T8 联考 广东实验中学　东北育才中学　石家庄二中　华中师大一附中　西南大学附中　南京师大附中　湖南师大附中　福州一中 **八校**

2021 届高三第一次联考

数学试题

命题学校：华中师大一附中　　命题人：田甜　　　　审题人：王雪冰　吴巨龙

考试时间：2020 年 12 月 30 日上午 8:00—10:00　　试卷满分 150 分　　考试用时 120 分钟

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

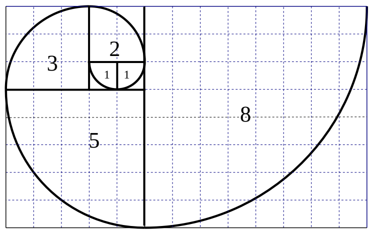
1．若 $z=\dfrac{1+i}{1-2i}\cdot i^3$，则 z 的虚部为

A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$\dfrac{1}{5}i$　　C．$\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{3}{5}i$

2．已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-4x+3<0\}$，$B=\{x\,|\,x>m\}$，若 $A\bigcup B=\{x\,|\,x>1\}$，则

A．$m\geq 1$　　B．$1\leq m<3$　　C．$1<m<3$　　D．$1\leq m\leq 3$

3．斐波那契螺旋线被誉为自然界最完美的“黄金螺旋”，它的画法是：以斐波那契数：1，1，2，3，5，…为边的正方形拼成长方形，然后在每个正方形中画一个圆心角为 90° 的圆弧，这些圆弧所连起来的弧线就是斐波那契螺旋线．自然界存在很多斐波拉契螺旋线的图案，例如向日葵、鹦鹉螺等．下图为该螺旋线的前一部分，如果用接下来的一段圆弧所对应的扇形做圆锥的侧面，则该圆锥的底面半径为



A．$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　　B．$\dfrac{13}{8}$

C．$\dfrac{13}{4}$　　D．$\dfrac{13}{2}$

4．设 $f(x)=\begin{cases}x^2-(a^2-5a+4)x+3a, & (x<1)\\ 2x+\dfrac{2}{x-1}+3, & (x>1)\end{cases}$，若 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)$，则 a 的值为

A．0　　B．1 或 4　　C．1　　D．4

5．已知 ΔABC 中，$AB=1$，$AC=3$，$\cos A=\dfrac{1}{4}$，点 E 在直线 BC 上，且满足：$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}(\lambda\in R)$，则 $|\overrightarrow{AE}|=$

A．$\sqrt{34}$　　B．$3\sqrt{6}$　　C．3　　D．6

6．设双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左，右焦点分别为 F_1， F_2，过 F_1 的直线与双曲线的左支交于点 A，与双曲线的渐近线在第一象限交于点 B，若 $BF_1\perp BF_2$，则 ΔABF_2 的周长为

A． $4\sqrt{3}+2$　　B． $4\sqrt{3}-2$　　C． $4+2\sqrt{3}$　　D． $4-2\sqrt{3}$

7．已知 ΔABC 中，角 A， B 满足 $\sin A-\cos B+A+B<\frac{\pi}{2}$，则下列结论一定正确的是

A． $\sin A<\cos C$　　B． $\sin A>\cos B$

C． $\sin B<\cos A$　　D． $\sin C<\sin B$

8．将一条均匀柔软的链条两端固定，在重力的作用下它所呈现的形状叫悬链线，例如悬索桥等．建立适当的直角坐标系，可以写出悬链线的函数解析式为 $f(x)=a\cosh\frac{x}{a}$，其中 a 为悬链线系数，$\cosh x$ 称为双曲余弦函数，其函数表达式为 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，相应地双曲正弦函数的函数表达式为 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$．若直线 $x=m$ 与双曲余弦函数 C_1 和双曲正弦函数 C_2 分别相交于点 A， B，曲线 C_1 在点 A 处的切线与曲线 C_2 在点 B 处的切线相交于点 P，则

A． $y=\sinh x\cosh x$ 是偶函数　　B． $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y$

C． $|BP|$ 随 m 的增大而减小　　D． ΔPAB 的面积随 m 的增大而减小

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分．

9. 已知圆 $x^2+y^2-2x-6y+a=0$ 上至多有一点到直线 $3x+4y+5=0$ 的距离为 2，则实数 a 可能的取值为

A．5　　B．6　　C．7　　D．10

10．下列命题中正确的是

A． $\exists x\in(0,+\infty)$，$(\frac{1}{2})^x>(\frac{1}{3})^x$　　B． $\forall x\in(0,1)$，$\log_{\frac{1}{2}}x>\log_{\frac{1}{3}}x$

C． $\forall x\in(0,\frac{1}{2})$，$(\frac{1}{2})^x>x^{\frac{1}{2}}$　　D． $\exists x\in(0,\frac{1}{3})$，$(\frac{1}{2})^x>\log_{\frac{1}{3}}x$

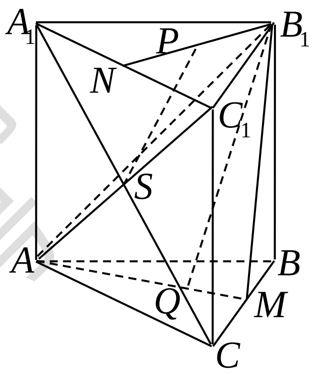
11．已知等比数列 $\{a_n\}$ 首项 $a_1>1$，公比为 q，前 n 项和为 S_n，前 n 项积为 T_n，函数

$f(x)=x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_7)$，若 $f'(0)=1$，则

A．$\{\lg a_n\}$ 为单调递增的等差数列　　B．$0<q<1$

C．$\{S_n-\frac{a_1}{1-q}\}$ 为单调递增的等比数列　　D．使得 $T_n>1$ 成立的 n 的最大值为 6

12．在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=90°$，$AB=BC=2$，$AA_1=2$，M 是 BC 的中点，N 是 A_1C_1 的中点，点 P 在线段 B_1N 上，点 Q 在线段 AM 上，且 $AQ=\frac{2}{3}AM$，S 是 AC_1 与 A_1C 的交点，若 PS // 面 B_1AM，则



A．$PS\,//\,B_1Q$

B．P 为 B_1N 的中点

C．$AC\perp PS$

D．三棱锥 $P-B_1AM$ 的体积为 $\frac{2}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．设随机变量 $X\sim B(n,\frac{1}{4})$，$Y=2X+1$，若 $E(Y)=4$，则 $n=$________．

14．武汉某学校的四名党员教师积极参加党员干部下沉社区的活动，在活动中他们会被随机分配到 A、B、C 三个社区．若每个社区至少分配一名党员教师，且教师甲必须分配到 A 社区，共有_______种不同的分配方案．

15．我国南宋时期杰出数学家秦九韶在《数书九章》中提出了“三斜求积术”，即以小斜幂，并大斜幂，减中斜幂，余半之，自乘于上；以小斜幂乘大斜幂，减上，余四约之，为实；一为从隅，开平方得积．把以上文字写成公式，即 $S=\sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$（其中 S 为三角形的面积，a,b,c 为三角形的三边）．在非直角 ΔABC 中，a,b,c 为内角 A,B,C 所对应的三边，若 $a=3$，且 $a=c(\cos B+\sqrt{3}\cos C)$，则 ΔABC 的面积最大时，$c=$_______．

16．已知函数 $f(x)=ae^x+\ln\frac{a}{x+2}-2(a>0)$，若 $f(x)>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为__________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，$\{b_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=b_1=1$，$a_2=a_3-b_3$，$a_3=S_3+b_2$．

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设$c_n=\dfrac{a_nb_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}$，$T_n$为数列$\{c_n\}$的前$n$项和，求数列$\{\dfrac{5}{5T_n+2}\}$的前$n$项和$S_n{}'$．

18．（12 分）已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的图像是由$y=\sqrt{2}\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})$的图像向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位得到的．

（1）若$f(x)$的最小正周期为π，求$f(x)$的与y轴距离最近的对称轴方程；

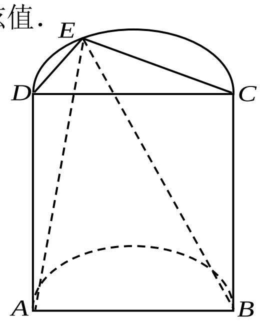
（2）若$f(x)$在$[\dfrac{\pi}{2},\pi]$上仅有一个零点，求ω的取值范围．

19．（12 分）如图所示为一个半圆柱，E为半圆弧CD上一点，$CD=\sqrt{5}$．

（1）若$AD=2\sqrt{5}$，求四棱锥$E-ABCD$的体积的最大值；

（2）有三个条件：①$4\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{DC}$；②直线$AD$与$BE$所成角的正弦值为$\dfrac{2}{3}$；③$\dfrac{\sin\angle EAB}{\sin\angle EBA}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$．

请你从中选择两个作为条件，求直线AD与平面EAB所成角的余弦值．



20.（12 分）国家发展改革委、住房城乡建设部于 2017 年发布了《生活垃圾分类制度实施方案》，规定 46 个城市在 2020 年底实施生活垃圾强制分类，垃圾回收、利用率要达 35%以上．截至 2019 年底，这 46 个重点城市生活垃圾分类的居民小区覆盖率已经接近 70%．武汉市在实施垃圾分类之前，从本市人口数量在两万人左右的 320 个社区中随机抽取 50 个社区，对这 50 个社区某天产生的垃圾量（单位：吨）进行了调查，得到如下频数分布表，并将人口数量在两万人左右的社区垃圾数量超过 28 吨/天的确定为“超标”社区：

垃圾量 X	[12.5,15.5)	[15.5,18.5)	[18.5,21.5)	[21.5,24.5)	[24.5,27.5)	[27.5,30.5)	[30.5,33.5]
频数	5	6	9	12	8	6	4

（1）通过频数分布表估算出这 50 个社区这一天垃圾量的平均值 $\overline{x}$（精确到 0.1）；

（2）若该市人口数量在两万人左右的社区这一天的垃圾量大致服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 近似为（1）中的样本平均值 $\overline{x}$，σ^2 近似为样本方差 s^2，经计算得 $s=5.2$．请利用正态分布知识估计这 320 个社区中“超标”社区的个数．

（3）通过研究样本原始数据发现，抽取的 50 个社区中这一天共有 8 个“超标”社区，市政府决定对这 8 个“超标”社区的垃圾来源进行跟踪调查．现计划在这 8 个“超标”社区中任取 5 个先进行跟踪调查，设 Y 为抽到的这一天的垃圾量至少为 30.5 吨的社区个数，求 Y 的分布列与数学期望．

（参考数据：$P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)\approx0.6827$；$P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)\approx0.9545$；$P(\mu-3\sigma<X\le\mu+3\sigma)\approx0.9974$）

21．（12 分）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与抛物线$M:y^2=4x$有公共的焦点，且抛物线的准线被椭圆截得的弦长为 3．

（1）求椭圆C的方程；

（2）过椭圆C的右焦点作一条斜率为$k(k\neq 0)$的直线交椭圆于A,B两点，交y轴于点E，P为弦AB的中点，过点E作直线OP的垂线交OP于点Q，问是否存在一定点H，使得QH的长度为定值？若存在，则求出点H，若不存在，请说明理由．

22．（12 分）已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x+m}{x^2}$．

（1）当$m=1$时，求$f(x)$的最大值；

（2）讨论关于x的方程$f(x)=m-\ln x$的实根的个数．

2021 届 T8 第一次联考数学试题参考答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	C	C	D	C	C	D	BC	ABC	BCD	ACD

二、填空题：

13．6　　14．12　　15．3　　16．$(e,+\infty)$

部分选填题解答：

8．解：对于选项 A：$y=\sinh x\cosh x=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}$ 是奇函数，所以 A 错误；

对于选项 B：$\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}$

$=\dfrac{e^{x+y}+e^{-x-y}+e^{x-y}+e^{y-x}}{4}-\dfrac{e^{x+y}+e^{-x-y}-e^{x-y}-e^{y-x}}{4}=\dfrac{e^{x-y}+e^{y-x}}{2}=\cosh(x-y)$，

所以 B 错误；

对于选项 C、D：设 $A(m,\dfrac{e^{m}+e^{-m}}{2})$，$B(m,\dfrac{e^{m}-e^{-m}}{2})$，

则曲线 C_1 在点 A 处的切线方程为：$y-\dfrac{e^{m}+e^{-m}}{2}=\dfrac{e^{m}-e^{-m}}{2}(x-m)$，

曲线 C_2 在点 B 处的切线方程为：$y-\dfrac{e^{m}-e^{-m}}{2}=\dfrac{e^{m}+e^{-m}}{2}(x-m)$，

联立求得点 P 的坐标为 $(m+1,e^{m})$，则 $|BP|^2=1+(e^{m}-\dfrac{e^{m}-e^{-m}}{2})^2=1+\dfrac{(e^{m}+e^{-m})^2}{4}$，

$S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}|AB|=\dfrac{1}{2}e^{-m}$，所以 $|BP|$ 随 m 的增大而先减小后增大，ΔPAB 的面积随 m 的增大而减小，所以 C 错误，D 正确.

11．解：令 $g(x)=(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_7)$，则 $f(x)=xg(x)$，

$\therefore f'(x)=g(x)+xg'(x)$，$\therefore f'(0)=g(0)=a_1a_2\cdots a_7=1$，因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $a_1a_2\cdots a_7=a_4{}^7=1$，即 $a_4=1=a_1q^3$，$\because a_1>1$，$\therefore 0<q<1$，B 正确；

$\because \lg a_n=\lg a_1q^{n-1}=\lg a_1+(n-1)\lg q$，$\therefore\{\lg a_n\}$ 是公差为 $\lg q$ 的递减等差数列，A 错误；

$\because S_n-\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{a_1}{1-q}(1-q^n-1)=\dfrac{a_1q}{q-1}\cdot q^{n-1}$，$\therefore\{S_n-\dfrac{a_1}{1-q}\}$ 是首项为 $\dfrac{a_1q}{q-1}<0$，公比为 q 的递增等比数列，C 正确；

$\because a_1>1$，$0<q<1$，$a_4=1$，$\therefore n\le 3$ 时，$a_n>1$，$n\ge 5$ 时，$0<a_n<1$，$\therefore n\le 4$ 时，$T_n>1$，

$\because T_7=a_1a_2\cdots a_7=a_4{}^7=1$，$\therefore n\ge 8$ 时，$T_n=T_7a_8a_9\cdots a_n<T_7=1$，又 $T_5=\dfrac{T_7}{a_6a_7}>1$，

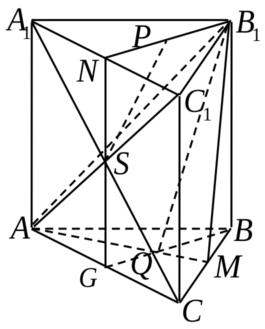
$T_6=\dfrac{T_7}{a_7}>1$，所以使得 $T_n>1$ 成立的 n 的最大值为 6，D 正确.

12．解：对于选项 A：连接交 NS 交 AC 于 G 点，连接 BG，

则由 $AB=BC$，$AQ=\dfrac{2}{3}AM$，可得 BG 必过点 Q，且 $BQ=\dfrac{2}{3}BG$，因为 $PS\subset$ 面 BB_1NG，$PS//$ 面AMB_1， 面$AMB_1\cap$面$BB_1NG=B_1Q$，所以 $PS//B_1Q$，A 正确；

对于选项 B：$\because PS//B_1Q$，$\therefore \angle NPS=\angle NBQ=\angle B_1QB$，$\therefore Rt\Delta PNS\sim Rt\Delta QBB_1$，

$\therefore \dfrac{PN}{BQ}=\dfrac{NS}{BB_1}=\dfrac{1}{2}$，即 $PN=\dfrac{1}{2}BQ=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}BG=\dfrac{1}{3}B_1N$，



$\therefore P$ 为靠近 N 的三等分点，B 错误；

对于选项 C：$\because AC\perp NG$，$AC\perp BG$，

$\therefore AC\perp$ 面BB_1NG，$\therefore AC\perp PS$，C 正确；

对于选项 D：$\because B_1P//BQ$，且 $B_1P=BQ$，$\therefore BB_1PQ$ 是矩形，

$\therefore V_{P-AB_1M}=V_{B-AB_1M}=V_{B_1-ABM}=\dfrac{1}{3}\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=\dfrac{2}{3}$，D 正确.

15．解：$\because a=c(\cos B+\sqrt{3}\cos C)$，$\therefore \sin A=\sin C(\cos B+\sqrt{3}\cos C)$，

$\therefore \sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

化简得 $\cos C\sin B=\sqrt{3}\sin C\cos C$，$\because \Delta ABC$ 非直角三角形，$\therefore \cos C\neq 0$，

$\therefore \sin B=\sqrt{3}\sin C$，即 $b=\sqrt{3}c$，

$\therefore S=\sqrt{\dfrac{1}{4}[c^2a^2-(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-4c^4+72c^2-81}{4}}$，当且仅当 $c^2=9$，即 $c=3$ 时，S 有最大值.

16．解：$\because f(x)=ae^x+\ln\dfrac{a}{x+2}-2>0$，则 $e^{x+\ln a}+\ln a>\ln(x+2)+2$，

两边加上 x 得到 $e^{x+\ln x}+x+\ln a>x+2+\ln(x+2)=e^{\ln(x+2)}+\ln(x+2)$，$\because y=e^x+x$ 单调递增，$\therefore x+\ln a>\ln(x+2)$，即 $\ln a>\ln(x+2)-x$，

令 $g(x)=\ln(x+2)-x$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x+2}-1=\dfrac{-x-1}{x+1}$，$\therefore x\in(-2,-1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$x\in(-1,+\infty)$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

$\therefore \ln a>g(x)_{\max}=g(-1)=1$，$\therefore a>e$.

四、解答题：

17．解：（1）设等差数列的公差为 d，等比数列的公比为 q，$\because a_2=a_3-b_3$，$a_3=S_3+b_2$，

$\therefore \begin{cases} d=q^2 \\ 1+2d=1+q+q^2+q \end{cases}$，解得：$\begin{cases} q=2 \\ d=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} q=0 \\ d=0 \end{cases}$（舍去），

$\therefore a_n=4n-3$，$b_n=2^{n-1}$. ……………………………4 分

（2）$\because \{a_n\}$ 是等差数列，所以 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$，又由（1）知：$b_{n+2}=2b_{n+1}$，

$\therefore c_n=\dfrac{a_nb_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}=\dfrac{(2a_{n+1}-a_{n+2})b_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}=\dfrac{2b_{n+1}}{a_{n+2}}-\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}=\dfrac{b_{n+2}}{a_{n+2}}-\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$， ……………6 分

$\therefore T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\frac{b_{n+2}}{a_{n+2}}-\frac{b_2}{a_2}=\frac{2^{n+1}}{4n+5}-\frac{2}{5}$， $\therefore \frac{5}{5T_n+2}=\frac{4n+5}{2^{n+1}}$， ……8 分

则 $S_n{}'=9(\frac{1}{2})^2+13(\frac{1}{2})^3+\cdots+(4n+5)(\frac{1}{2})^{n+1}$ ①

$\frac{1}{2}S_n{}'=9(\frac{1}{2})^3+13(\frac{1}{2})^4+\cdots+(4n+5)(\frac{1}{2})^{n+2}$ ②

由①－②得：

$$\frac{1}{2}S_n{}'=9(\frac{1}{2})^2+4[(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^4+\cdots+(\frac{1}{2})^{n+1}]-(4n+5)(\frac{1}{2})^{n+2}$$

$$=5(\frac{1}{2})^2+4\cdot\frac{\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-(4n+5)(\frac{1}{2})^{n+2}=\frac{5}{4}+2[1-(\frac{1}{2})^n]-(4n+5)(\frac{1}{2})^{n+2}$$

$$=\frac{13}{4}-(4n+13)(\frac{1}{2})^{n+2},$$

$\therefore S_n{}'=\frac{13}{2}-(4n+13)(\frac{1}{2})^{n+1}$． ……………………………10 分

18．解：（1）因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π， $\therefore \frac{2\pi}{\omega}=\pi$， $\therefore \omega=2$， ………2 分

$\because f(x)$ 的图像是由 $y=\sqrt{2}\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到，

$\therefore f(x)=\sqrt{2}\sin[\omega(x-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{3}]$，即 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{3})$， ………4 分

令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，得 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}$， $k\in Z$，…5 分

要使直线 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}$（$k\in Z$）与 y 轴距离最近，则须 $|\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}|$ 最小，

$\therefore k=-1$，此时对称轴方程为 $x=-\frac{\pi}{12}$，即所求对称轴方程为 $x=-\frac{\pi}{12}$． ……6 分

（2）由已知得： $f(x)=\sqrt{2}\sin[\omega(x-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{3}]$，

令 $f(x)=0$ 得： $\omega x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\omega=k\pi,k\in Z$，即 $x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{3}}{\omega},k\in Z$， ……8 分

$\because f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上仅有一个零点，$\therefore \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \le \dfrac{k\pi+\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{3}}{\omega} \le \pi \\ \dfrac{(k-1)\pi+\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{3}}{\omega} < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{(k+1)\pi+\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{3}}{\omega} > \pi \end{cases}, k\in Z$，$\because \omega>0$，

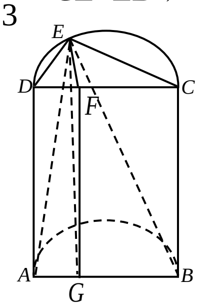
$\therefore \begin{cases} \dfrac{3k-1}{2} \le \omega \le 6k-2 \\ \omega > 6k-8 \\ \omega < \dfrac{3k+2}{2} \end{cases}$，$\because \omega>0$，$\therefore \begin{cases} 6k-2>0 \\ \dfrac{3k-1}{2} \le 6k-2 \\ 6k-8 < \dfrac{3k+2}{2} \end{cases}$，解得：$\frac{1}{3} \le k < 2$，

$\because k\in Z$，$\therefore k=1$，$\therefore 1\le \omega < \frac{5}{2}$． ……12 分

19．解：（1）在平面 EDC 内作 $EF \perp CD$ 于点 F，因为平面 $ABCD \perp$ 平面 EDC，平面 $ABCD \cap$ 平面 $EDC = DC$，所以 $EF \perp$ 平面 $ABCD$， ……2 分

因为 E 为半圆弧 CD 上一点，所以 $CE \perp ED$，

所以 $V_{E-ABCD} = \frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot EF = \frac{1}{3}\times\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}\times\frac{CE\cdot ED}{CD} = \frac{2\sqrt{5}}{3}\cdot CE\cdot ED$， ……4 分



因为 $CE^2+ED^2=CD^2=5$，

$\therefore V_{E-ABCD} \le \frac{2\sqrt{5}}{3}\times\frac{CE^2+ED^2}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{3}\times\frac{5}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$，

当且仅当 $CE=ED=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 时等号成立，

所以四棱锥 $E-ABCD$ 的体积的最大值为 $\frac{5\sqrt{5}}{3}$． ……6 分

（2）由条件①得：$4|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{DC}|\cos\angle CDE = |\overrightarrow{CE}||\overrightarrow{DC}|\cos\angle DCE$，即 $4DE^2=CE^2$，所以 $2DE=CE$，又因为 $DE^2+CE^2=5$，所以 $DE=1$，$CE=2$，

由条件②得：因为 $AD // BC$，$BC\perp$ 平面 DCE，所以 $\angle CBE$ 为直线 AD 与 BE 所成角，且 $\sin\angle CBE = \frac{2}{3} = \frac{CE}{BE}$，$\frac{CE}{BC} = \tan\angle CBE = \frac{2}{\sqrt{5}}$，

由条件③得：$\frac{\sin\angle EAB}{\sin\angle EBA} = \frac{EB}{EA} = \frac{\sqrt{6}}{2}$，设 $AD=x$，则 $\frac{x^2+CE^2}{x^2+DE^2} = \frac{3}{2}$，

若选条件①②，则 $DE=1$，$CE=2$，且 $\frac{CE}{BC}=\tan\angle CBE=\frac{2}{\sqrt{5}}$，所以 $AD=BC=\sqrt{5}$，

若选条件①③，则 $DE=1$，$CE=2$，且 $\frac{x^2+CE^2}{x^2+DE^2}=\frac{3}{2}$，所以 $AD=BC=x=\sqrt{5}$，

若选条件②③，则 $\frac{CE}{x}=\tan\angle CBE=\frac{2}{\sqrt{5}}$，且 $\frac{x^2+CE^2}{x^2+DE^2}=\frac{3}{2}$，$DE^2+CE^2=5$，

所以 $AD=BC=x=\sqrt{5}$，

即从①②③任选两个作为条件，都可以得到 $AD=BC=\sqrt{5}$，……9 分

下面求 AD 与平面 EAB 所成角的正弦值：

方法一：设点 D 到平面 EAB 的距离为 h，AD 与平面 EAB 所成角为 θ，则由

$V_{D-EAB}=V_{E-DAB}$ 得：$h\cdot S_{\Delta EAB}=EF\cdot S_{\Delta DAB}=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}$，所以 $h=\frac{\sqrt{5}}{S_{\Delta EAB}}$，

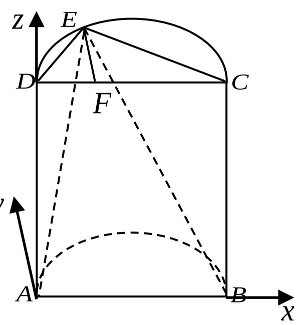
作 $FG\perp AB$ 于点 G，连接 EG，则由 $EF\perp$ 平面 $ABCD$ 知 FG 是 EG 在平面 $ABCD$ 内的射影，所以 $EG\perp AB$，

$\therefore S_{\Delta EAB}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot EG=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{EF^2+FG^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{(\frac{2}{\sqrt{5}})^2+(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$，

$\therefore h=\frac{\sqrt{5}}{S_{\Delta EAB}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{29}}$，$\therefore \sin\theta=\frac{h}{AD}=\frac{2}{\sqrt{29}}$，

所以 AD 与平面 EAB 所成角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{29}}{29}$.……12 分

方法二：以 A 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $B(\sqrt{5},0,0)$，$D(0,0,\sqrt{5})$，$E(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5},\sqrt{5})$，

$\therefore \overrightarrow{AE}=(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5},\sqrt{5})$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{5},0,0)$，

设平面 EAB 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\frac{\sqrt{5}}{5}x+\frac{2\sqrt{5}}{5}y+\sqrt{5}z=0\\ \sqrt{5}x=0\end{cases}$，

令 $z=1$，则 $\vec{m}=(0,-\frac{5}{2},1)$，$\therefore \cos<\overrightarrow{AD},\vec{m}>=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{1+\frac{25}{4}}}=\frac{2}{\sqrt{29}}$，

$\because AD$ 与平面 EAB 所成角 $=\frac{\pi}{2}-<\overrightarrow{AD},\vec{m}>$，

所以 AD 与平面 EAB 所成角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{29}}{29}$.

20．解：（1）由频数分布表得：

$$\overline{x}=\frac{14\times5+17\times6+20\times9+23\times12+26\times8+29\times6+32\times4}{50}=22.76\approx22.8,$$

所以这 50 个社区这一天垃圾量的平均值为 22.8 吨． ……3 分

（2）由（1）知 $\mu=22.8$，$\because s=5.2$，$\therefore\sigma=s=5.2$，

$\therefore P(X>28)=P(X>\mu+\sigma)=\dfrac{1-0.6827}{2}=0.15865$， ……5 分

$\because 320\times0.15865=50.768\approx51$，

所以这 320 个社区中 “超标”社区的个数为 51． ……7 分

（3）由频数分布表知：8 个“超标”社区中这一天的垃圾量至少为 30.5 吨的社区有 4 个，

所以 Y 的可能取值为 $1,2,3,4$，且 $P(Y=1)=\dfrac{C_4^1C_4^4}{C_8^5}=\dfrac{1}{14}$， $P(Y=2)=\dfrac{C_4^2C_4^3}{C_8^5}=\dfrac{3}{7}$，

$P(Y=3)=\dfrac{C_4^3C_4^2}{C_8^5}=\dfrac{3}{7}$， $P(Y=4)=\dfrac{C_4^4C_4^1}{C_8^5}=\dfrac{1}{14}$， ……10 分

所以 Y 的分布列为：

Y	1	2	3	4
P	$\dfrac{1}{14}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{14}$

$\therefore E(Y)=1\times\dfrac{1}{14}+2\times\dfrac{3}{7}+3\times\dfrac{3}{7}+4\times\dfrac{1}{14}=\dfrac{5}{2}$． ……12 分

21．解：（1）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与 $y^2=4x$ 有相同的焦点，所以 $a^2-b^2=1$ ①，

又$\because$ 抛物线的准线被椭圆截得的弦长为 3，$\therefore\dfrac{2b^2}{a}=3$ ②，

解①②得 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，所以曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$． ……4 分

（2）设直线 $AB:y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立直线与椭圆方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$，消去 y 得：$(3+4k^2)x-8k^2x+4k^2-12=0$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$， ……6 分

$\therefore\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{4k^2}{3+4k^2}$，$\therefore\dfrac{y_1+y_2}{2}=k(\dfrac{x_1+x_2}{2}-1)=\dfrac{-3k}{3+4k^2}$，

$\therefore P$ 的坐标为 $(\dfrac{4k^2}{3+4k^2},\dfrac{-3k}{3+4k^2})$，直线 $OP:y=-\dfrac{3}{4k}x$ ③， ……7 分

直线 AB 方程 $y=k(x-1)$ 中令 $x=0$ 得 $y=-k$，$\therefore E$ 的坐标为 $(0,-k)$，

因为直线 $EQ \perp OP$，$\therefore EQ$ 的直线方程为 $y=\frac{4k}{3}x-k$　④，　　……8 分

将③④联立相乘得到 $y^2=-x^2+\frac{3}{4}x$，即 $(x-\frac{3}{8})^2+y^2=\frac{9}{64}$，

所以点 Q 的轨迹为以 $(\frac{3}{8},0)$ 为圆心，$\frac{3}{8}$ 为半径的圆，　　……10 分

所以存在定点 $H(\frac{3}{8},0)$，使得 QH 的长为定值 $\frac{3}{8}$.　　……12 分

22．解：（1）当 $m=1$ 时，$f(x)=\frac{\ln x+1}{x^2}$，$\therefore f'(x)=-\frac{2\ln x+1}{x^3}$，　……………1 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=e^{-\frac{1}{2}}$，$\therefore 0<x<e^{-\frac{1}{2}}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，$x>e^{-\frac{1}{2}}$ 时，

$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$\therefore f(x)_{\max}=f(e^{-\frac{1}{2}})=\frac{e}{2}$.　　………………4 分

（2）由 $f(x)=m-\ln x$ 得 $\ln x-\frac{m(x^2-1)}{x^2+1}=0$，令 $g(x)=\ln x-\frac{m(x^2-1)}{x^2+1}$，

所以方程 $f(x)=m-\ln x$ 的实根的个数即为函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点的个数，

$\because g(1)=0$，$\therefore x=1$ 是函数 $g(x)$ 的一个零点，　　………………5 分

又 $\because g(\frac{1}{x})=\ln\frac{1}{x}-\frac{m(\frac{1}{x^2}-1)}{\frac{1}{x^2}+1}=-\ln x+\frac{m(x^2-1)}{x^2+1}=-g(x)$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)\cup(1,+\infty)$ 上

的零点互为倒数，下面先研究 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的零点的个数：

$\because g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4mx}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)^2-4mx^2}{x(x^2+1)^2}(x>1)$，　　………………6 分

（i）若 $m\le 0$，则 $x>1$ 时，$g(x)=\ln x-\frac{m(x^2-1)}{x^2+1}>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的没有零点；　　………………7 分

（ii）若 $m>0$，则 $g'(x)=\frac{(x^2+1)^2-4mx^2}{x(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+2\sqrt{m}x+1)(x^2-2\sqrt{m}x+1)}{x(x^2+1)^2}(x>1)$，

令 $h(x)=x^2-2\sqrt{m}x+1(x>1)$，

①$\Delta=4m-4\le 0$，即 $0<m\le 1$ 时，$h(x)\ge 0$，$\therefore g'(x)\ge 0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，

$\therefore g(x)>g(1)=0$，$\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的没有零点；　　………………9 分

②$\Delta=4m-4>0$，即 $m>1$ 时，$h(x)=0$ 有两个不等实根 x_1,x_2，且 $x_1x_2=1$，

$\therefore$ 大根 $x_2=\sqrt{m}+\sqrt{m-1}>1$，小根 $0<x_1<1$，

$\therefore x\in(1,x_2)$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，$x\in(x_2,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，

$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$\therefore g(x_2)<g(1)=0$，

又$\because g(e^m)=m-\dfrac{m(e^{2m}-1)}{e^{2m}+1}=\dfrac{2m}{e^{2m}+1}>0$，$\therefore g(x)$在$(1,x_2)$上恒小于 0，在$(x_2,+\infty)$上存在唯一$x_0\in(x_2,e^m)$使得$g(x_0)=0$，$\therefore g(x)$在$(1,+\infty)$上仅有一个零点$x_0$，……11 分

因为$g(x)$在$(0,1)\bigcup(1,+\infty)$上的零点互为倒数，且$g(1)=0$，所以$m\le 1$时，$g(x)$仅有一个零点；$m>1$时，$g(x)$有三个零点.

综上：$m\le 1$时，方程 $f(x)=m-\ln x$仅有一个实根；

$m>1$时，方程 $f(x)=m-\ln x$有三个实根. ……………12 分

参考解法二：由 $f(x)=m-\ln x$得$\ln x-\dfrac{m(x^2-1)}{x^2+1}=0$，$x=1$显然是该方程的一个根；

…………………5 分

$x\ne 1$时，方程等价于$m=\dfrac{(x^2+1)\ln x}{x^2-1}$，令$h(x)=\dfrac{(x^2+1)\ln x}{x^2-1}(x>0,x\ne 1)$，

则$h'(x)=\dfrac{x^4-1-4x^2\ln x}{x(x^2-1)^2}=-\dfrac{x}{(x^2-1)^2}(4\ln x-x^2+\dfrac{1}{x^2})$， ……………6 分

令$\varphi(x)=4\ln x-x^2+\dfrac{1}{x^2}$，则$\varphi'(x)=\dfrac{4}{x}-2x-\dfrac{2}{x^3}=-\dfrac{2(x^2-1)^2}{x^3}<0$，

$\therefore x>0$时，$\varphi(x)$单调递减， ……………7 分

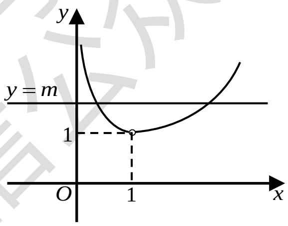
$\therefore 0<x<1$时，$\varphi(x)>\varphi(1)=0$，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，$x>1$时，$\varphi(x)<\varphi(1)=0$，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增， ……………8 分

由$x\to+\infty$时，$h(x)\to+\infty$，

$x\to 0$时，$h(x)\to+\infty$

$x\to 1$时，$h(x)\to 1$，

可画出$h(x)$的大致图像如图所示：



（注：此处用到了高中教材中没有涉及到的函数极限知识，可酌情扣 2—3 分）

结合图像得：$m>1$时，方程$m=h(x)$有两个实根；$m\le 1$时，方程$m=h(x)$没有实根；

综合得：$m\le 1$时，方程 $f(x)=m-\ln x$仅有一个实根；

$m>1$时，方程 $f(x)=m-\ln x$有三个实根. ……………12 分