姓名__________ 考生号 __________________

(在此卷上答题无效)

机密★启用前

2020年1月福建省普通高中学业水平合格性考试

数学试题

(考试时间:90分钟;满分:100分)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分. 第Ⅰ卷1至3页,第Ⅱ卷4至6页.

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的考生号、姓名填写在试题卷、答题卡上. 考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的"考生号、姓名"与考生本人考生号、姓名是否一致.
2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其他答案标号. 第Ⅱ卷用黑色字迹签字笔在答题卡上作答. 在试题卷上作答,答案无效.
3. 考试结束,监考员将试题卷和答题卡一并收回.

参考公式:

样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的标准差

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}$$

其中 $\bar{x}$ 为样本平均数

柱体体积公式 $V=Sh$,其中 S 为底面面积,h 为高

台体体积公式 $V=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h$,

其中 S',S 分别为上、下底面面积,h 为高

锥体体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$,

其中 S 为底面面积,h 为高

球的表面积公式 $S=4\pi R^2$,

球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$,

其中 R 为球的半径

第Ⅰ卷 (选择题 45分)

一、选择题(本大题有15小题,每小题3分,共45分. 每小题只有一个选项符合题意)

1. 已知集合 $A=\{-1,1\}$,$B=\{1,2\}$,则 $A\cap B=$

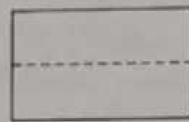
A. $\{1\}$　　B. $\{2\}$　　C. $\{-1,1\}$　　D. $\{-1,1,2\}$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,-1)$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$

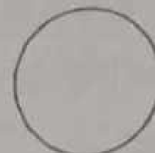
A. $(-3,-1)$　　B. $(-1,3)$　　C. $(1,3)$　　D. $(3,1)$

3. 如右图放置的圆柱，它的俯视图是

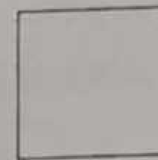
A



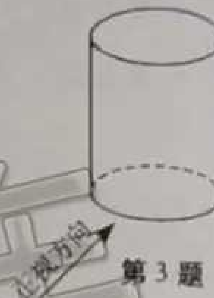
B



C



D



第 3 题

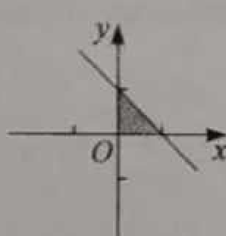
4. 等比数列 2，4，8，…的公比为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. 4

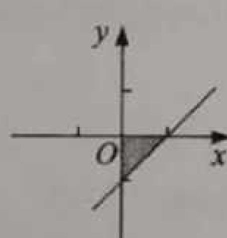
5. 某射击运动员在一次射击测试中射靶 5 次，每次命中的环数分别为 9，9，10，9，8，则他这次射击测试的平均环数为

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

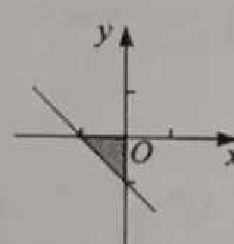
6. 不等式组 $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ x + y - 1 \leqslant 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为



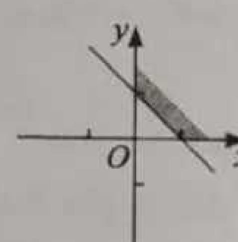
A



B



C



D

7. 随机抛掷一枚质地均匀的骰子，则其向上一面的点数为偶数的概率为

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

8. 已知直线 l_1：$y = x + 1$，l_2：$y = kx - 1$，若 $l_1 \perp l_2$，则实数 $k =$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

9. 不等式 $x^2 - x - 2 > 0$ 的解集是

A. $\{x \mid -1 < x < 2\}$

B. $\{x \mid x < -2，或 x > 1\}$

C. $\{x \mid -2 < x < 1\}$

D. $\{x \mid x < -1，或 x > 2\}$

10. 已知 α 是第二象限的角，且 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，则 $\sin2\alpha=$

A. $-\frac{24}{25}$　　B. $-\frac{12}{25}$　　C. $\frac{12}{25}$　　D. $\frac{24}{25}$

11. 已知 $a=\log_6 7$，$b=\log_7 6$，$c=\log_7 0.6$，则 a，b，c 的大小关系是

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$

C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

12. 函数 $y=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ 的最大值是

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

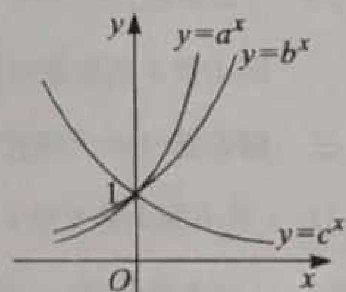
13. 已知函数 $y=a^x$，$y=b^x$，$y=c^x$ 的图象如图所示，则实数 a，b，c 的大小关系是

A. $a<b<c$

B. $b<a<c$

C. $b<c<a$

D. $c<b<a$



第 13 题

14. 函数 $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$ 的定义域为

A. $[1, 2]$　　B. $(1, 2]$

C. $(-\infty, 2]$　　D. $(1, +\infty)$

15. 用一段长为 36 米的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园. 已知墙长 20 米，则菜园的面积的最大值是

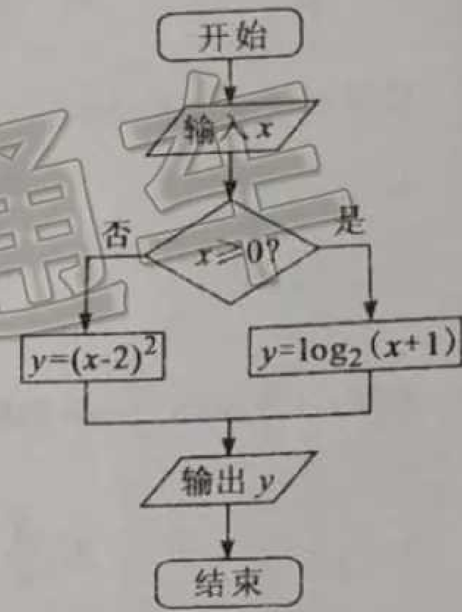
A. 144　　B. 160　　C. 162　　D. 180

第Ⅱ卷　（非选择题　55 分）

（请考生在答题卡上作答）

二、填空题（本大题有 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

16. 阅读右边的程序框图，运行相应的程序，若输入的 x 的值为 3，则输出的 y 的值是________.



第 16 题

17. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.

18. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$A=45°$，$C=30°$，则 $BC=$________.

19. 已知 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 1,\\ f(x-1), & x>1,\end{cases}$ 则 $f(2)=$________.

20. 已知函数 $f(x)=4x^2-kx-8$. 若对任意 x_1，$x_2\in[5,20]$，且 $x_1\neq x_2$，均有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则实数 k 的取值范围为________.

三、解答题（本大题有 5 小题，共 40 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

21. （本小题满分 6 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_2=5$，$a_5=11$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $S_n=120$，求 n.

22. （本小题满分 8 分）

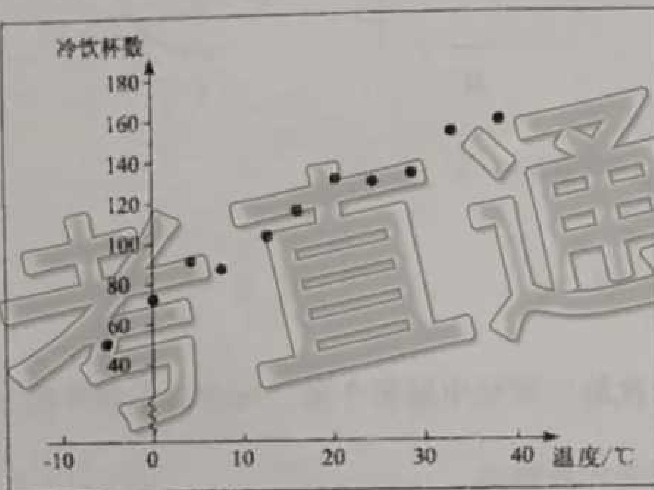
已知圆 O：$x^2+y^2=8$，点 $P_0(-1,2)$，直线 l 过点 P_0 且倾斜角为 α.

（1）判断点 P_0 与圆 O 的位置关系，并说明理由；

（2）若 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$，求直线 l 被圆 O 所截得的弦 AB 的长.

23. (本小题满分 8 分)

某同学家开了一个小卖部，为了研究气温对冷饮销售的影响，他经过统计，得到一组当天气温 x_i 与卖出冷饮杯数 y_i 的对应数据(x_i, y_i)，$i=1, 2, \cdots, 11$，画出如下散点图.



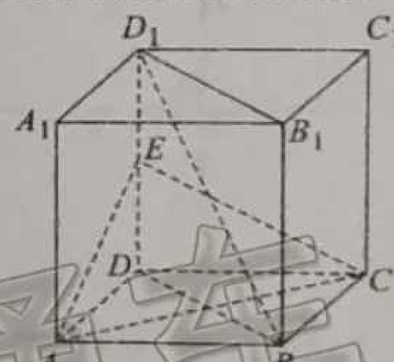
已知 $\bar{x}=\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11}x_i=15.4$，$\bar{y}=\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11}y_i=111.69$.

(1) 三位同学经计算分别得到如下回归方程：$\hat{y}=2.35x+75.5$，$\hat{y}=-2.35x+147.88$，$\hat{y}=8.5x+5.5$，已知其中只有一个是正确的. 请问：哪个回归方程是正确的？说明理由.

(2) 如果某天的气温是 20 ℃，试利用样本估计总体的思想预测该天大约能卖出的冷饮杯数.

24. (本小题满分 8 分)

如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 互相平分，E 为 DD_1 的中点.



第 24 题

(1) 求证：BD_1 // 平面 AEC；

(2) 若________，则平面 $AEC \perp$ 平面 BB_1D_1D.

试在三个条件“①四边形 $ABCD$ 是平行四边形；②四边形 $ABCD$ 是矩形；③四边形 $ABCD$ 是菱形”中选取一个，补充在上面问题的横线上，使得结论成立，并证明之.

25. (本小题满分 10 分)

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是偶函数又是周期函数，4 是它的一个周期，且 $y=f(x)$ 的图象关于点$(1, 0)$对称.

(1) 试给出满足上述条件的一个函数，并加以证明；

(2) 若 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$f(x)=1-x^2$，写出 $f(x)$ 的解析式和单调递增区间.

2020年1月福建省普通高中学业水平合格性考试
数学试题

参考答案

一、选择题（本大题主要考查基础知识和基本运算. 每小题3分，共45分）

1. A	2. D	3. C	4. C	5. C
6. A	7. D	8. A	9. D	10. A
11. B	12. C	13. D	14. B	15. C

二、填空题（本大题主要考查基础知识和基本运算. 每小题3分，共15分）

16. 2　　17. 10　　18. $2\sqrt{2}$　　19. 2　　20. $(-\infty,40]\cup[160,+\infty)$

三、解答题（本大题有5小题，共40分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

21. 本小题主要考查等差数列的通项公式、前 n 项和公式等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，体现数学运算等数学核心素养. 满分6分.

解：(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，

因为 $a_2=5, a_5=11$，所以 $a_1+d=5, a_1+4d=11$，

解得 $a_1=3, d=2$.

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=3+2(n-1)=2n+1, n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n+1, n\in\mathbf{N}^*$.

(2) 由(1)知 $a_1=3, a_n=2n+1$，

因为 $S_n=120$，所以 $\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=120$，即 $\dfrac{(3+2n+1)n}{2}=120$，

化简得 $n^2+2n-120=0$，解得 $n=10$.

22. 本小题考查圆的方程、点与圆的位置关系、直线与圆的位置关系、点到直线的距离公式、特殊角的三角函数值等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想、函数与方程思想，体现数学运算、直观想象等数学核心素养. 满分8分.

解：(1) 由已知得圆 O 的圆心为 $O(0,0)$，半径 $r=2\sqrt{2}$，

因为 $P_0(-1,2)$，所以 $|OP_0|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$.

因为 $|OP_0|<r$，所以点 P_0 在圆 O 内.

(2) 因为 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$，所以直线 l 的斜率为 -1.

因为直线 l 过点 $P_0(-1,2)$，所以直线 l 的方程为 $y-2=-(x+1)$，即 $x+y-1=0$，

则圆心 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $|AB|=2\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{30}$.

23. 本小题主要考查散点图、回归方程等基础知识，考查应用意识、推理论证能力、数据分析能力、运算求解能力，考查统计与概率思想，体现数学建模、逻辑推理、数据分析等数学核心素养. 满分 8 分.

解：(1) 回归方程 $\hat{y}=2.35x+75.5$ 是正确的. 理由如下：

由散点图可知，冷饮销售杯数与气温之间成正相关，

所以回归方程 $\hat{y}=-2.35x+147.88$ 不正确；

因为 $\hat{y}=8.5x+5.5$ 没有经过样本中心点 $(15.4,111.69)$，

所以回归方程 $\hat{y}=8.5x+5.5$ 不正确；

因为三个回归方程中只有一个是正确的，

所以回归方程 $\hat{y}=2.35x+75.5$ 是正确的.

(2) 当 $x=20$ 时，$\hat{y}=2.35\times20+75.5=122.5$，

因此，气温为20 ℃时，大约能卖出冷饮 123 杯.

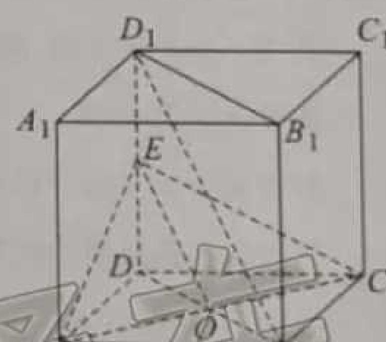
24. 本小题主要考查空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力，考查化归与转化思想，体现直观想象、逻辑推理等数学核心素养. 满分 8 分.

解：(1) 如图，设 $AC\cap BD=O$，因为 AC,BD 互相平分，

所以 O 为 BD 的中点.

连接 OE，因为 E 为 DD_1 的中点，所以 $BD_1 /\!/ OE$.

又因为 $BD_1\not\subset$ 平面 AEC，$OE\subset$ 平面 AEC，所以 $BD_1 /\!/$ 平面 AEC.



第 24 题

(2) 选择的条件是：③

证明如下：

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AC\perp BD$.

因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱，

所以 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AC\perp DD_1$.

因为 $BD\cap DD_1=D$，所以 $AC\perp$ 平面 BB_1D_1D.

因为 $AC\subset$ 平面 AEC，所以平面 $AEC\perp$ 平面 BB_1D_1D.

25. 本小题主要考查函数的单调性、奇偶性、周期性、对称性等基础知识，考查抽象概括能力、推理论证能力、运算求解能力，考查数形结合思想、函数与方程思想、特殊与一般思想，体现数学抽象、逻辑推理、数学运算等数学核心素养. 满分 10 分.

解：(1) $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{2}x$.

证明如下：

①因为函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f(-x)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}x\right)=\cos\frac{\pi}{2}x=f(x)$，

所以$f(x)$是偶函数.

②因为$f(x+4)=\cos\left[\frac{\pi}{2}(x+4)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}x+2\pi\right)=\cos\frac{\pi}{2}x=f(x)$，

所以4是函数$f(x)$的一个周期.

③设$P_0(x_0,y_0)$在函数$y=f(x)$的图象上，则$y_0=\cos\frac{\pi}{2}x_0$，

设$P_0(x_0,y_0)$关于点$(1,0)$的对称点为$P'_0(x'_0,y'_0)$，

则$\begin{cases}\frac{x_0+x'_0}{2}=1,\\ \frac{y_0+y'_0}{2}=0\end{cases}$ 得到$\begin{cases}x'_0=2-x_0,\\ y'_0=-y_0.\end{cases}$

又因为$\cos\frac{\pi}{2}x'_0=\cos\frac{\pi}{2}(2-x_0)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{2}x_0\right)=-\cos\frac{\pi}{2}x_0=-y_0=y'_0$，

所以点P'_0也在函数$y=f(x)$的图象上，

所以$y=f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称.

综上：$f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$是满足题设的一个函数.

(2)因为$-1\leqslant x\leqslant 1$，$f(x)=1-x^2$，且函数$y=f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称，

所以$1\leqslant x\leqslant 3$，$f(x)=(x-1)(x-3)=(x-2)^2-1$，

因为$f(x)$的一个周期为4，

所以$f(x)$的解析式为$f(x)=\begin{cases}1-(x-4k)^2, & -1+4k\leqslant x<1+4k,\\ (x-2-4k)^2-1, & 1+4k\leqslant x\leqslant 3+4k,\end{cases}k\in\mathbf{Z}$.

$f(x)$的单调递增区间为$[-2+4k,4k](k\in\mathbf{Z})$.

说明：本题第一问是开放性试题，答案不唯一，如函数$f(x)=0$；$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)$；

$f(x)=\begin{cases}-(x+1-4k)^3, & -2+4k\leqslant x<4k,\\ (x-1-4k)^3, & 4k\leqslant x\leqslant 2+4k,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$；$f(x)=|x-4k|-1$，$-2+4k\leqslant x\leqslant 2+4k$，

$k\in\mathbf{Z}$等都满足题设条件.