2021 年 3 月福州市高中毕业班质量检测

数 学 试 题

（完卷时间：120 分钟；满分：150 分）

注意事项：

1.答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名.考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的"准考证号、姓名"与考生本人准考证号、姓名是否一致.

2.第Ⅰ卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号.第Ⅱ卷用毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答.在试题卷上作答，答案无效.

3.考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x\mid x=2k+1,k\in A\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1,3\}$　　B. $\{2,4\}$　　C. $\{3,5\}$　　D. $\{1,3,5\}$

2. 设复数 $z=a+bi(a\in \mathbf{Z},b\in \mathbf{Z})$，则满足 $|z-1|\leqslant 1$ 的复数 z 有

A. 7 个　　B. 5 个　　C. 4 个　　D. 3 个

3. "$m\leqslant 5$"是"$m^2-4m-5\leqslant 0$"的

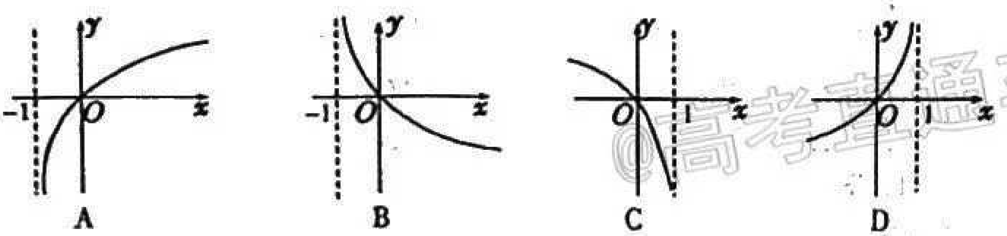
A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 若抛物线 $y=mx^2$ 上一点 $(t,2)$ 到其焦点的距离等于 3，则

A. $m=\dfrac{1}{4}$　　B. $m=\dfrac{1}{2}$　　C. $m=2$　　D. $m=4$

5. 已知函数 $f(x)=\ln x$，则函数 $y=f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ 的图象大致为



A　　B　　C　　D

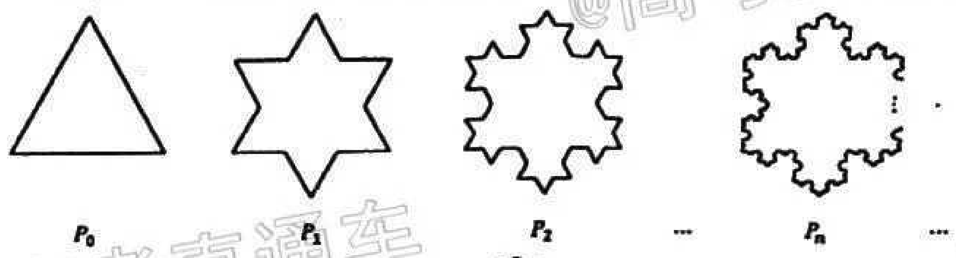
6. 在 $\triangle ABC$ 中，E 为 AB 边的中点，D 为 AC 边上的点，BD，CE 交于点 F. 若 $\overrightarrow{AF}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{AC}$，

则 $\dfrac{AC}{AD}$ 的值为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

@高考直通车

7. 分形几何学是一门以不规则几何形态为研究对象的几何学.如图,有一列曲线 $P_0,P_1,\cdots,P_n,\cdots$.已知 P_0 是边长为 1 的等边三角形,P_{k+1} 是对 P_k 进行如下操作而得到:将 P_k 的每条边三等分,以每边中间部分的线段为边,向外作等边三角形,再将中间部分的线段去掉($k=0,1,2,\cdots$).记 P_n 的周长为 L_n、所围成的面积为 S_n.对于 $\forall n\in\mathbf{N}$,下列结论正确的是



A. $\left\{\dfrac{S_n}{L_n}\right\}$为等差数列　　　B. $\left\{\dfrac{S_n}{L_n}\right\}$为等比数列

C. $\exists M>0$,使 $L_n<M$　　　D. $\exists M>0$,使 $S_n<M$

8. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象过点 $(0,1)$,在区间 $\left(\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上为单调函数,把 $f(x)$ 的图象向右平移 π 个单位长度后与原来的图象重合.设 $x_1,x_2\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 且 $x_1\neq x_2$,若 $f(x_1)=f(x_2)$,则 $f(x_1+x_2)$ 的值为

A. $-\sqrt{3}$　　B. -1　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 3 分,有选错的得 0 分.

9. “一粥一饭,当思来之不易”,道理虽简单,但每年我国还是有 2 000 多亿元的餐桌浪费,被倒掉的食物相当于 2 亿多人一年的口粮.为营造“节约光荣,浪费可耻”的氛围,某市发起了“光盘行动”.某机构为调研民众对“光盘行动”的认可情况,在某大型餐厅中随机调查了 90 位来店就餐的客人,制成如右所示的列联表,通过计算得到 K^2 的观测值为 9.已知 $P(K^2\geqslant 6.635)=0.010$,$P(K^2\geqslant 10.828)=0.001$,则下列判断正确的是

	认可	不认可
40 岁以下	20	20
40 岁以上(含 40 岁)	40	10

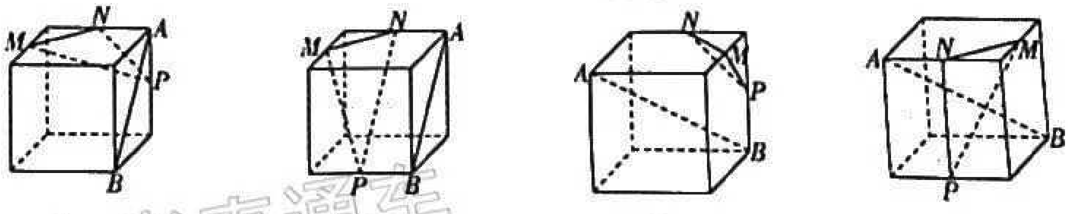
A. 在该餐厅用餐的客人中大约有 66.7% 的客人认可“光盘行动”

B. 在该餐厅用餐的客人中大约有 99% 的客人认可“光盘行动”

C. 有 99% 的把握认为“光盘行动”的认可情况与年龄有关

D. 在犯错误的概率不超过 0.001 的前提下,认为“光盘行动”的认可情况与年龄有关

10. 如图,在下列四个正方体中,A,B 为正方体的两个顶点,M,N,P 为所在棱的中点,则在这四个正方体中,直线 AB∥平面 MNP 的是



A　　B　　C　　D

11. 已知 P 是双曲线 $E:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 在第一象限上一点，F_1,F_2 分别是 E 的左、右焦点，$\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{15}{2}$.则以下结论正确的是

A. 点 P 的横坐标为 $\frac{5}{2}$

B. $\frac{\pi}{3}<\angle F_1PF_2<\frac{\pi}{2}$

C. $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 1

D. $\angle F_1PF_2$ 平分线所在的直线方程为 $3x-2y-4=0$

12. 在数学中，双曲函数是一类与三角函数类似的函数.最基本的双曲函数是双曲正弦函数 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 和双曲余弦函数 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 等.双曲函数在物理及生活中有着某些重要的应用，譬如达·芬奇苦苦思索的悬链线（例如固定项链的两端，使其在重力的作用下自然下垂，那么项链所形成的曲线即为悬链线）问题，可以用双曲余弦型函数来刻画.则下列结论正确的是

A. $\cosh^2x+\sinh^2x=1$

B. $y=\cosh x$ 为偶函数，且存在最小值

C. $\forall x_0>0,\sinh(\sinh x_0)>\sinh x_0$

D. $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1\neq x_2$，$\frac{\sinh x_1-\sinh x_2}{x_1-x_2}>1$

第Ⅱ卷

注意事项：

用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答.在试题卷上作答，答案无效.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.把答案填在题中的横线上.

13. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-4\leq 0,\\2x+y-6\geq 0,\\y\geq 0,\end{cases}$ 则 $x-2y$ 的取值范围为________.

14. $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中，$\frac{1}{x}$ 的系数为________.

15. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，侧面 PAC 与底面 ABC 垂直，$\angle BAC=90°$，$\angle PCA=30°$，$AB=3$，$PA=2$.则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为________.

16. 已知圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$，过点 $M(2,0)$ 的直线与圆 C 交于 P,Q 两点（点 Q 在第四象限）.若 $\angle QMO=2\angle QPO$，则点 P 的纵坐标为________.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

在①$S_n=2a_n+1$；②$a_1=-1$，$\log_2(a_na_{n+1})=2n-1$；③$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$，$S_2=-3$，$a_3=-4$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题的横线上，并解答.

问题：已知单调数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足________.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{-na_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（本小题满分 12 分）

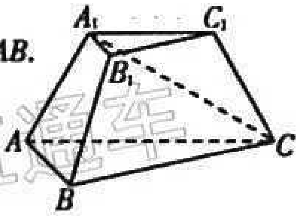
在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$a+b=c\cos B-b\cos C$.

(1) 求角 C 的大小；

(2) 设 CD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，求证：$\frac{1}{CA}+\frac{1}{CB}=\frac{1}{CD}$.

19.(本小题满分 12 分)

如图,在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AA_1=A_1C_1=CC_1=1$,$AC=2$,$A_1C\perp AB$.



(1)求证:平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABB_1A_1;

(2)若 $\angle BAC=90°$,$AB=1$,求二面角 $A-BB_1-C$ 的正弦值.

20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 $A_1(-\sqrt{2},0)$,$A_2(\sqrt{2},0)$,上、下顶点分别为 B_1,B_2,四边形 $A_1B_2A_2B_1$ 的周长为 $4\sqrt{3}$.

(1)求 E 的方程;

(2)设 P 为 E 上异于 A_1,A_2 的动点,直线 A_1P 与 y 轴交于点 C,过 A_1 作 $A_1D/\!/PA_2$,与 y 轴交于点 D.试探究在 x 轴上是否存在一定点 Q,使得 $\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{QD}=3$,若存在,求出点 Q 坐标;若不存在,说明理由.

21.(本小题满分 12 分)

从 2021 年 1 月 1 日起某商业银行推出四种存款产品,包括协定存款、七天通知存款、结构性存款及大额存单.协定存款年利率为 1.68%,有效期一年,服务期间客户账户余额须不少于 50 万元,多出的资金可随时支取;七天通知存款年利率为 1.8%,存期须超过 7 天,支取需要提前七天建立通知;结构性存款存期一年,年利率为 3.6%;大额存单,年利率为 3.84%,起点金额 1 000万元.(注:月利率为年利率的十二分之一)

已知某公司现有 2020 年底结余资金 1 050 万元.

(1)若该公司有 5 个股东,他们将通过投票的方式确定投资一种存款产品,每个股东只能选择一种产品且不能弃权,求恰有 3 个股东选择同一种产品的概率;

(2)公司决定将 550 万元作协定存款,于 2021 年 1 月 1 日存入该银行账户,规定从 2 月份起,每月首日支取 50 万元作为公司的日常开销.将余下 500 万元中的 x 万元作七天通知存款,准备投资高新项目,剩余 $(500-x)$ 万元作结构性存款.

①求 2021 年全年该公司从协定存款中所得的利息;

②假设该公司于 2021 年 7 月 1 日将七天通知存款全部取出,本金 x 万元用于投资高新项目,据专业机构评估,该笔投资到 2021 年底将有 60%的概率获得 $\left(\frac{x^3}{30\ 000}+0.02x^2+0.135x\right)$ 万元的收益,有 20%的概率亏损 $0.27x$ 万元,有 20%的概率保本.问:x 为何值时,该公司 2021 年存款利息和投资高新项目所得的总收益的期望最大,并求最大值.

22.(本小题满分 12 分)

已知 $f(x)=x^2e^x-1$.

(1)判断 $f(x)$ 的零点个数,并说明理由;

(2)若 $f(x)\geqslant a(2\ln x+x)$,求实数 a 的取值范围.

2021年3月福州市高中毕业班质量检测

数学参考答案及评分细则

@高考直通车

评分说明:

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4．只给整数分数。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．

1．C　　2．B　　3．B　　4．A

5．D　　6．C　　7．D　　8．C

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

9．AC　　10．ABD　　11．BCD　　12．BCD

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．$[-2,4]$　　14．5　　15．25π　　16．$\frac{1}{2}$

四、解答题：本大题共6小题，共70分．

17．（本小题满分10分）

【命题意图】本小题主要考查等比数列、a_n与S_n的关系、数列求和等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力；考查化归与转化思想、函数与方程思想；考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．满分10分．

【解答】（1）选①，即$S_n=2a_n+1$．（i）则

当$n=1$时，$S_1=2a_1+1$，故$a_1=-1$；………………1分

当$n\geqslant 2$时，$S_{n-1}=2a_{n-1}+1$，（ii）

（i）（ii）两式相减得$a_n=2a_{n-1}$，………………3分

所以$\{a_n\}$为等比数列，其中公比为2，首项为-1．………………4分

所以$a_n=-2^{n-1}$．………………5分

选②，即$a_1=-1, \log_2(a_na_{n+1})=2n-1$．

所以当$n\geqslant 2$时，$\log_2(a_na_{n+1})-\log_2(a_{n-1}a_n)=2$，………………1分

即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=4$， ………………………………………………………… 2 分

所以 $\{a_{2k-1}\}$（$k\in\mathbf{N}^*$）为等比数列，其中首项为 $a_1=-1$，公比为 4，

所以 $a_{2k-1}=-1\times4^{k-1}=-2^{(2k-1)-1}$． ………………………………………… 3 分

由 $a_1=-1,\log_2(a_1a_2)=1$，得 $a_2=-2$，

同理可得，$a_{2k}=-2\times4^{k-1}=-2^{2k-1}$（$k\in\mathbf{N}^*$）． ………………………… 4 分

综上，$a_n=-2^{n-1}$． ………………………………………………………………… 5 分

选③，即 $a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$，$S_2=-3$，$a_3=-4$．

所以 $\{a_n\}$ 为等比数列，设其公比为 q， ………………………………………… 1 分

则 $\begin{cases}a_1(1+q)=-3,\\ a_1q^2=-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=-1,\\ q=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=-9,\\ q=-\dfrac{2}{3}.\end{cases}$ ……………………………… 3 分

又因为 $\{a_n\}$ 为单调数列，所以 $q>0$，故 $\begin{cases}a_1=-1,\\ q=2,\end{cases}$ ……………………………… 4 分

所以 $a_n=-2^{n-1}$． ………………………………………………………………… 5 分

（2）由（1）知，$-na_n=n\cdot2^{n-1}$，

所以 $T_n=1+2\times2+3\times2^2+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-2}+n\cdot2^{n-1}$， ……………………… 6 分

$2T_n=\quad 2+2\times2^2+\cdots+(n-2)\cdot2^{n-2}+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n$， ……………………… 7 分

两式相减得 $-T_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}+2^{n-1}-n\cdot2^n$ ……………………………… 8 分

$=(2^n-1)-n\cdot2^n$． ………………………………………………………… 9 分

所以 $T_n=(n-1)\cdot2^n+1$． …………………………………………………………… 10 分

18. （本小题满分 12 分）

【命题意图】本小题主要考查解三角形等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力；考查函数与方程思想、数形结合思想；考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．满分 12 分．

【解答】解法一：（1）因为 $a+b=c\cos B-b\cos C$，

由正弦定理得 $\sin A+\sin B=\sin C\cos B-\sin B\cos C$， ……………………………… 2 分

因为 $\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$，

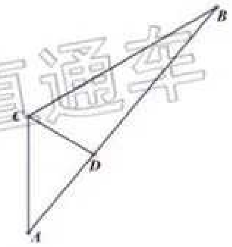
所以 $\sin(B+C)+\sin B=\sin C\cos B-\sin B\cos C$， ……………………………… 3 分

所以 $2\sin B\cos C+\sin B=0$， ………………………………………………………… 4 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq0$，所以 $\cos C=-\dfrac{1}{2}$， ……………………………… 5 分

又$C\in(0,\pi)$，所以$C=\dfrac{2\pi}{3}$. …………………………………………………………… 6 分

（2）因为CD是$\triangle ABC$的角平分线，且$C=\dfrac{2\pi}{3}$，



所以$\angle ACD=\angle BCD=\dfrac{\pi}{3}$. …………………………………… 7 分

在$\triangle ABC$中，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}$，则由面积公式得

$\dfrac{1}{2}CA\cdot CB\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}CA\cdot CD\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2}CD\cdot CB\sin\dfrac{\pi}{3}$， ………………………… 10 分

即$CA\cdot CB=CA\cdot CD+CD\cdot CB$. ………………………………………………………… 11 分

两边同时除以$CA\cdot CB\cdot CD$得$\dfrac{1}{CA}+\dfrac{1}{CB}=\dfrac{1}{CD}$. ……………………………………… 12 分

@高考直通车

解法二：（1）因为$a+b=c\cos B-b\cos C$，

由余弦定理得$a+b=c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$， ………………………………… 2 分

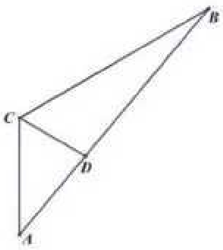
整理得$2a(a+b)=2c^2-2b^2$，即$a^2+b^2-c^2+ab=0$， ……………………………… 3 分

所以$ab(1+2\cos C)=0$， ………………………………………………………………… 4 分

所以$\cos C=-\dfrac{1}{2}$， ………………………………………………………………………… 5 分

又$C\in(0,\pi)$，所以$C=\dfrac{2\pi}{3}$. …………………………………………………………… 6 分

（2）因为CD是$\triangle ABC$的角平分线，且$C=\dfrac{2\pi}{3}$，



所以$\angle ACD=\angle BCD=\dfrac{\pi}{3}$. …………………………………… 7 分

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得

$\dfrac{CA}{\sin B}=\dfrac{CB}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin\dfrac{2\pi}{3}}$， ………………………………………… 8 分

即$\dfrac{CA}{\sin B}=\dfrac{CB}{\sin A}=\dfrac{AD}{\sin\dfrac{\pi}{3}}+\dfrac{DB}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$. …………………………………………………… 9 分

同理在$\triangle CAD$和$\triangle CBD$中，得

$$\frac{CD}{\sin A}=\frac{AD}{\sin\frac{\pi}{3}},\quad \frac{CD}{\sin B}=\frac{DB}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

所以$\dfrac{CA}{\sin B}=\dfrac{CD}{\sin A}+\dfrac{CD}{\sin B}$，即$\dfrac{CA-CD}{\sin B}=\dfrac{CD}{\sin A}$， ………………………… 10 分

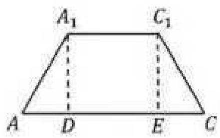
故 $\dfrac{CA-CD}{CA}=\dfrac{CD}{CB}$，即 $1=\dfrac{CD}{CB}+\dfrac{CD}{CA}$， ……………………………………………11 分

故 $\dfrac{1}{CA}+\dfrac{1}{CB}=\dfrac{1}{CD}$． ……………………………………………………………12 分

19. （本小题满分 12 分）

【命题意图】本小题主要考查空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力与空间想象能力；考查数形结合思想；考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．满分 12 分．

【解答】（1）依题意，四边形 ACC_1A_1 为等腰梯形，过 A_1，C_1 分别引 AC 的垂线，垂足分别为 D，E，则



$AD=\dfrac{1}{2}(AC-A_1C_1)=\dfrac{1}{2}\times(2-1)=\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}AA_1$，故 $\angle A_1AC=60^\circ$．

在 $\triangle ACA_1$ 中，$A_1C^2=A_1A^2+AC^2-2A_1A\cdot AC\cos\angle A_1AC=1^2+2^2-2\times1\times2\times\dfrac{1}{2}=3$，

所以 $A_1C^2+A_1A^2=AC^2$，故 $\angle AA_1C=90^\circ$，即 $A_1C\perp AA_1$． ……………………… 2 分

因为 $A_1C\perp AB$，$AB\cap AA_1=A$，且 AB，$AA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $A_1C\perp$ 平面 ABB_1A_1， ……………………………………………………………… 4 分

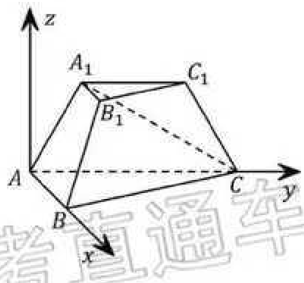
因为 $A_1C\subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABB_1A_1． ………………………………………………… 5 分

（2）因为 $AB\perp AC$，$A_1C\perp AB$，$AC\cap A_1C=C$，且 AC，$A_1C\subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $AB\perp$ 平面 ACC_1A_1，结合（1）可知 AB，AC，A_1D 三条直线两两垂直． …… 6 分

以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DA_1}$ 的方向为 x，y，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，如图所示，则各点坐标为



$A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,2,0)$，$A_1\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$C_1\left(0,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$． ………………………………………………… 7 分

由（1）知，$\boldsymbol{n}_1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{A_1C}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(0,\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(0,\sqrt{3},-1\right)$ 为平面 ABB_1A_1 的法向量．

…………………………………………………………………………………………… 8 分

$\overrightarrow{BC}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{C_1C}=\left(0,\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

设 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$ 为平面 BCC_1B_1 的法向量，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2 \perp \overrightarrow{BC}, \\ \boldsymbol{n}_2 \perp \overrightarrow{C_1C},\end{cases}$ 故 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2 \cdot \overrightarrow{BC} = -x + 2y = 0, \\ \boldsymbol{n}_2 \cdot \overrightarrow{C_1C} = \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}_2 = \left(2\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1\right)$， ……………… 10 分

所以 $\cos\langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \rangle = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \frac{3-1}{2\times 4} = \frac{1}{4}$， ……………… 11 分

设二面角 $A - BB_1 - C$ 的大小为 θ，则 $\sin\theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$． ……………… 12 分

20. （本小题满分 12 分）

【命题意图】本小题主要考查直线与椭圆的位置关系等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力；考查函数与方程思想、数形结合思想、化归与转化思想；考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性与创新性．满分 12 分．

【解答】解法一：（1）依题意，$a = \sqrt{2}$． ……………… 1 分

由椭圆的对称性可知，四边形 $A_1B_2A_2B_1$ 为菱形，其周长为 $4\sqrt{a^2 + b^2} = 4\sqrt{3}$． …… 3 分

所以 $b = 1$， ……………… 4 分

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$． ……………… 5 分

（2）设 $P\left(x_0, y_0\right)$，则 $2y_0^2 = 2 - x_0^2$， ……………… 6 分

直线 A_1P 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{2}}\left(x + \sqrt{2}\right)$，故 $C\left(0, \frac{\sqrt{2}y_0}{x_0 + \sqrt{2}}\right)$， ……………… 7 分

由 $A_1D \parallel PA_2$ 知 A_1D 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 - \sqrt{2}}\left(x + \sqrt{2}\right)$，故 $D\left(0, \frac{\sqrt{2}y_0}{x_0 - \sqrt{2}}\right)$， ……………… 8 分

假设存在 $Q(t, 0)$，使得 $\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QD} = 3$，则

$$\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QD} = \left(-t, \frac{\sqrt{2}y_0}{x_0 + \sqrt{2}}\right) \cdot \left(-t, \frac{\sqrt{2}y_0}{x_0 - \sqrt{2}}\right)$$

$$= t^2 + \frac{2y_0^2}{x_0^2 - 2}$$ ……………… 9 分

$$= t^2 + \frac{2 - x_0^2}{x_0^2 - 2}$$

$$= t^2 - 1$$

$$= 3.$$ ……………… 10 分

解得 $t = \pm 2$． ……………… 11 分

所以当 Q 的坐标为 $(\pm 2, 0)$ 时，$\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QD} = 3$． ……………… 12 分

解法二（1）同解法一． ……………… 5 分

（2）当点P与点B_1重合时，C点即$B_1(0,1)$，而点D即$B_2(0,-1)$，假设存在$Q(t,0)$，使得$\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{QD}=3$，则$(-t,1)\cdot(-t,-1)=3$，即$t^2-1=3$，解得$t=\pm 2$．……………6分

以下证明当Q为$(\pm 2,0)$时，$\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{QD}=3$

设$P(x_0,y_0)$，则$2y_0^2=2-x_0^2$，……………7分

直线A_1P的方程为$y=\dfrac{y_0}{x_0+\sqrt{2}}\left(x+\sqrt{2}\right)$，故$C\left(0,\dfrac{\sqrt{2}y_0}{x_0+\sqrt{2}}\right)$，……………8分

由$A_1D\,/\!/\,PA_2$知A_1D的方程为$y=\dfrac{y_0}{x_0-\sqrt{2}}\left(x+\sqrt{2}\right)$，故$D\left(0,\dfrac{\sqrt{2}y_0}{x_0-\sqrt{2}}\right)$，……………9分

所以$\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{QD}=\left(-t,\dfrac{\sqrt{2}y_0}{x_0+\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-t,\dfrac{\sqrt{2}y_0}{x_0-\sqrt{2}}\right)$

$=t^2+\dfrac{2y_0^2}{x_0^2-2}$ ……………10分

$=4+\dfrac{2-x_0^2}{x_0^2-2}$ ……………11分

$=4-1$

$=3$．……………12分

说明：Q只求出$(2,0)$或$(-2,0)$，不扣分．

21.　（本小题满分12分）

【命题意图】本小题主要考查古典概型、概率分布列、等差数列、导数等基础知识；考查数据处理能力、推理论证能力、运算求解能力与创新意识；考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、必然与或然思想；考查数学建模、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现综合性、应用性与创新性．满分12分．

【解答】（1）设恰好有3个股东同时选择同一款理财产品的事件为A，由题意知，5个股东共有4^5种选择，而恰好有3个股东同时选择同一款理财产品的可能情况为$C_5^3\cdot\left(A_4^2+A_4^3\right)$种，

所以$P(A)=\dfrac{C_5^3\cdot\left(A_4^2+A_4^3\right)}{4^5}=\dfrac{45}{128}$．……………4分

（2）①2021年全年该公司从协定存款中所得的利息为：

$\left[(550+500+450+\cdots+100+50)+50\right]\times\dfrac{0.0168}{12}$

$=\left[\dfrac{550+50}{2}\times 11+50\right]\times 0.0014=4.69$（万元）．……………6分

②由条件，高新项目投资可得收益频率分布表

@高考直通车

投资收益 t	$-\frac{x^3}{30\,000}+0.02x^2+0.135x$	0	$-0.27x$
P	0.6	0.2	0.2

…………………………………………………………………………………………………… 7 分

所以，高新项目投资所得收益的期望为：

$$E(t)=\left(-\frac{x^3}{30\,000}+0.02x^2+0.135x\right)\times 0.6+0\times 0.2-0.2\times 0.27x=-0.000\,02x^3+0.012x^2+0.027x$$

所以，存款利息和投资高新项目所得的总收益的期望为：

$$L(x)=-0.000\,02x^3+0.012x^2+0.027x+0.036\times(500-x)+0.018\times\frac{6}{12}x+4.69$$

$=-0.000\,02x^3+0.012x^2+22.69$（$0\leqslant x\leqslant 500$）. …………………………………… 9 分

$L'(x)=-0.000\,06\left(x^2-400x\right)$

令 $L'(x)=0$，得 $x=400$，或 $x=0$.

由 $L'(x)>0$，得 $0<x<400$；由 $L'(x)<0$，得 $400<x<500$. ………………… 11 分

由条件可知，当 $x=400$ 时，$L(x)$ 取得最大值为：$L(400)=662.69$（万元）.

所以当 $x=400$ 时，该公司 2021 年存款利息和投资高新项目所得的总收益的期望取得最大值 662.69 万元. …………………………………………………………………………… 12 分

22. （本小题满分 12 分）

【解答】解法一：(1) 依题意，$f'(x)=x(x+2)\mathrm{e}^x$，则……………………………… 1 分

当 $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(-2,0)$ 时，$f'(x)<0$；………… 2 分

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-2)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，在区间 $(-2,0)$ 上单调递减. …… 3 分

因为 $f(-2)=\frac{4}{\mathrm{e}^2}-1<0$，$f(1)=\mathrm{e}-1>0$，

所以 $f(x)$ 有且只有 1 个零点. ………………………………………………………… 5 分

(2) 令 $F(x)=x^2\mathrm{e}^x-a(2\ln x+x)-1$，则

$F'(x)=x(x+2)\mathrm{e}^x-\frac{a(x+2)}{x}=\frac{(x+2)\left(x^2\mathrm{e}^x-a\right)}{x}$（$x>0$）. ……………………… 6 分

①若 $a\leqslant 0$，则 $F'(x)>0$，$F(x)$ 为增函数，

$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{4}-1-a\left(2\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{4}-1-a\left(\frac{1}{2}-\ln 4\right)<0$，不合题意；………… 7 分

②若 $a>0$，令 $h(x)=x^2\mathrm{e}^x$（$x>0$），易知 $h(x)$ 单调递增，且值域为 $(0,+\infty)$，则存在 $x_0>0$，使得 $x_0^2\mathrm{e}^{x_0}=a$，即 $2\ln x_0+x_0=\ln a$. ……………………………………… 8 分

当$x\in(0,x_0)$时，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减；

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增.

$F(x)_{\min}=F(x_0)=x_0^2\mathrm{e}^{x_0}-a(2\ln x_0+x_0)-1=a-a\ln a-1$，……………………9分

令$\varphi(a)=a-a\ln a-1$，$\varphi'(a)=-\ln a$，

当$0<a<1$时，$\varphi'(a)=-\ln a>0$；当$a>1$时，$\varphi'(a)=-\ln a<0$；

所以$\varphi(a)\leqslant\varphi(1)=0$，

由$F(x)\geqslant 0$得$\varphi(a)\geqslant 0$，所以$a=1$. ……………………11分

综上，a的取值范围是$\{1\}$. ……………………12分

解法二：（1）同解法一. ……………………5分

（2）令$t=x^2\mathrm{e}^x$，当$x>0$时，$t>0$，

则$\ln t=2\ln x+x$，故$f(x)\geqslant a(2\ln x+x)\Leftrightarrow t-1\geqslant a\ln t$. ……………………7分

令$F(t)=t-1-a\ln t$，则$F'(t)=1-\dfrac{a}{t}=\dfrac{t-a}{t}$，……………………8分

①若$a\leqslant 0$，则$F'(t)>0$，$F(x)$为增函数，又$F(1)=0$，故当$0<t<1$时，$F(t)<0$，不合题意. ……………………9分

②若$a>0$，则当$t\in(0,a)$时，$F'(t)<0$；当$t\in(a,+\infty)$时，$F'(t)>0$；

所以$F(t)$在区间$(0,a)$上单调递减，在区间$(a,+\infty)$上单调递增，

因为$F(1)=0$，所以

若$a>1$，则当$t\in(1,a)$时$F(t)<0$，不合题意；

若$0<a<1$，则当$t\in(a,1)$时$F(t)<0$，不合题意；

若$a=1$，则$F(t)\geqslant F(1)=0$，符合题意. ……………………11分

综上，a的取值范围是$\{1\}$. ……………………12分

@高考直通车