2025届高三部分重点中学12月联合测评
数学试题

命题学校:武汉外国语学校

命、审题人:邓海波　肖计雄　夏贤聪

考试时间:2024年12月12日 15:00—17:00　试卷满分:150分　考试用时:120分钟

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\mid \ln(x-1)\leqslant 0\}$, $B=\{x\mid 0\leqslant 2x-1\leqslant 2\}$, 则 $A\cup B=$

A. $\left\{x\,\middle|\,1<x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$　B. $\{x\mid x\leqslant 2\}$

C. $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right\}$　D. $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$

2. 已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=4+\mathrm{i}$, 则 z 的共轭复数在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　B. 第二象限

C. 第三象限　D. 第四象限

3. 已知变量 x 和变量 y 的一组成对样本数据为 $(x_i,y_i)(i=1,2,3,\cdots,8)$, 其中 $\overline{x}=\frac{9}{8}$, 其回归直线方程为 $\hat{y}=2x-\frac{1}{4}$, 当增加两个样本数据 $(-1,5)$ 和 $(2,9)$ 后, 重新得到的回归直线方程斜率为3, 则在新的回归直线方程的估计下, 样本数据 $(4,10)$ 所对应的残差为

A. -3　B. -2　C. -1　D. 1

4. 若正整数 a,b 满足等式 $2\,023^{2\,025}=2\,024a+b$, 且 $b<2\,024$, 则 $b=$

A. 1　B. 2　C. 2 022　D. 2 023

5. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量, 其夹角为 θ, 则"$\cos\theta=1$"是"$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$"的

A. 充要条件　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　D. 既不充分也不必要条件

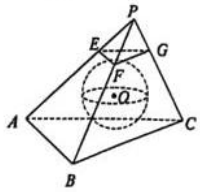
6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=14$, $a_2=\frac{1}{4}$, 记 S_n 为其前 n 项和, 则 $S_3=$

A. $\frac{7}{8}$　B. $\frac{7}{4}$　C. $\frac{7}{2}$　D. 7

7. 已知直线 l 经过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，且与抛物线交于 A,B 两点，若使得$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$成立的点 P 的横坐标为 3，则四边形 $OAPB$ 的面积为

A. $2\sqrt{5}$　　B. $3\sqrt{5}$　　C. $4\sqrt{5}$　　D. $5\sqrt{5}$

8. 如图，在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$PA=PB=CA=CB=2$，$\angle APB=\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，$E,F,G$ 分别为 PA,PB,PC 上靠近点 P 的三等分点，若此时恰好存在一个小球与三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的四个面均相切，且小球同时还与平面 EFG 相切，则 $PC=$



A. $\sqrt{6}+\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{13}+1$　　D. $\sqrt{13}-1$

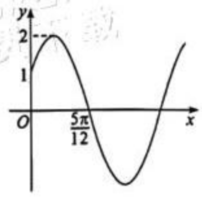
二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 下列结论正确的是

A. 若 $x>0$，则$\frac{2x}{x^2+1}\leqslant 1$　　B. 若 $x>y>0,z>0$，则$\frac{y}{x}>\frac{y+z}{x+z}$

C. 若 $xy\neq 0$ 且 $x<y$，则$\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$　　D. 若 $x>y>0$，则 $x+\frac{1}{y}>y+\frac{1}{x}$

10. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,0<\varphi<2\pi)$的部分图象如图所示，则



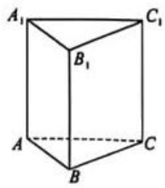
A. $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$上单调递增

B. $f(x)$图象的一条对称轴方程为 $x=\frac{2\pi}{3}$

C. $f(x)$图象的一个对称中心为点$\left(\frac{11\pi}{12},0\right)$

D. $f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上的值域为$[1,\sqrt{3}]$

11. 甲同学想用一支铅笔从如下的直三棱柱的顶点 C_1 出发沿三棱柱的棱逐步完成“一笔画”，即每一步均沿着某一条棱从一个端点到达另一个端点，紧接着从上一步的终点出发随机选择下一条棱再次画出，进而达到该棱的另一端点，按此规律一直进行，其中每经过一条棱称为一次移动，并随机选择某个顶点处停止得到一条“一笔画”路径，比如“一笔画”路径$C_1\to B_1\to A_1\to A\to C$.若某“一笔画”路径中没有重复经过任何一条棱，则称该路径为完美路径，否则为不完美路径．下列说法正确的有



A. 若“一笔画”路径为完美路径，则甲不可能 6 次移动后回到点 C_1

B. 经过 4 次移动后仍在点 C_1 的概率为$\frac{19}{81}$

C. 若“一笔画”路径为完美路径，则 5 次移动后回到点 C_1 有 5 条不同笔迹

D. 经过 3 次移动后，到达点 A_1 的条件下经过点 C 的概率为$\frac{1}{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 设 F 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点，α,β 分别为双曲线 C 的两条渐近线的倾斜角，已知点 F 到其中一条渐近线的距离为 2，且满足 $\alpha=\frac{1}{5}\beta$，则双曲线 C 的焦距为________.

13. 某流水线上生产的一批零件，其规格指标 X 可以看作一个随机变量，且 $X\sim N(98,\sigma^2)$，对于 $X\geqslant 100$ 的零件即为不合格，不合格零件出现的概率为 0.05，现从这批零件中随机抽取 500 个，用 Y 表示这 500 个零件的规格指标 X 位于区间 $(96,100)$ 的个数，则随机变量 Y 的方差是________.

14. 已知函数 $f(x)=a^{x-1}-\log_a(x-1)$（其中 $a>0$，且 $a\neq 1$）为其定义域上的单调函数，则实数 a 的取值范围为________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

在△ABC 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $\frac{1+\sin A}{\cos A}=\frac{1+\sin B}{\cos B}$.

(1)判断△ABC 的形状；

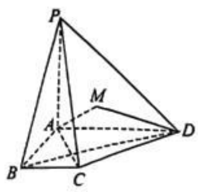
(2)设 $AB=2$，且 D 是边 BC 的中点，求当∠CAD 最大时△ABC 的面积.

16.（本小题满分 15 分）

在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AD\parallel BC$，$AB\perp AD$，$PA\perp$平面$ABCD$，$AP=AD=2AB=4BC$.

(1)求证：平面 $PAC\perp$平面 PBD；

(2)$AM\perp$平面 PCD 于点 M，求二面角 $M\text{-}AD\text{-}P$ 的余弦值.



17.（本小题满分 15 分）

设函数 $f(x)=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x+1$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的单调性；

(2)判断并证明函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上零点的个数.

18.(本小题满分 17 分)

已知过 $A(-1,0)$,$B(1,0)$两点的动抛物线的准线始终与圆 $x^2+y^2=9$ 相切,该抛物线焦点 P 的轨迹是某圆锥曲线 E 的一部分.

(1)求曲线 E 的标准方程;

(2)已知点 $C(-3,0)$,$D(2,0)$,过点 D 的动直线与曲线 E 交于 M,N 两点,设$\triangle CMN$ 的外心为 Q,O 为坐标原点,问:直线 OQ 与直线 MN 的斜率之积是否为定值,如果是定值,求出该定值;如果不是定值,说明理由.

19.(本小题满分 17 分)

n 为不小于 3 的正整数,对整数数列 $S_0:a_1,a_2,\cdots,a_n$,可以做以下三种变换:

①将 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的 a_1 减 1,a_2 加 1,其余项不变,称此变换为对 S_0 做 A_1 变换;

②取 $i\in\{2,\cdots,n-1\}$,将 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的 a_i 减 2,a_{i-1},a_{i+1} 均加 1,其余项不变,称此变换为对 S_0 做 A_i 变换;

③将 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的 a_n 减 1,a_{n-1} 加 1,其余项不变,称此变换为对 S_0 做 A_n 变换.

将数列 S_0 做一次变换得到 S_1,将数列 S_1 做一次变换得到 S_2……

例如:$n=4$ 时,对数列 $S_0:0,-1,1,0$ 依次做 A_3,A_4 变换,意义如下:

先对 S_0 做 A_3 变换得到数列 $S_1:0,0,-1,1$,再对 S_1 做 A_4 变换得到数列 $S_2:0,0,0,0$.

(1)$n=5$ 时,给定数列 $S_0:0,-1,1,0,0$,求证:可以对 S_0 做若干次变换得到数列 0,0,0,0,0;

(2)$n=5$ 时,求证:对任意整数数列 $S_0:a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$,若 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$,则可以对 S_0 做若干次变换得到数列 0,0,0,0,0;

(3)若将变换①中的 a_2 改为 a_3,将变换③中的 a_{n-1} 改为 a_{n-2},在 $n=10$ 时,求证:对任意整数数列 $S_0:a_1,a_2,\cdots,a_{10}$,若 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=0$,且 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$ 和 $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$ 均为偶数,则可以对整数数列 S_0 做若干次变换得到数列$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{10个}$.

2025届高三部分重点中学12月联合测评

数学试题答题卡

学 校

姓 名

考场号　　　　座位号

准考证号

填涂样例　正确填涂 ▬　错误填涂 ✓ ✗ ○ ⊢

注意事项

选择题(每小题5分，共40分)

1　5

2　6

3　7

4　8

选择题(每小题6分，共18分)

9

10

11

填空题(每小题5分，共15分)

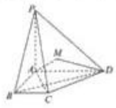
12.

13.

14.

15.(13分)

16.(15分)



17.(15分)

18.(17分)

19.(17分)

2025 届高三部分重点中学 12 月联合测评

数学试题参考答案及多维细目表

题号	1	2	3	4	5	6
答案	C	D	B	D	C	A
题号	7	8	9	10	11	
答案	A	B	AD	ABC	BCD	

1.【答案】C

【解析】$\because A=\{x\mid \ln(x-1)\leqslant 0\}=\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant 2x-1\leqslant 2\}=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$，

$\therefore A\cup B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right\}$.

2.【答案】D

【解析】由 $z=\frac{4+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 可得 $z=\frac{(4+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{3+5\mathrm{i}}{2}$，$\bar{z}=\frac{3-5\mathrm{i}}{2}$，故对应的点为$\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$，位于第四象限.

3.【答案】B

【解析】$\because \sum\limits_{i=1}^{8}x_i=\frac{9}{8}\times 8=9$，$\therefore$增加两个样本点后 x 的平均数为$\frac{9-1+2}{10}=1$；$\because \bar{y}=2\times\frac{9}{8}-\frac{1}{4}=2$，$\therefore \sum\limits_{i=1}^{8}y_i=2\times 8=16$，$\therefore$增加两个样本点后 y 的平均数为$\frac{16+5+9}{10}=3$，$\therefore 3=3\times 1+\hat{b}$，解得 $\hat{b}=0$，$\therefore$新的经验回归方程为 $\hat{y}=3x$，则当 $x=4$ 时，$\hat{y}=12$，$\therefore$样本点$(4,10)$的残差为 $10-12=-2$.

4.【答案】D

【解析】$\because 2\,023^{2\,025}=(2\,024-1)^{2\,025}=\mathrm{C}_{2\,025}^{0}2\,024^{2\,025}-\mathrm{C}_{2\,025}^{1}2\,024^{2\,024}+\cdots+\mathrm{C}_{2\,025}^{2\,024}2\,024-\mathrm{C}_{2\,025}^{2\,025}=2\,024(\mathrm{C}_{2\,025}^{0}2\,024^{2\,024}-\mathrm{C}_{2\,025}^{1}2\,024^{2\,023}+\cdots+\mathrm{C}_{2\,025}^{2\,024}-1)+2\,024-\mathrm{C}_{2\,025}^{2\,025}$，$\therefore b=2\,024-\mathrm{C}_{2\,025}^{2\,025}=2\,023$.

5.【答案】C

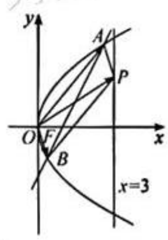
【解析】$\because \cos\theta=1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$，$\therefore \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向，但当$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<0$ 时显然不满足$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，因此充分性不成立.$\because |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，$\therefore (|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|)^2=(|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|)^2$，即$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$，从而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向，$\cos\theta=1$.由此可知必要性成立.

6.【答案】A

【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，$q\neq 0$，依题意，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=14$，$a_2=\frac{1}{4}$，即$\frac{1}{\frac{a_2}{q}}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2q}=\frac{q}{a_2}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}\cdot\frac{1}{q}=14$，$\therefore 2q+2+\frac{2}{q}=7$，$2q^2-5q+2=0$，解得 $q=2$ 或 $q=\frac{1}{2}$，$\therefore a_1=\frac{1}{8}$，$a_2=\frac{1}{4}$，$a_3=\frac{1}{2}$或 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{1}{4}$，$a_3=\frac{1}{8}$，$\therefore S_3=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$.

7.【答案】A

【解析】由题知 $F(1,0)$，直线 l 的斜率不为 0，设直线 l 的方程为 $x=my+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，



联立$\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$整理得 $y^2-4my-4=0$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$.

$\therefore x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2$.

$\because \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$\therefore$四边形 $OAPB$ 为平行四边形.

$\because$点 P 的横坐标为 3，$\therefore 3=x_1+x_2=4m^2+2$，解得 $m^2=\frac{1}{4}$.

$\therefore |AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{16m^2-4\times(-4)}=5$.

点 O 到直线 AB 的距离为$\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\therefore$平

行四边形 $OAPB$ 的面积为 $5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$.

8.【答案】B

【解析】如图，取 AB 中点 M，连接 PM，CM.

由题可知 $AB\perp PM$，$AB\perp CM$.

$\because PM\cap CM=M$，$PM\subset$平面 PMC，$CM\subset$平面 PMC，$\therefore AB\perp$平面 PMC.

作 $PH\perp MC$，垂足为 H. $\because PH\subset$平面 PMC，$\therefore AB\perp PH$.

又 $CM\cap AB=M$，$CM\subset$平面 ABC，$AB\subset$平面 ABC，$\therefore PH\perp$平面 ABC.

过点 H 作 $HN\perp BC$，垂足为 N，连接 PN，易知 $BC\perp PN$.

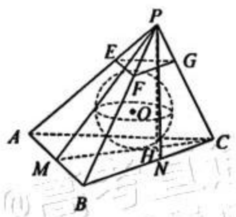
设小球半径为 r，$\therefore \frac{PH}{2r}=\frac{PB}{FB}=\frac{3}{2}$，$\therefore PH=3r$.

根据题意，$V_{三棱锥P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PH=\frac{1}{3}(S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle ABC})\cdot r$，

$\because S_{\triangle PAB}=S_{\triangle ABC}=2$，$S_{\triangle PAC}=S_{\triangle PBC}$. $\therefore 6=4+2S_{\triangle PAC}$，$\therefore S_{\triangle PAC}=S_{\triangle PBC}=1$.

由 $\frac{1}{2}BC\cdot PN=1$，得 $PN=1$，$\therefore \sin\angle PBC=\frac{PN}{PB}=\frac{1}{2}$，$\therefore \cos\angle PBN=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore PC=\sqrt{PB^2+CB^2-2PB\cdot CB\cos\angle PBC}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.



9.【答案】AD

【解析】对于选项A，当 $x>0$ 时，$\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}$，

$\because x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，当且仅当 $x=1$ 时，取等号，$\therefore \frac{2x}{x^2+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}\leqslant 1$，故正确.

对于选项B，$\because x>y>0$ 且 $z>0$，由糖水原理可知 $\frac{y+z}{x+z}>\frac{y}{x}$，故错误；

对于选项C，当 $x<0<y$ 时，结论不成立，故错误；

对于选项D，$\left(x+\frac{1}{y}\right)-\left(y+\frac{1}{x}\right)=\frac{xy+1}{y}-\frac{xy+1}{x}=(xy+1)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)>0$，即 $x+\frac{1}{y}>y+\frac{1}{x}$，故正确.

10.【答案】ABC

【解析】由图可知 $A=2$，$\begin{cases}0+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6},\\ \frac{5\omega\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\pi,\end{cases}$

$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=2$，$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

对于选项A，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，故正确；

对于选项B，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{3\pi}{2}=-2$ 为其最小值，$\therefore x=\frac{2\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴，故正确；

对于选项C，$f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin 2\pi=0$，$\therefore$ 点 $\left(\frac{11\pi}{12},0\right)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心，故正确；

对于选项D，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ 即 $x=0$ 时，$f(x)_{\min}=1$，当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\max}=2$，即 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $[1,2]$，故错误.

11.【答案】BCD

【解析】对于选项 A，沿 $C_1\to B_1\to A_1\to A\to B\to C\to C_1$ 等路线即可，故错误；

对于选项 B，若存在重复路线，两次移动回到点 C_1 可以第一次移动到达点 A_1，B_1，C，第三次移动再从这些移动方式中选，共有 9 种走法，另外可以先移动两次再原路返回，第一次移动可能到达点 A_1，B_1，C，每个点在第二次移动时都有两种移动方式，故有 6 种方式；

若不存在重复路线，经过点 C 由四条棱组成的闭合回路只有 $C_1A_1ACC_1$ 和 $C_1B_1BCC_1$ 两种，每条路都有两种经过方式，共有 4 种方式，∴概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot 19=\frac{19}{81}$，故正确；

对于选项 C，列举法：$C_1\to A_1\to A\to B\to B_1\to C_1$，$C_1\to A_1\to A\to B\to C\to C_1$，$C_1\to A_1\to B_1\to B\to C\to C_1$，$C_1\to B_1\to A_1\to A\to C\to C_1$，$C_1\to C\to A\to B\to B_1\to C_1$，故共有 5 条不同笔记，故正确；

对于选项 D，先考虑重复路线：

前两条路线重复，第一次移动到达点 A_1，B_1，C 共 3 条路径；后两条路径重复（即第一次移动到点 A_1）同理有 3 条路径，其中 $C_1\to A_1\to C_1\to A_1$ 重复，故共只有 5 条路径；

再考虑不重复路径：只有 $C_1\to C\to A\to A_1$，1 条路径，∴三次移动后到达点 A 有 6 条路径．记事件 A_1：从点 C_1 出发，三次移动后到达点 A_1；事件 C：从点 C_1 出发，三次移动时经过点 C，故 $P(A_1)=\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot 6$，$P(A_1C)=\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot 2$，

故 $P(C|A_1)=\frac{P(A_1C)}{P(A_1)}=\frac{1}{3}$，故正确．（也可以直接列举路径来判断）

12.【答案】8

【解析】根据点 F 到其中一条渐近线的距离为 2，可得 $b=2$，且满足 $\alpha+\beta=\pi$．又 $\alpha=\frac{1}{5}\beta$，∴$\beta=\frac{\pi}{6}$，∴$\frac{b}{a}=\tan\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $a=2\sqrt{3}$，∴$c=4$，∴焦距为 $2c=8$．

13.【答案】45

【解析】由正态分布的性质得质量指标在区间 $(96,100)$ 的概率为 $1-2\times0.05=0.9$，

即 1 件产品的质量指标位于区间 $(96,100)$ 的概率为 0.9，∴$Y\sim B(500,0.9)$，故 $D(Y)=500\times0.9\times0.1=45$．

14.【答案】$[\mathrm{e}^{-\mathrm{e}},1)$

【解析】$f(x)=a^{x-1}-\log_a(x-1)=\frac{a^x}{a}-\frac{\ln(x-1)}{\ln a}=\frac{1}{a\ln a}[a^x\ln a-a\ln(x-1)]$，

记 $h(x)=a^x\ln a-a\ln(x-1)$，$f(x)$ 在定义域上单调，可得 $h(x)$ 必为单调函数．

若 $h(x)$ 单调递增，则 $h'(x)=a^x(\ln a)^2-\frac{a}{x-1}\geqslant0$ 恒成立，即 $(x-1)a^{x-1}\geqslant\frac{1}{(\ln a)^2}$，

∴$ta^t\geqslant\frac{1}{(\ln a)^2}$．又函数 $G(t)=ta^t$ 在 $t\to0$ 时值趋近于 0，不满足．

若 $h(x)$ 单调递减，则 $h'(x)=a^x(\ln a)^2-\frac{a}{x-1}\leqslant0$ 恒成立，即 $(x-1)a^{x-1}\leqslant\frac{1}{(\ln a)^2}$，即 $ta^t\leqslant\frac{1}{(\ln a)^2}$，

∴$(ta^t)_{\max}\leqslant\frac{1}{(\ln a)^2}$，设 $G(t)=ta^t$，$G'(t)=(1+t\ln a)a^t=0$，则 $t=-\frac{1}{\ln a}$，

当 $a>1$ 时，$t<0$ 不成立；

当 $0<a<1$ 时，$t=-\frac{1}{\ln a}>0$，∴$G(t)$ 在区间 $\left(0,-\frac{1}{\ln a}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(-\frac{1}{\ln a},+\infty\right)$ 上单调递减，

∴$-\frac{1}{\ln a}\cdot a^{-\frac{1}{\ln a}}\leqslant\frac{1}{(\ln a)^2}$，即 $a^{-\frac{1}{\ln a}}\leqslant-\frac{1}{\ln a}$，

∴$\left(-\frac{1}{\ln a}\right)\ln a\leqslant\ln\left(-\frac{1}{\ln a}\right)$，即 $-1\leqslant\ln\left(-\frac{1}{\ln a}\right)$，解得 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}\leqslant a<1$．

15. 解：(1) 由二倍角公式得 $\frac{\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}=$

$$\frac{\left(\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{B}{2}},$$ ………………………… 2分

$$\therefore\frac{\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}},$$

整理得 $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=0$,

即 $\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)=0$. ………………………… 5分

$\because A,B\in(0,\pi)$, $\therefore\frac{A}{2}-\frac{B}{2}=0$, 即 $A=B$, 即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形. ………………… 6分

(其他方法酌情给分)

(2)由(1)及题设,有 $AC=BC=2CD$,

$$\therefore\cos\angle CAD=\frac{AC^2+AD^2-CD^2}{2AC\cdot AD}$$
$$=\frac{AC^2+AD^2-\frac{AC^2}{4}}{2AC\cdot AD}$$
$$=\frac{\frac{3AC^2}{4}+AD^2}{2AC\cdot AD}$$
$$=\frac{3AC}{8AD}+\frac{AD}{2AC}$$
$$\geqslant 2\sqrt{\frac{3AC}{8AD}\cdot\frac{AD}{2AC}}$$
$$=\frac{\sqrt3}{2},$$ ………………… 10分

$\therefore\angle CAD\leqslant\frac{\pi}{6}$, 当且仅当 $\frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt3}{2}$ 时, 等号成立.

即 $\angle CAD$ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$. 此时由 $\frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt3}{2}$ 可得 $\triangle ACD$ 为直角三角形, $\angle ACD=\frac{\pi}{3}$. … 12分

又由(1)可得 $\triangle ABC$ 为正三角形, $\therefore\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{\sqrt3}{4}\times2^2=\sqrt3$. ………………… 13分

16. 解:(1) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中,

$\tan\angle BAC=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$, $\tan\angle ABD=\frac{AD}{AB}=2$,

$\therefore\angle BAC$ 与 $\angle ABD$ 互余, 即 $AC\perp BD$. ……

………………………………………… 4分

又 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $BD\subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA\perp BD$.

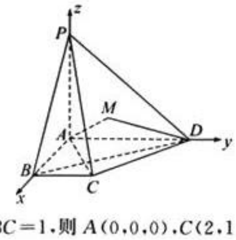
又 AC, $PA\subset$ 平面 PAC, $AC\cap PA=A$,

$\therefore BD\perp$ 平面 PAC.

又 $BD\subset$ 平面 PBD. $\therefore$ 平面 $PAC\perp$ 平面 PBD.

………………………………………… 7分

(2) $\because AB,AD,AP$ 两两互相垂直. $\therefore$ 分别以 AB,AD,AP 为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系.



不妨设 $BC=1$. 则 $A(0,0,0)$, $C(2,1,0)$, $D(0,4,0)$, $P(0,0,4)$.

$\therefore\overrightarrow{PC}=(2,1,-4)$, $\overrightarrow{PD}=(0,4,-4)$.

$\because$ 点 M 在平面 PCD 内,

$\therefore$ 设 $\overrightarrow{PM}=x\overrightarrow{PC}+y\overrightarrow{PD}$.

则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+x\overrightarrow{PC}+y\overrightarrow{PD}=(0,0,4)+x(2,1,-4)+y(0,4,-4)=(2x,x+4y,4-4x-4y)$, ………………………………… 9分

$\because AM\perp$ 平面 PCD. $\therefore AM\perp PC$, $AM\perp PD$,

$$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{PC}=4x+x+4y-16+16x+16y\\ \qquad=21x+20y-16=0,\\ \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{PD}=4x+16y-16+16x+16y\\ \qquad=20x+32y-16=0,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=\frac{12}{17},\\ y=\frac{1}{17},\end{cases}$

$\therefore\overrightarrow{AM}=\left(\frac{24}{17},\frac{16}{17},\frac{16}{17}\right)$, 即 $M\left(\frac{24}{17},\frac{16}{17},\frac{16}{17}\right)$. …

………………………………………… 12分

$\therefore$ 点 M 到平面 PAD 的距离 $d_1=\frac{24}{17}$.

点 M 到棱 AD 的距离 $d_2=\sqrt{\left(\frac{24}{17}\right)^2+\left(\frac{16}{17}\right)^2}$

$=\frac{8\sqrt{13}}{17}$.

设二面角 M-AD-P 大小为 θ，则 $\sin\theta=\frac{d_1}{d_2}=\frac{24}{8\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，

$\therefore\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，

即二面角 M-AD-P 的余弦值为$\frac{2\sqrt{13}}{13}$．…………………………………………………… 15 分

17．解：(1) $f'(x)=\cos x-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x$，且 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$．…………………………………… 2 分

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\cos x>0$，$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x<0$，从而 $f'(x)=\cos x-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x>0$，

即此时函数 $f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增；…………………………………………… 4 分

当$\frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi$ 时，$\cos x<0$，$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x\geqslant0$，从而 $f'(x)=\cos x-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x<0$，

即此时函数 $f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递减．

$\therefore$综上所述，函数 $f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，在区间$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递减．……… 7 分

(2) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$，又 $f(\pi)=-\frac{\pi}{2}+1<0$，且函数 $f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递减．

$\therefore$函数 $f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上存在唯一的零点．…………………………………………… 9 分

当 $x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$时，记 $g(x)=f'(x)=\cos x-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x$，

从而 $g'(x)=-2\sin x-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x$，

且此时 $\sin x<0$，$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x<0$，

$\therefore g'(x)>0$，$g(x)=f'(x)$在区间$\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$上单调递增．

$g(\pi)=-1<0$，$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\pi>0$，$\therefore$存在 $x_0\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，使得 $g(x_0)=0$．……………… 11 分

且 $x\in(\pi,x_0)$时，$g(x)=f'(x)<0$，即此时 $f(x)$在区间(π,x_0)上单调递减；

$x\in\left(x_0,\frac{3\pi}{2}\right)$时，$g(x)=f'(x)>0$，即此时 $f(x)$在区间$\left(x_0,\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递增．…… 13 分

$\therefore$由 $f(\pi)=-\frac{\pi}{2}+1<0$，得 $f(x_0)<0$，

即函数 $f(x)$在区间(π,x_0)上无零点；

而由 $f(x_0)<0$，$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1>0$，

即函数 $f(x)$在区间$\left(x_0,\frac{3\pi}{2}\right)$上有唯一的零点．

$\therefore$函数 $f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上有 2 个零点．…………………………………………… 15 分

18．解：(1)由题意知抛物线的焦点 P 到两定点 A，B 的距离之和等于点 A，B 到抛物线的准线的距离之和，等于 AB 的中点 O 到准线的距离的 2 倍，即等于圆 $x^2+y^2=9$ 的半径的 2 倍，

$\therefore|PA|+|PB|=6>|AB|=2$，$\therefore$点 P 在以 A，B 为焦点的椭圆 E 上．……………… 3 分

设椭圆 E 的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

则 $2a=6$，$2c=2$，$\therefore a=3$，$c=1$，$\therefore b^2=a^2-c^2=8$，

$\therefore$曲线 E 的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$．…… 8 分

(2)设直线 MN：$x=my+2(m\neq0)$，

由$\begin{cases}x=my+2,\\8x^2+9y^2=72,\end{cases}$

$\therefore(8m^2+9)y^2+32my-40=0$．

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{-32m}{8m^2+9}$，$y_1y_2=\frac{-40}{8m^2+9}$，

CM 的中点坐标为 $\left(\frac{x_1-3}{2},\frac{y_1}{2}\right)$，$k_{CM}=\frac{y_1}{x_1+3}$.
…………………………………… 9 分

CM 的垂直平分线的斜率为 $-\frac{x_1+3}{y_1}$. … 10 分

$\therefore CM$ 的垂直平分线方程为 $y=-\frac{x_1+3}{y_1}\cdot\left(x-\frac{x_1-3}{2}\right)+\frac{y_1}{2}$，即 $y=-\frac{my_1+5}{y_1}x+\frac{x_1^2-9}{2y_1}+\frac{y_1}{2}$.

由 $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{8}=1$ 得 $\frac{x_1^2-9}{2y_1}=-\frac{9}{16}y_1$.

$\therefore CM$ 的垂直平分线方程为 $y=-\frac{my_1+5}{y_1}x-\frac{1}{16}y_1$. …………………………………… 11 分

同理 CN 的垂直平分线方程为 $y=-\frac{my_2+5}{y_2}x-\frac{1}{16}y_2$. …………………………………… 13 分

设点 $Q(x_0,y_0)$，

则 y_1、y_2 是方程 $y_0=-\frac{my+5}{y}x_0-\frac{1}{16}y$，

即 $y^2+(16mx_0+16y_0)y+80x_0=0$ 的两根.

$\therefore \begin{cases} y_1+y_2=-16mx_0-16y_0=\frac{-32m}{8m^2+9}, \\ y_1y_2=80x_0=\frac{-40}{8m^2+9}. \end{cases}$ 两式相除得 $\frac{-mx_0-y_0}{5x_0}=\frac{4m}{5}$.$\therefore \frac{y_0}{x_0}=-5m$. ……
…………………………………… 16 分

$\therefore k_{OQ}\cdot k_{MN}=-5m\cdot\frac{1}{m}=-5$，

即直线 OQ 与 MN 的斜率之积为定值 -5. …
…………………………………… 17 分

(其他方法酌情给分)

19. 解：(1) 对数列 S_0 依次做 A_3，A_4，A_5 变换即可.
…………………………………… 4 分

(2) 首先，若对数列 S_0：a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 依次做 $A_{i+1},A_{i+2},\cdots,A_5$ $(i\in\{1,2,3,4\})$ 变换，得到的数列 a_i 加 1，a_{i+1} 减 1，其余项不变；

若对数列中 S_0：a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 依次做 A_i，$A_{i-1},\cdots,A_1$ $(i\in\{1,2,3,4\})$ 变换，得到的数列中 a_i 减 1，a_{i+1} 加 1，其余项不变. ……… 7 分

$\therefore$ 可以通过若干次变换使得相邻两数一个加 1，另一个减 1.

$\therefore$ 可以通过若干次变换使得第一项变为 0，第二项变为 a_1+a_2.

同样的可以通过若干次变换分别使得 a_2,a_3,a_4 均变为 0，此时即为 0,0,0,0,0. …… 10 分

(3) 记此时的变换①为 B_1，变换③为 B_{10}.

首先，记 $T_1=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$，$T_2=a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$，

每次变换使得 T_1 的值加 2 或减 2 或不变，故可以经过若干次变换使得 $T_1=0$，此时 $T_2=0$；

其次，对任意数列 S_0：$a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 依次做 A_{j-1}，A_j，A_j，A_{j+1} 变换，其中 $j\in\{3,4,\cdots,8\}$，得到的数列中 a_j 减 2，a_{j-2}，a_{j+2} 均加 1，其余项不变，记此变换为 B_j，

依次做 A_8，A_9，A_{10} 变换，得到的数列中 a_9 减 1，a_7 加 1，其余项不变，记此变换为 B_9，

此时 B_1,B_3,B_5,B_7,B_9 只变换 a_1,a_3,a_5,a_7,a_9，且对 a_1,a_3,a_5,a_7,a_9 规则同第(2)问，且 $T_1=0$，…………………………………… 15 分

$\therefore$ 由(2)知可以对 S_0 做若干次变换，得到的数列中 $a_1=a_3=a_5=a_7=a_9=0$.

同理可以再对 S_0 做若干次变换，得到的数列中 $a_2=a_4=a_6=a_8=a_{10}=0$，则此时得到数列 $\underbrace{0,0,\cdots,0}_{10个}$. …………………………………… 17 分

(其他方法酌情给分)

多维细目表

题型	题号	分值	必备知识	学科素养						预估难度		
				数学抽象	逻辑推理	数学建模	直观想象	数学运算	数据分析	易	中	难
选择题	1	5	集合与简易逻辑						√	√		
选择题	2	5	复数					√		√		
选择题	3	5	统计与概率		√					√		
选择题	4	5	二项式定理		√			√		√		
选择题	5	5	平面向量		√		√			√		
选择题	6	5	等比数列		√			√		√		
选择题	7	5	抛物线方程及其性质			√					√	
选择题	8	5	立体几何		√		√					√
选择题	9	6	不等式的性质		√				√	√		
选择题	10	6	三角函数的图象及其性质			√					√	
选择题	11	6	排列组合与概率	√		√						√
填空题	12	5	双曲线方程及其性质				√	√		√		
填空题	13	5	概率分布	√		√					√	
填空题	14	5	导数及其应用		√				√			√
解答题	15	13	解三角形		√		√			√		
解答题	16	15	立体几何				√	√		√		
解答题	17	15	导数及其应用		√			√	√		√	
解答题	18	17	椭圆方程及其性质				√	√			√	
解答题	19	17	数列与新定义综合	√	√	√						√