准考证号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿

（在此卷上答题无效）

漳州市2021届高三毕业班第二次教学质量检测

数学试题

本试卷共5页。满分150分。

考生注意：

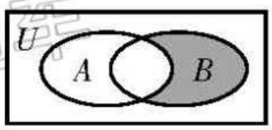
1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$，若集合 $A=\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$，$B=\{x \mid y=\sqrt{x-1}\}$，则如图所示的阴影部分表示的集合为



A. $(-\infty, 0)$　　B. $[1, 2]$　　C. $[1, +\infty)$　　D. $(2, +\infty)$

2. 若 $(3+\mathrm{i})(2+x\mathrm{i})=y$，其中 x，$y \in \mathbf{R}$，则复数 $x+y\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

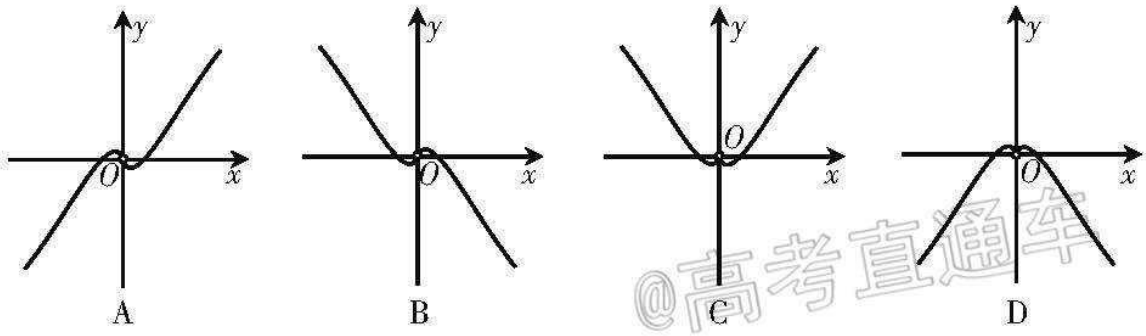
3. 纳斯卡线条是一种巨型的地上绘图，有着广大宽阔的直线，看起来就像机场跑道一样，描绘的大多是动植物，位于南美洲西部的秘鲁南部的纳斯卡荒原上，是存在了2000年的谜局：究竟是谁创造了它们并且为了什么而创造，至今仍无人能解，因此被列入“十大谜团”. 在这些图案中，最清晰的图案之一是一只身长50米的大蜘蛛（如图），据说这是一种学名为“节腹目”的蜘蛛的形状. 这种蜘蛛十分罕见，只有亚马逊河雨林中最偏远隐秘的地区才能找到. 现用视角为 30° 的摄像头（注：当摄像头和所拍摄的圆形区域构成一个圆锥时，该圆锥的轴截面的顶角称为该摄像头的视角）在该蜘蛛的上方拍摄，使得整个蜘蛛图案落在边长为50米的正方形区域内，则该摄像头距地面的高度的最小值是

摄像头的视角示意图

A. 50米　　B. $25(2\sqrt{2}+\sqrt{6})$ 米

C. $50(2+\sqrt{3})$ 米　　D. $50(2\sqrt{2}+\sqrt{6})$ 米

4. 函数 $f(x)=x\ln|x|+\sin x$ 的部分图象大致为



5. 已知实数 x，y 满足 $x^2+3y^2=3$，则 $x+y$ 的最大值为

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 4

6. 某校甲、乙、丙三位同学报名参加 A，B，C，D 四所高校的强基计划考试，每所高校报名人数不限，因为四所高校的考试时间相同，所以甲、乙、丙只能随机各自报考其中一所高校，则恰有两人报考同一所高校的概率为

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{9}{32}$　　C. $\dfrac{4}{9}$　　D. $\dfrac{9}{16}$

7. 已知直角梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel DC$，$\angle ABC=90°$，P 是边 BC 上一点(不包括 B、C 两点)．若 $|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{BC}|=4$，且 $|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BP}|$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最小值为

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{4}{e^x+1}$，则下列结论错误的是

A. 函数 $f(x)$ 的值域为 $(0,4)$

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,2)$ 对称

C. 函数 $g(x)=f(x)-|x|$ 有且只有 2 个零点

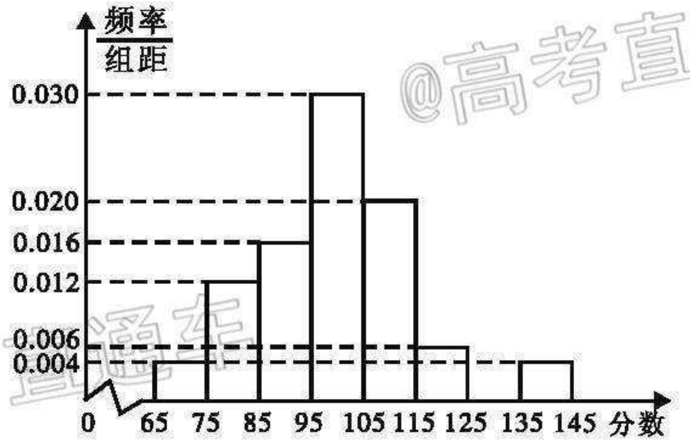
D. 曲线 $y=f(x)$ 的切线斜率的最大值为 -1

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $a=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$，则角 B 可以是

A. 15°　　B. 30°　　C. 45°　　D. 75°

10. 在第一次全市高三年级统考后，某数学老师为了解本班学生的本次数学考试情况，将全班50名学生的数学成绩绘制成频率分布直方图. 已知该班级学生的数学成绩全部介于65分到145分之间(满分150分)，将数学成绩按如下方式分成八组：第一组[65，75)，第二组[75，85)，…，第八组[135，145]，按上述分组方法得到的频率分布直方图的一部分，如图所示，则下列结论正确的是



A. 第七组的频率为0.008

B. 该班级数学成绩的中位数的估计值为101分

C. 该班级数学成绩的平均分的估计值大于95分

D. 该班级数学成绩的方差的估计值大于26

11. 已知正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=2$，$AA_1=1$，M为AB的中点，点P在线段BC_1上，则下列结论正确的是

A. 直线BC_1 // 平面A_1MC　　B. A和P到平面A_1MC的距离相等

C. 存在点P，使得$AP\perp$平面A_1MC　　D. 存在点P，使得$AP\perp A_1C$

12. 已知F为抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点，K为C的准线与x轴的交点，点P在抛物线C上，设$\angle KPF=\alpha$，$\angle PKF=\beta$，$\angle PFK=\theta$，则下列结论正确的是

A. 抛物线C在点$(\frac{p}{2},p)$处的切线过点K　　B. β的最大值为$\frac{\pi}{3}$

C. $\tan\beta=\sin\theta$　　D. 存在点P，使得$\alpha=\frac{3}{2}\beta$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 写出一个离心率为2的双曲线方程：__________.

14. 已知$(x+1)^6=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_6(x-1)^6$，则$a_4=$__________.

15. 已知$\omega>0$，$\varphi>0$，函数$f(x)=2\cos(3x+\frac{\pi}{3})+1$的图象向右平移$\varphi$个单位得到$g(x)$的图象，若函数$g(x)$与函数$h(x)=4\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})$的极值点完全相同，则$\omega=$__________，$\varphi$的最小值为__________.（第一空2分，第二空3分）

16. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为4，点P在平面A_1BCD_1内，且$PA=3PB$，则点P的轨迹的长度为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10 分）

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_1=1$，$S_{n+1}-3S_n=1$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若 $b_n=\log_3 a_n+1$，求数列$\left\{\dfrac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}\right\}$的前 n 项和 T_n.

18. （12 分）

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且满足

$2\sin^2A-2\sin^2B-\sin^2C-2\sin B\sin C=\cos^2C-\cos2C$.

（1）求角 A；

（2）设点 D 在边 BC 上，且 $AD=2$，

证明：若____________，则 $b+c$ 存在最大值或最小值.

请在下面的两个条件中选择一个条件填到上面的横线上，并证明.

① AD 是 $\triangle ABC$ 的中线；

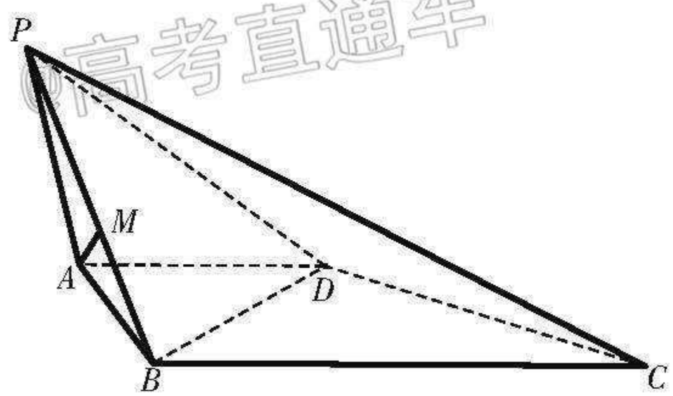
② AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.

19. （12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$AD\parallel BC$，$AB\perp BC$，$\angle PAB=120°$，$PA=AD=AB=1$，$BC=2$.

（1）证明：平面 $PBC\perp$ 平面 PAB；

（2）在线段 PB 上是否存在点 M，使得直线 AM 与平面 PBD 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$？若存在，求出线段 PM 的长度；若不存在，请说明理由.



20. (12 分)

已知左、右焦点分别为 F_1、F_2 的椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点$(\sqrt{2},\sqrt{3})$，以 F_1F_2 为直径的圆过 C 的下顶点 A.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 若过点 $P(0,1)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 M，N 两点，且直线 AM、AN 的斜率分别为 k_1、k_2，证明：$k_1\cdot k_2$ 为定值.

21. (12 分)

某种玩具启动后，该玩具上的 LED 灯会亮起红灯或绿灯(红灯和绿灯不会同时亮起)，第 1 次亮灯时，亮起红灯的概率为 P_1，亮起绿灯的概率为 $1-P_1$. 若第 n 次亮起的是红灯，则第 $n+1$ 次亮起红灯的概率为$\frac{1}{3}$，亮起绿灯的概率为$\frac{2}{3}$；若第 n 次亮起的是绿灯，则第 $n+1$ 次亮起红灯的概率为$\frac{2}{3}$，亮起绿灯的概率为$\frac{1}{3}$. 记第 n 次亮灯时，亮起红灯的概率为 P_n，$n\in N^*$. 该玩具启动前可输入 P_1，玩具启动后，当$\frac{1010}{2021}<P_n<\frac{1}{2}$且第 n 次亮起红灯时，该玩具会唱一首歌曲，否则不唱歌.

(1) 若输入 $P_1=\frac{1}{2}$，记该玩具启动后，前 3 次亮灯中亮起红灯的次数为 X，求 X 的分布列和期望；

(2) 若输入 $P_1=\frac{1}{3}$，

(ⅰ) 求数列$\{P_n\}$的通项公式；

(ⅱ) 该玩具启动后，在前 20 次亮灯中，该玩具最多唱几次歌？

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}+b\ln x-a$，$g(x)=ae^{x-1}+\ln x-a$，$h(x)=f(x)-g(x)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若 $b=1$，且 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1，x_2，

证明：$h(x)$ 有唯一零点(记为 x_0)，且 $x_1+x_2>2x_0$.

漳州市2021届高三毕业班第二次教学质量检测

数学参考答案及评分细则

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. D　　2. B　　3. B　　4. A　　5. C　　6. D

7. C　　8. D

二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分，在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求，全部选对的得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分.

9. AB　　10. BCD　　11. AB　　12. ACD

三、填空题：本大题共4题，每小题5分，共20分.

13. $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$(答案不唯一)　　14. 60

15. 3，$\dfrac{\pi}{3}$　　16. $\dfrac{\sqrt{34}}{2}\pi$

四、解答题：本大题共6小题，共70分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 解：(1) 因为 $S_{n+1}-3S_n=1$，所以当 $n=1$ 时，$S_2-3S_1=a_1+a_2-3a_1=1$，

又 $a_1=1$，所以 $a_2=3$. ………………………………………… 1分

因为 $S_{n+1}-3S_n=1$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n-3S_{n-1}=1$，两式相减得：$a_{n+1}-3a_n=0$，

所以 $a_{n+1}=3a_n$，$n\geqslant 2$，………………………………………… 3分

又 $a_2=3a_1$，所以 $a_{n+1}=3a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，………………………… 4分

所以数列$\{a_n\}$是以1为首项，以3为公比的等比数列，所以 $a_n=3^{n-1}$.

………………………………………………………………………… 5分

(2) 由(1) 得 $b_n = \log_3 a_n + 1 = \log_3 3^{n-1} + 1 = n$, ………………………………………… 6 分

所以$\frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, ………………………………………… 8 分

所以 $T_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

……………………………………………………………………………………………… 10 分

18. 解: (1) 因为 $2\sin^2 A - 2\sin^2 B - \sin^2 C - 2\sin B\sin C = \cos^2 C - \cos 2C$,

所以 $2\sin^2 A - 2\sin^2 B - \sin^2 C - 2\sin B\sin C = \cos^2 C - (\cos^2 C - \sin^2 C) = \sin^2 C$,

……………………………………………………………………………………………… 2 分

所以$\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = -\sin B\sin C$,

所以由正弦定理, 得 $b^2 + c^2 - a^2 = -bc$, ………………………………………… 3 分

所以 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2}$, ………………………………………… 4 分

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$. ………………………………………… 6 分

(2) 若选择 ①, 则$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, ………………………………………… 7 分

所以$\overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2)$, ………………………………………… 8 分

因为 $AD = 2$,

所以 $4 = \frac{1}{4}[c^2 + 2cb \cdot (-\frac{1}{2}) + b^2]$, ………………………………………… 9 分

所以 $16 = (b+c)^2 - 3bc \geqslant (b+c)^2 - 3 \cdot (\frac{b+c}{2})^2 = \frac{(b+c)^2}{4}$,

即$(b+c)^2 \leqslant 64$, 所以 $b + c \leqslant 8$, ………………………………………… 11 分

当且仅当 $b = c = 4$ 时, $(b+c)_{max} = 8$.

所以 $b + c$ 存在最大值, 所以原命题成立. ………………………………………… 12 分

若选择 ②, 则 $\angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2}A = \frac{\pi}{3}$,

因为 $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC}$, ………………………………………… 7 分

所以$\frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}AD \cdot AC \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\frac{2\pi}{3}$, …… 8 分

因为 $AD = 2$,

所以$\frac{1}{2}c \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}c \cdot b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $2c + 2b = bc$, 所以$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$, ………………………………………… 9 分

所以 $b + c = 2(b+c)(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = 2(1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + 1) \geqslant 2(2 + 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}}) = 8$,

……………………………………………………………………………………………… 11 分

当且仅当 $b = c = 4$ 时, $(b+c)_{min} = 8$.

所以 $b+c$ 存在最小值，所以原命题成立. ………………………………… 12 分

19. (1) 证明：因为平面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，且平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，

$BC\perp AB$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BC\perp$ 平面 ABP， ……………… 2 分

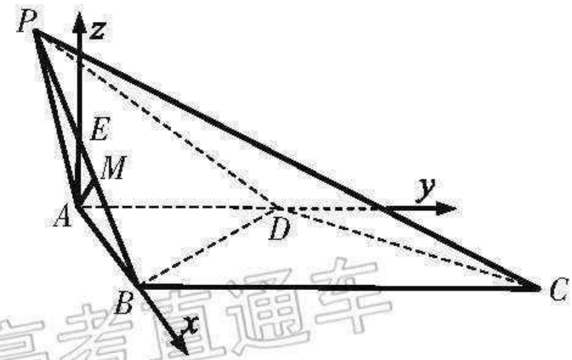
又 $BC\subset$ 平面 PBC，所以平面 $PBC\perp$ 平面 PAB. ……………………… 4 分

(2) 解：在平面 PAB 内，过点 A 作 $AE\perp AB$ 交 PB 于点 E，则可知 $AE\perp$ 平面 $ABCD$.

以 A 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ 方向为 x，y，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $A-xyz$， ……………………………………………………………… 5 分

则由 $\angle PAB=120°$，$PA=AD=AB=1$，$BC=2$，

可得 $P(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,1,0)$，



则 $\overrightarrow{DP}=(-\frac{1}{2},-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，

$\overrightarrow{DB}=(1,-1,0)$，

$\overrightarrow{PB}=(\frac{3}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2})$， ……………… 6 分

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 PBD 的法向量，

则有 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\frac{1}{2}x-y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ x-y=0\end{cases}$，

取 $\vec{n}=(1,1,\sqrt{3})$， ……………………………………………………… 8 分

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PB}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=(\frac{3\lambda-1}{2},0,\frac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{2})$，

若直线 AM 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$，

则 $|\cos<\overrightarrow{AM},\vec{n}>|=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AM}||\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3\lambda^2-3\lambda+1}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$， ………… 10 分

解得 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\lambda=\frac{2}{3}$， ……………………………………………… 11 分

故存在点 M 满足题意，此时 $PM=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $PM=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ………………………… 12 分

20. 解：(1) 因为以 F_1F_2 为直径的圆过点 $A(0,-b)$，所以 $b=c$， ……………… 1 分

所以 $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}b$， ………………………………………………… 2 分

所以 C：$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，因为 C 过点 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$，所以 $\frac{2}{2b^2}+\frac{3}{b^2}=1$，

解得 $b=2$，$a=2\sqrt{2}$，…………………………………………………… 4 分

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………… 5 分

（2）由题意，可设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\\ y=kx+1\end{cases}$，消去 y 得$(1+2k^2)x^2+4kx-6=0$. ………… 6 分

于是 $x_1+x_2=-\frac{4k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{-6}{1+2k^2}$， ……………………………… 8 分

因为 $A(0,-2)$，所以 $k_1=\frac{y_1+2}{x_1}$，$k_2=\frac{y_2+2}{x_2}$， ……………………………… 9 分

于是 $k_1\cdot k_2=\frac{(y_1+2)(y_2+2)}{x_1x_2}=\frac{(kx_1+3)(kx_2+3)}{x_1x_2}=\frac{k^2x_1x_2+3k(x_1+x_2)+9}{x_1x_2}$

$=k^2+2k^2-\frac{9(1+2k^2)}{6}=-\frac{3}{2}$为定值. ……………………………………… 12 分

21. 解：（1）由题意，得 X 的所有取值为 0，1，2，3，

因为 $X=0$ 表示前 3 次亮灯的颜色为“绿绿绿”，

所以 $P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$.

因为 $X=1$ 表示前 3 次亮灯的颜色为“红绿绿”或“绿红绿”或“绿绿红”，

所以 $P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

因为 $X=2$ 表示前 3 次亮灯的颜色为“红红绿”或“红绿红”或“绿红红”，

所以 $P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$.

因为 $X=3$ 表示前 3 次亮灯的颜色为“红红红”，

所以 $P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$.

所以 X 的分布列为 …………………………………… 4 分

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{18}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{18}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{1}{18}=\frac{3}{2}$. ……………………… 5 分

（2）（ⅰ）由题意，得 $P_{n+1}=P_n\times\frac{1}{3}+(1-P_n)\times\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}P_n+\frac{2}{3}$， ……… 6 分

所以 $P_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}(P_n-\frac{1}{2})$， ……………………………………… 7 分

因为 $P_1=\frac{1}{3}$，所以 $P_1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\neq 0$， …………………………… 8 分

所以 $\{P_n-\frac{1}{2}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{6}$，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列，

所以 $P_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\times(-\frac{1}{3})^{n-1}$，所以 $P_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{3})^{n}$. ………

…………………………………………………………………………………… 9 分

（ⅱ）由 $P_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{3})^{n}<\frac{1}{2}$，得 $\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{3})^{n}<0$，又 $n\in N^*$，所以

n 为正奇数，

由 $P_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{3})^{n}>\frac{1010}{2021}$，得 $(-\frac{1}{3})^{n}>-\frac{1}{2021}$，

当 n 为奇数时，$\frac{1}{3^n}<\frac{1}{2021}$，$3^n>2021$，所以 $n\geqslant 7$， …………… 11 分

所以该玩具启动后，在前20次亮灯中，当 $n=7$，9，11，13，15，17，19 时，该玩具可能唱歌，所以该玩具启动后，在前 20 次亮灯中，该玩具最多唱 7 次歌. …………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{b}{x}=\frac{-1+bx}{x^2}$ …………… 1 分

① 若 $b\leqslant 0$，则 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 的递减区间为 $(0,+\infty)$，无递增区间.

…………………………………………………………………………………… 2 分

② 若 $b>0$，则由 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{b}$，由 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{b}$，

所以 $f(x)$ 的递减区间为 $(0,\frac{1}{b})$，递增区间为 $(\frac{1}{b},+\infty)$. …………… 4 分

(2) 因为 $b=1$，所以由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，

因为 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1，x_2，不妨设 $x_1<x_2$，

所以 $0<x_1<1<x_2$，且 $f(1)=1-a<0$，

所以 $a>1$， ………………………………………………………………… 5 分

又 $h(x)=\frac{1}{x}-ae^{x-1}$，$x>0$，

因为当 $x>0$ 时，$h'(x)=-\frac{1}{x^2}-ae^{x-1}<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数， ………………………………… 6 分

又因为 $h(\frac{1}{a})=a-ae^{\frac{1}{a}-1}=a(1-e^{\frac{1}{a}-1})>0$，$h(1)=1-a<0$，$h(x)$ 的图象

连续不断，

所以 $h(x)$ 有唯一零点 x_0，且 $\frac{1}{a} < x_0 < 1$. ………………………………………… 7 分

所以 $2x_0 < 2$，

要证明 $x_1 + x_2 > 2x_0$，

只需证明 $x_1 + x_2 > 2$， ……………………………………………………………… 8 分

只需证明 $x_2 > 2 - x_1$，

因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增，x_2，$2 - x_1 \in (1, +\infty)$，

所以只需证明 $f(x_2) > f(2 - x_1)$， ……………………………………………… 9 分

因为 $f(x_1) = f(x_2) = 0$，

所以只需证明 $f(x_1) > f(2 - x_1)$，

只需证明 $f(x_1) - f(2 - x_1) > 0$，

令 $\varphi(x) = f(x) - f(2 - x)$，

只需证明 $\varphi(x_1) > 0 = \varphi(1)$，

只需证明 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递减， ……………………………………………… 10 分

因为 $f'(x) = \frac{x - 1}{x^2}$，

所以当 $0 < x < 1$ 时，$\varphi'(x) = f'(x) + f'(2 - x) = -\frac{4(x - 1)^2}{x^2(x - 2)^2} < 0$，

……………………………………………………………………………………………… 11 分

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递减，

所以 $x_1 + x_2 > 2x_0$. …………………………………………………………………… 12 分