2023年中山大学强基计划测试数学试题

备注：2023年7月1日，数学总共4道解答题，考试时间为45分钟．

1. 已知$n\in N^*$，求$\sum\limits_{k=0}^{n}\left[\dfrac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$

2. 求证：7不整除2^n+1，$n\in N^*$

3. 解方程：$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$

4. 解不等式：$\dfrac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}<2x+9$

1. 分析:中学求和无非是等比等差类型或裂项类型的,本题不是等差等比数列,所以尝试裂项求和

解: 显然: $[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}]=[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}]$

根据取整符号的性质有: $[\frac{x+1}{2}]+[\frac{x}{2}]=[x]$

所以 $[\frac{2n}{2^{k+1}}]-[\frac{n}{2^{k+1}}]=[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}]=[\frac{n}{2^k}]-[\frac{n}{2^{k+1}}]$

所以 $\sum_{k=0}^{n}[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}]=\sum_{k=0}^{n}([\frac{n}{2^k}]-[\frac{n}{2^{k+1}}])=[\frac{n}{2^0}]-[\frac{n}{2^{n+1}}]=n$

2. 分析:同余性质

解: 因为 $2^3\equiv 1(mod7)$

所以 $2^{3k}\equiv 1(mod7)$

易知 $2^{3k+1}\equiv 2(mod7)$, $2^{3k+2}\equiv 4(mod7)$

总之 $2^n\neq -1(mod7)$, 所以原命题成立

3. 分析:降幂,和差化积

解: $1+\cos 2x+1+\cos 4x+2\cos^2 3x=2$

和差化积得: $2\cos x\cos 3x+2\cos^2 3x=0$

再次和差化积 $\cos x\cos 2x\cos 3x=0$

所以 $\cos x=0$ 或 $\cos 2x=0$ 或 $\cos 3x=0$

$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ 或 $k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}(k\in\mathbb{Z})$

4. 分析:分母有理化

解: 易知 $1+2x\geqslant 0, 1\neq\sqrt{1+2x}$, 所以 $x\geqslant -\frac{1}{2}$ 且 $x\neq 0$

$\text{LHS}=(\frac{2x}{\sqrt{1+2x}-1})^2<2x+9$

$[\frac{2x(\sqrt{1+2x}+1)}{(\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt{1+2x}+1)}]^2<2x+9$

$[\frac{2x(\sqrt{1+2x}+1)}{2x}]^2<2x+9$

所以 $(\sqrt{1+2x}+1)^2<2x+9$

化简得: $2\sqrt{1+2x}<7, x<\frac{45}{8}$

综上 $x\in[-\frac{1}{2},0)\cup(0,\frac{45}{8})$