2=0$，则 D 正确.

10. ACD　分别取棱 A_1B_1，A_1D_1 的中点 M，N，连接 DM，DN，MN，易证 $MN\parallel EF$，$DN\parallel CE$，则平面 $DMN\parallel$ 平面 CEF. 因为 $DP\parallel$ 平面 CEF，且 P 是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 内的动点，所以点 P 的轨迹是线段 MN. 因为 $A_1B_1=A_1D_1=4$，所以 $A_1M=A_1N=2$. 因为 $\angle MA_1N=90^\circ$，所以 $MN=2\sqrt{2}$，则 A 正确. 因为 $AP=\sqrt{17}$，所以点 P 的轨迹是以 A_1 为圆心，1 为半径的 $\frac{1}{4}$ 个圆，则点 P 的轨迹长度为 $\frac{1}{4}\times 2\pi=\frac{\pi}{2}$，则 B 错误. 以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向，建立如图 1 所示的空间直角坐标系. 由题中数据可知 $A(0,0,0)$，$C(4,4,0)$，$E(4,2,4)$，$F(2,4,4)$，$P(\cos\theta,\sin\theta,4)(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$，则 $\overrightarrow{CE}=(0,-2,4)$，$\overrightarrow{CF}=(-2,0,4)$，$\overrightarrow{AP}=(\cos\theta,\sin\theta,4)$. 设平面 CEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=-2y+4z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=-2x+4z=0,\end{cases}$ 令 $x=2$，得 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$. 设直线 AP 与平面 CEF 所成的角为 α，则

$\sin\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AP}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AP}|}=\dfrac{2\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+4}{3\sqrt{17}}$. 因为 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$，所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\leqslant 1$，所以 $6\leqslant 2\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+4\leqslant 2\sqrt{2}+4$，则 $\sin\alpha\geqslant\frac{6}{3\sqrt{17}}=\frac{2\sqrt{17}}{17}$，故 C 正确. P 是棱 A_1B_1 的中点，则 $\triangle PEF$ 外接圆的圆心为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心 O_1，半径为 2. 如图 2，设 $OO_1=x$，则三棱锥 P-CEF 的外接球的半径 R 满足 $R^2=(4-x)^2+(2\sqrt{2})^2=x^2+2^2$，解得 $R^2=\frac{41}{4}$，从而三棱锥 P-CEF 的外接球的表面积是 $4\pi R^2=41\pi$，故 D 正确.

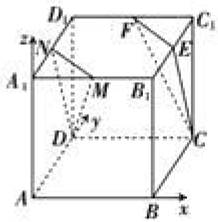


图 1

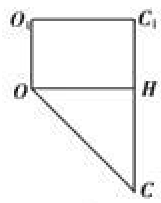


图 2

11. AB　由题意可得 $\begin{cases}-\frac{\pi\omega}{2}+\varphi=k_1\pi+\frac{\pi}{2},k_1\in\mathbf{Z},\\ \frac{3\pi\omega}{4}+\varphi=k_2\pi,k_2\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 则 $\omega=\frac{4}{5}[(k_2-k_1)-\frac{1}{2}](k_1,k_2\in\mathbf{Z})$，即 $\omega=\frac{4}{5}(k-\frac{1}{2})(k\in\mathbf{Z})$. 因为 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调，所以 $\frac{T}{2}\geqslant\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，所以 $T\geqslant\pi$，即 $\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\pi$，所以 $0<\omega\leqslant 2$，即 $0<\frac{4}{5}(k-\frac{1}{2})\leqslant 2$，解得 $\frac{1}{2}<k\leqslant 3$. 因为 $k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=1$ 或 $k=2$ 或 $k=3$. 当 $k=1$ 时，$\omega=\frac{2}{5}$，$\varphi=\frac{7\pi}{10}$，此时 $f(x)=3\cos(\frac{2}{5}x+\frac{7\pi}{10})$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递减，故 $k=1$ 符合题意；当 $k=2$ 时，$\omega=\frac{6}{5}$，$\varphi=\frac{\pi}{10}$，此时 $f(x)=3\cos(\frac{6}{5}x+\frac{\pi}{10})$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递减，故 k

$=2$ 符合题意；当 $k=3$ 时，$\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{2}$，此时 $f(x)=3\cos(2x+\frac{\pi}{2})$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$ 上不单调，故 $k=3$ 不符合题意.

12. $\frac{7}{32}$　因为 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=5$，所以 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2=25$，所以 $\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=25$. 因为 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|=4$，所以 $4^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\times2^2=25$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{7}{4}$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{7}{32}$.

13. 52　甲或乙参加 A 活动的情况有 $2(C_3^1+\frac{C_3^2C_2^2}{A_2^2})A_2^2=28$ 种，甲和乙都不参加 A 活动的情况有 $C_3^1(C_2^1+C_2^1)A_2^2=24$ 种，则他们参加活动的不同方案有 $28+24=52$ 种.

14. $x^2+y^2-2x-4y+1=0$（或 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$）；$\sqrt{101}$　设 $M(x,y)$，则 $\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=\sqrt{2}$，整理得 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$（或 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$）. 设 $P(x_1,y_1)$，则 $(x_1-2)^2+y_1^2=36$，故 $2|PA|=2\sqrt{(x_1+1)^2+y_1^2}=\sqrt{4x_1^2+8x_1+4y_1^2+4}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+20x_1-8+3[(x_1-2)^2+y_1^2]}=\sqrt{(x_1+10)^2+y_1^2}$.

令 $C(-10,0)$，则 $2|PA|+|PB|=|PC|+|PB|\geqslant|BC|=\sqrt{101}$.

15. (1)证明：因为 $b(\cos C+1)=c(2-\cos B)$，所以 $\sin B\cos C+\sin B=2\sin C-\sin C\cos B$，

所以 $\sin B\cos C+\sin C\cos B+\sin B=2\sin C$. ······ 2 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$， ······ 4 分

所以 $\sin A+\sin B=2\sin C$. ······ 5 分

由正弦定理可得 $a+b=2c$. ······ 6 分

(2)解：因为 $\cos C=\frac{9}{16}$，所以 $\sin C=\frac{5\sqrt{7}}{16}$. ······ 7 分

由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，即 $c^2=36+b^2-\frac{27}{4}b$，

则 $4c^2=144+4b^2-27b$. ······ 8 分

因为 $a=6$，所以 $6+b=2c$，所以 $36+12b+b^2=4c^2$， ······ 9 分

则 $144+4b^2-27b=36+12b+b^2$，即 $b^2-13b+36=0$，

解得 $b=4$ 或 $b=9$. ······ 11 分

①当 $b=4$ 时，$a=6$，此时△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times6\times\frac{5\sqrt{7}}{16}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$. ··· 12 分

②当 $b=9$ 时，$a=6$，此时△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times6\times9\times\frac{5\sqrt{7}}{16}=\frac{135\sqrt{7}}{16}$. ······ 13 分

16. 解：(1)零假设为 H_0：该校大学生是否喜欢跑步与性别无关.

根据列联表中的数据，计算得到 $\chi^2=\frac{100\times(40\times25-20\times15)^2}{60\times40\times55\times45}=\frac{2450}{297}\approx8.249>7.879=x_{0.005}$. ······ 4 分

根据 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为该校大学生是否喜欢跑步与性别有关，此推断犯错误的概率不大于 0.005. ······ 6 分

(2)由题意可知抽取的男大学生有 $11\times\frac{40}{40+15}=8$ 人，女大学生有 $11\times\frac{15}{40+15}=3$ 人，

则 X 的所有可能取值为 $0,1,2,3$. …………………………………………………… 8分

$P(X=0)=\frac{C_8^3}{C_{11}^3}=\frac{7}{33}$，$P(X=1)=\frac{C_8^2C_3^1}{C_{11}^3}=\frac{28}{55}$，……………………………………… 10分

$P(X=2)=\frac{C_8^1C_3^2}{C_{11}^3}=\frac{14}{55}$，$P(X=3)=\frac{C_8^0C_3^3}{C_{11}^3}=\frac{4}{165}$，…………………………………… 12分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{33}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{14}{55}$	$\frac{4}{165}$

……………………………………………………………………………………………… 13分

故 $E(X)=0\times\frac{7}{33}+1\times\frac{28}{55}+2\times\frac{14}{55}+3\times\frac{4}{165}=\frac{12}{11}$. ……………………………………… 15分

17.(1)证明：记 $AC\cap BD=O$，连接 OP.

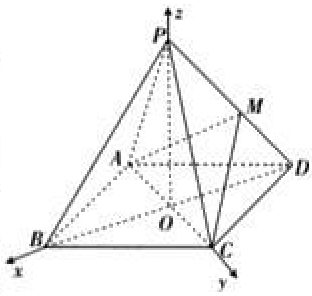
四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 O 是 AC 的中点.

因为 $PA=PC$，所以 $OP\perp AC$. ………………………………… 1分

四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $BD\perp AC$.

因为 $OP,BD\subset$ 平面 PBD，且 $OP\cap BD=O$，所以 $AC\perp$ 平面 PBD. ……………………………………………………………… 3分

因为 $PB\subset$ 平面 PBD，所以 $PB\perp AC$. ………………………… 4分



(2)解：易证 OB,OC,OP 两两垂直，则以 O 为原点，$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OP}$的方向分别为 x,y,z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $AD=1$，则 $OP=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $P(0,0,\frac{\sqrt{6}}{2})$，$B(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$，$D(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$. ………………… 5分

因为 $PD\perp$ 平面 MAC，所以$\overrightarrow{DP}=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{6}}{2})$是平面 MAC 的一个法向量. ……………… 6分

由(1)可知 $BD\perp$ 平面 PAC，所以$\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{2},0,0)$是平面 PAC 的一个法向量. ……… 7分

设二面角 $P\text{-}AC\text{-}M$ 为 θ，由图可知 θ 为锐角，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{DP},\overrightarrow{BD}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{DP}||\overrightarrow{BD}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，

故 $\theta=60°$，即二面角 $P\text{-}AC\text{-}M$ 的大小为 $60°$. ………………………………………… 9分

(3)解：假设在侧棱 PC 上存在一点 N，使得 $BN//$ 平面 MAC，且$\overrightarrow{CN}=t\overrightarrow{CP}(0\leqslant t\leqslant1)$.

设 $AD=1$，则 $P(0,0,\frac{\sqrt{6}}{2})$，$B(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$，$C(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0)$，

所以$\overrightarrow{BC}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2})$. ………………………………… 10分

因为$\overrightarrow{CN}=t\overrightarrow{CP}(0\leqslant t\leqslant1)$，所以$\overrightarrow{CN}=t\overrightarrow{CP}=(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\frac{\sqrt{6}}{2}t)$，

则$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}(1-t),\frac{\sqrt{6}}{2}t)$. …………………………………………………… 12分

由(2)可知$\overrightarrow{DP}=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{6}}{2})$是平面$MAC$的一个法向量.

因为BN∥平面MAC,所以$\overrightarrow{DP}\perp\overrightarrow{BN}$,所以$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{DP}=0$,

则$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t=0$,解得$t=\frac{1}{3}$,即$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CP}$. …………………………………………………… 14分

故$PC:PN=3:2$,即在侧棱PC上存在一点N,使得BN∥平面MAC,此时$PC:PN=3:2$. …………………………………………………………………………………………… 15分

18. 解:(1)设椭圆的焦距为$2c$,则$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$.

当$\angle F_1F_2Q=90°$时,$c=1$,$\tan\angle F_1QF_2=\frac{2c}{1.5}=\frac{4}{3}$,满足题意. ……………………………… 1分

当$\angle F_1F_2Q\neq 90°$时,$c\neq 1$,设直线QF_1的斜率为$k_1=\frac{1.5}{1+c}$,直线QF_2的斜率为$k_2=\frac{1.5}{1-c}$,

$\tan\angle F_1QF_2=\tan(\angle QF_2x-\angle QF_1F_2)=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}=\frac{4}{3}$,即$\dfrac{\frac{1.5}{1-c}-\frac{1.5}{1+c}}{1+\frac{1.5}{1-c}\cdot\frac{1.5}{1+c}}=\frac{4}{3}$,

整理得$4c^2+9c-13=0$,解得$c=1$或$c=-\frac{13}{4}$.

又$c\neq 1$,且$c>0$,所以没有c满足方程$4c^2+9c-13=0$.

综上,$c=1$. ………………………………………………………………………………………… 3分

因为点$Q(1,1.5)$在椭圆C上,所以$\frac{1}{a^2}+\frac{1.5^2}{b^2}=1$,又$a^2=b^2+c^2$,

所以$a=2$,$b=\sqrt{3}$, ………………………………………………………………………………… 4分

所以C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………………………… 5分

(2)设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,联立方程组$\begin{cases}y=kx+1,\\3x^2+4y^2-12=0,\end{cases}$整理得$(3+4k^2)x^2+8kx-8=0$, ………………………………………………………………………………………………… 6分

则$x_1+x_2=-\frac{8k}{3+4k^2}$,$x_1x_2=-\frac{8}{3+4k^2}$. …………………………………………………………… 7分

由$B_1(0,\sqrt{3})$,$B_2(0,-\sqrt{3})$,可得直线MB_1的方程为$y=\frac{y_1-\sqrt{3}}{x_1}x+\sqrt{3}$,直线$NB_2$的方程为$y=\frac{y_2+\sqrt{3}}{x_2}x-\sqrt{3}$, ……………………………………………………………………………… 8分

则$\frac{y-\sqrt{3}}{y+\sqrt{3}}=\frac{x_2(y_1-\sqrt{3})}{x_1(y_2+\sqrt{3})}=\frac{x_2(kx_1+1-\sqrt{3})}{x_1(kx_2+1+\sqrt{3})}=\frac{kx_1x_2+(1-\sqrt{3})x_2}{kx_1x_2+(1+\sqrt{3})x_1}$ ………………………… 10分

$=\frac{x_1+(2-\sqrt{3})x_2}{(2+\sqrt{3})x_1+x_2}=2-\sqrt{3}$, ……………………………………………………………… 11分

解得$y=3$,故点P在定直线$l_2:y=3$上. …………………………………………………………… 12分

设直线 l_2 与直线 MB_1, NB_1 的交点分别为 E, F,

易得 $E(\frac{(3-\sqrt{3})x_1}{y_1-\sqrt{3}}, 3)$, $F(\frac{(3-\sqrt{3})x_2}{y_2-\sqrt{3}}, 3)$, …………………………………………… 13 分

$S_{\triangle B_1EF}=\frac{1}{2}\times(3-\sqrt{3})\left|\frac{(3-\sqrt{3})x_1}{y_1-\sqrt{3}}-\frac{(3-\sqrt{3})x_2}{y_2-\sqrt{3}}\right|=(6-3\sqrt{3})\left|\frac{x_1}{kx_1+1-\sqrt{3}}-\frac{x_2}{kx_2+1-\sqrt{3}}\right|$

…………………………………………………………………………………… 14 分

$=(9\sqrt{3}-15)\left|\frac{x_1-x_2}{k^2x_1x_2+(1-\sqrt{3})k(x_1+x_2)+(1-\sqrt{3})^2}\right|=(9\sqrt{3}-15)\frac{\sqrt{96+192k^2}}{12-6\sqrt{3}}$ ………

…………………………………………………………………………………… 15 分

$\geqslant 6\sqrt{2}-2\sqrt{6}$. …………………………………………………………………… 16 分

当且仅当 $k=0$ 时,等号成立,故直线 MB_1, NB_1, l_2 围成的三角形面积的最小值为 $6\sqrt{2}-2\sqrt{6}$. …………………………………………………………………………… 17 分

19. (1)解:(解法一)由题意可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}=\frac{x^2+ax+1}{x^2}(x>0)$. ……………………………………………………………………………… 1 分

设 $g(x)=x^2+ax+1(x>0)$,其中 $g(0)=1$.

①当 $-\frac{a}{2}\leqslant 0$,即 $a\geqslant 0$ 时, $g(x)>0$,所以 $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,所以当 $x\in[1,+\infty)$ 时, $f(x)\geqslant f(1)=0$,故 $a\geqslant 0$ 满足题意; ………………………………………………… 2 分

②当 $-\frac{a}{2}>0$,且 $\Delta=a^2-4\leqslant 0$,即 $-2\leqslant a<0$ 时, $g(x)\geqslant 0$,所以 $f'(x)\geqslant 0$, $f(x)$ 单调递增,所以当 $x\in[1,+\infty)$ 时, $f(x)\geqslant f(1)=0$,故 $-2\leqslant a<0$ 满足题意; …………………… 3 分

③当 $-\frac{a}{2}>0$,且 $\Delta=a^2-4>0$,即 $a<-2$ 时,

设 $g(x)=0$ 的两根为 p, q,解得 $p=\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}(0<p<1)$, $q=\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}(q>1)$,

则当 $x\in(1,q)$ 时, $g(x)<0$,所以 $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,

则 $f(x)<f(1)=0$,故 $a<-2$ 不满足题意. ………………………………………… 4 分

综上, a 的取值范围是 $[-2,+\infty)$. ……………………………………………………… 5 分

(解法二)由题意可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}=\frac{x^2+ax+1}{x^2}(x>0)$.

…………………………………………………………………………………… 1 分

因为 $f(1)=0$, $f(x)\geqslant 0(x\geqslant 1)$,所以 $f'(1)=a+2\geqslant 0$,解得 $a\geqslant -2$. …………………… 2 分

以下证明 $a\geqslant -2$ 满足题意.

由 $x\geqslant 1$ 可知, $\ln x\geqslant 0$,所以当 $a\geqslant -2$ 时, $f(x)=x-\frac{1}{x}+a\ln x\geqslant x-\frac{1}{x}-2\ln x$. …… 3 分

设 $h(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x(x\geqslant 1)$, $h'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant 0$,所以 $h(x)$ 为递增函数,

所以 $h(x)\geqslant h(1)=0$,所以 $f(x)\geqslant h(x)\geqslant 0$. ………………………………………… 4 分

综上, a 的取值范围是 $[-2,+\infty)$. ……………………………………………………… 5 分

(2)证明:由(1)可知,当 $a<-2$ 时,$f(x)$在$(0,p)$和$(q,+\infty)$上单调递增,在(p,q)上单调递减.

因为 $f(1)=0$,所以 $f(p)>0$,$f(q)<0$. ·· 6 分

取 $x_p=(a+\sqrt{a^2+1})^2<1$,$f(x_p)=x_p-\dfrac{1}{x_p}+a\ln x_p<1-\dfrac{1}{x_p}-\dfrac{2a}{\sqrt{x_p}}=\dfrac{x_p-2a\sqrt{x_p}-1}{x_p}=0$.

(其中 $\ln x\leqslant x-1<x$,所以 $\ln\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,即 $\ln x>\dfrac{-2}{\sqrt{x}}$)

取 $x_q=(\sqrt{a^2+1}-a)^2>1$,$f(x_q)=x_q-\dfrac{1}{x_q}+a\ln x_q>x_q-1+2a\sqrt{x_q}=0$.

(其中 $\ln x\leqslant x-1<x$,所以 $\ln\sqrt{x}<\sqrt{x}$,即 $\ln x<2\sqrt{x}$)

所以 $f(x)$在(x_p,p)上存在唯一零点 x_1,即在$(0,p)$上存在唯一零点 x_1,在(q,x_q)上存在唯一零点 x_3,即在$(q,+\infty)$上存在唯一零点 x_3,且 $x_2=1$. ························ 8 分

所以 $f(x_1)=x_1-\dfrac{1}{x_1}+a\ln x_1=0$,$f(x_3)=x_3-\dfrac{1}{x_3}+a\ln x_3=0$, ································ 9 分

又 $f(\dfrac{1}{x_1})=\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{\frac{1}{x_1}}+a\ln\dfrac{1}{x_1}=-(x_1-\dfrac{1}{x_1}+a\ln x_1)=0$,所以$\dfrac{1}{x_1}$也是函数的零点,······ 10 分

显然$\dfrac{1}{x_1}\neq x_1$ 且$\dfrac{1}{x_1}\neq 1$,所以$\dfrac{1}{x_1}=x_3$,即 $x_1x_3=1$,所以 $x_1x_3=x_2^2$,所以 x_1,x_2,x_3 成等比数列.

·· 11 分

(3)证明:由(1)可知当 $a=-2$ 时,$f(x)$为单调递增函数,

所以当 $x\in(1,+\infty)$时,$f(x)>f(1)=0$,即 $x-\dfrac{1}{x}-2\ln x>0$,

整理得 $x-\dfrac{1}{x}>\ln x^2$,即$\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}>\ln x(x>1)$, ································ 12 分

所以$\sqrt{1+\dfrac{1}{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}}>\ln(1+\dfrac{1}{k})(k\in\mathbf{N}^*)$, ································ 14 分

则$\dfrac{1}{\sqrt{k(k+1)}}>\ln\dfrac{k+1}{k}(k\in\mathbf{N}^*)$, ·· 15 分

故$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k(k+1)}}>\ln 2+\ln\dfrac{3}{2}+\cdots+\ln\dfrac{k+1}{k}=\ln(k+1)(n\in\mathbf{N}^*)$. ························ 17 分